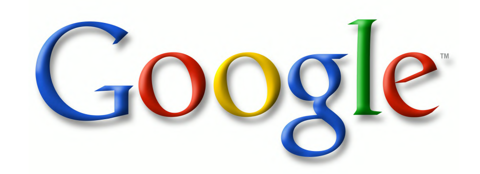



Stanford University Libraries

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Ein und funfzigster Band.

In vier Heften.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Berlin, 1856.
Bei Georg Reimer.

Inhaltsverzeichnifs
des ein und funfzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

Reine Mathematik.

1. Analysis.

2. Mechanik.

Verschiedenes.

E r r a t a

remarqués par M. *Cayley* dans ses *sept différents mémoires d'analyse* tome L, cah. 4 No. 21.

Page 277 ligne dernière *au lieu de* et par le point D trois autres plans parallèles à ces plans *lisez* et trois autres plans parallèles aux plans par le point D.
— 279 — 3 *au lieu de* L'opérateur .... donne *lisez* et l'opérateur .... qui donne
— 279 — 2 (en remontant) *au lieu de* x^l, y^m, z^n, ... *lisez* $x^l y^m z^n$ ....
— 280 — 1 *au lieu de* où les *lisez* ou des
— 282 — 6 *au lieu de* $\mathfrak{A}\varphi . \mathfrak{B}\varphi$... *lisez* $\mathfrak{A}\varphi$, $\mathfrak{B}\varphi$ ...
— 286 — 4 *insérer* (
— 288 dans la troisième et la cinquième formule *au lieu de* $(x, y, z \dots)$ *lisez* (x, y, z ...)
— 291 ligne 6 *au lieu de* contenir *lisez* poser
— 291 — 7 (en remontant) *au lieu de* signe *lisez* signes
— 307 — 11 *au lieu de* indéterminées, car *lisez* indéterminées. Or
— 314 — 2 *au lieu de* $(s-a)^2$ *lisez* $(s-a)^\alpha$
— 317 — 4 (en remontant) *au lieu de* l'indentité *lisez* l'identité

Dans les mémoires Nrs 3, 4, 5, 6, 7 l'auteur s'étoit servi dans le manuscrit d'un caractère particulier pour dénoter les matrices, mais dans l'impression les matrices sont représentées de la même manière que les déterminants. En faisant attention à ce défaut, la liaison des formules suffira pour ôter l'ambiguité.

Rem. du directeur de ce journal. La raison pourquoi l'on n'a pas pris dans l'impression le caractère particulier de deux arcs)(*entrelacés*, si bien choisi par M. *Cayley*, étoit que ce caractère ne se trouvoit pas parmi ceux de l'imprimerie, et que le temps ne permettoit pas de le faire couler exprès. On étoit forcé d'indiquer par un autre moyen, à la vérité moins convenable, la différence entre les matrices et les déterminants. On a joint les deux arcs par le signe ⌒ comme voici: ($\widehat{)(}$) partout où ces arcs devoient être *entrelacés* et on a omis le ⌒ partout où il y avait seulement à juxtaposer les deux arcs.

1.

Über die Theorie der analytischen Facultäten.

(Von dem Herrn Dr. phil. *Weierstrass*, Oberlehrer am Gymn. zu Braunsberg in Ostpr.) (*)

Die Theorie der analytischen Facultäten scheint mir, so vielfach dieselbe auch schon behandelt worden ist, noch einige nicht unwesentliche Schwierigkeiten zu haben, welche aufzuhellen und zu beseitigen um so weniger überflüssig sein dürfte, als Jedem, der die verschiedenen Darstellungen dieser Lehre überblickt, und wenn er die eine mit der andern vergleicht, ein merkwürdiger Mangel an Uebereinstimmung in die Augen fallen muss. Und die Statt findenden Differenzen sind nicht bloss formell, sondern es giebt sich auch in einer und derselben Bearbeitung zuweilen ein Widerspruch der Resultate *unter sich* zu erkennen. Der Grund dieses auffallenden Umstandes liegt theils in der Unsicherheit des Fundaments, auf welchem einige der Theorieen aufgeführt sind, theils in dem nicht strengen Gange der weitern Entwicklungen, so wie in der Nichtbeachtung gewisser Eigenthümlichkeiten der betrachteten Grössen, deren Behandlung eine besondere Vorsicht erfordert. Ich werde darauf in dem Folgenden ausführlicher eingehen.

(*) Anm. Mit wahrer, wissenschaftlicher sowohl, als persönlicher Befriedigung, habe ich die hier folgende Abhandlung empfangen und, der Erlaubniss ihres Herrn Verfassers gemäss, in das gegenwärtige Journal aufgenommen, da sie zeigt, dass die so wichtige Theorie der analytischen Facultäten, welche in älterer Zeit wenig berücksichtigt wurde und zu deren näherer und allgemeinerer Begründung auch ich seit 32 Jahren beizutragen mich bemüht habe, immer mehr die Aufmerksamkeit der Analysten in Anspruch nimmt, und jetzt wieder eine noch tiefer eindringende Erforschung durch einen so ausgezeichneten und scharfsinnigen Mathematiker, wie Herr *Weierstrass* es ist, angeregt hat.

Meine eigenen Arbeiten über den Gegenstand betreffend, so hätte ich zur Rechtfertigung der Unvollständigkeit, die Herr *Weierstrass* daran bemerkt hat, wohl Manches zu sagen; aber meine, durch hohes Alter und stete Krankheit geschwächten Arbeitskräfte reichen zu Dergleichen nicht mehr hin. Ich muss also darauf verzichten; was aber auch sehr wohl angeht, da ich bei meinen wissenschaftlichen Bemühungen nie auf mich selbst Rücksicht genommen, nie nach Ruhm und Lob, sondern nur, nach meinen Kräften, nach Förderung der Wahrheit gestrebt habe, und es mir ganz gleich gilt, wer es sei, der der Wahrheit näher kommt: ob ich, oder Jemand Anderes, wenn nur überhaupt eine weitere Annäherung an die Wahrheit erzielt wird.

Berlin, im August 1854. *Crelle.*

Es möge erlaubt sein, sowohl um den gegenwärtigen Stand der Theorie, als auch den Zweck des vorliegenden Aufsatzes klar zu machen, die verschiedenen bekannteren Bearbeitungen der Facultäten-Lehre in der Kürze durchzugehen.

Zunächst gegen die *Kramp*sche Behandlung ist schon oft der Einwand geltend gemacht worden, dass ihr keine allgemein-gültige Definition der analytischen Facultäten zu Grunde liege. *Kramp* hat offenbar den Gedanken verfolgt, dass eine Facultät mit gebrochenem oder irrationalem Exponenten eine Grösse sei, die *alle* die Eigenschaften haben müsse, welche ihr für *ganzzahlige* Exponenten zukommen. Gegen ein solches Verfahren ist, so lange es sich um die *Auffindung* von Resultaten handelt, nichts zu erinnern; aber jedes Ergebniss, welches man auf diesem Wege erlangt, bedarf einer nachträglichen strengen Prüfung seiner Richtigkeit. Nun zeigt sich aber, dass in dem vorliegenden Falle die Voraussetzung, von welcher *Kramp* ausging, unstatthaft ist; es *giebt* keine solche Facultät mit beliebigem Exponenten, wie er sich dieselbe gedacht hat. Dadurch erklären sich die meisten Unrichtigkeiten, die sich bei ihm finden; andere haben ihren Grund darin, dass auf die *Convergenz* und *Divergenz* der angewendeten unendlichen Reihen und Producte keine Rücksicht genommen ist; was sich auch von einigen andern Arbeiten über denselben Gegenstand sagen lässt.

Die *Crelle*'sche Theorie geht von einer *allgemeinen* Definition der analytischen Facultät aus, indem sie dieselbe für eine von drei Elementen, der Basis u, der Differenz x und dem Exponenten y abhängige und durch

$$(u, +x)^y$$

bezeichnete Function erklärt, deren Grund-Eigenschaften durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}(u, +x)^{y+k} &= (u, +x)^y (u+yx, +x)^k\\ (ku, +kx)^y &= k^y (u, +x)^y\\ (u, +x)^1 &= u\end{aligned}$$

ausgesprochen werden, aus welchen dann alles Uebrige abgeleitet wird.

Dieser Gang ist durchaus methodisch, und zeichnet sich zugleich durch grosse Einfachheit aus. Aber es tritt hier der eigenthümliche und, wie es scheint, bis jetzt nicht beachtete Umstand ein, dass es nicht *bloss eine*, den aufgestellten Gleichungen genügende Function von u, x, y giebt, sondern *unzählig viele*. Denn es sei $\varphi(u)$ eine Function von u, für welche die Relation

$$\varphi(u+1) = \varphi(u)$$

gilt, z.B. eine willkührliche Function von $\cos(2u\pi)$ und $\sin(2u\pi)$, und es werde

$$[u,+x]^y = \frac{\varphi(\frac{u}{x}+y)}{\varphi(\frac{u}{x})}(u,+x)^y$$

gesetzt, so hat man

$$[u+yx,+x]^k = \frac{\varphi(\frac{u}{x}+y+k)}{\varphi(\frac{u}{x}+y)}(u+yx,+x)^k,$$

$$[u,+x]^{y+k} = \frac{\varphi(\frac{u}{x}+y+k)}{\varphi(\frac{u}{x})}(u,+x)^{y+k},$$

$$[ku,+kx]^y = \frac{\varphi(\frac{u}{x}+y)}{\varphi(\frac{u}{x})}(ku,+kx)^y\ ,$$

$$[u,+x]^1 = \frac{\varphi(\frac{u}{x}+1)}{\varphi(\frac{u}{x})}(u,+x)^1;$$

und findet hieraus, mit Hülfe der obigen Gleichungen für $(u,+x)^y$:

$$\begin{aligned}[u,+x]^{y+k} &= [u,+x]^y[u+yx,+x]^k\\ [ku,+kx]^y &= k^y[u,+x]^y,\\ [u,+x]^1 &= u.\end{aligned}$$

Die Function $[u+x]^y$, welche unzählig viele verschiedene Formen annehmen kann, genügt also den nämlichen drei Gleichungen, wie $(u,+x)^y$.

Hieraus geht hervor, dass zwar, wenn man wirklich eine Function von u, x, y darstellen kann, welche den in Rede stehenden Grundgleichungen genügt, dieselbe auch alle die weitern Eigenschaften, die *Crelle* daraus ableitet, haben muss; dass es aber nicht möglich ist, $(u,+x)^y$ *mittels der genannten Gleichungen allein*, *vollständig zu bestimmen*, und dass daher bei den Entwicklungen, durch welche *Crelle* gleichwohl zu Darstellungen dieser Grösse in der Form von convergenten unendlichen Reihen gelangt ist, irgend etwas übersehen sein muss, was zu einer nähern Untersuchung auffordert.

Bessel und *Ohm* benutzen zur Definition von $(u,+x)^y$, oder, nach *ihrer* Bezeichnung, von $u^{y|x}$ *unendliche Producte*; und zwar ist, nach Beiden, nachdem zuvor die Definition von $u^{n|x}$ für ganzzahlige, positive und negative Werthe von n gegeben worden:

$$u^{y|x} = y\,\mathrm{Lim.}\left\{(nx)^y \frac{u^{n|x}}{(u+yx)^{n|x}}\right\} \text{ für } n = \begin{cases} +\infty, \text{ wenn } x > 0 \\ -\infty, \text{ wenn } x < 0. \end{cases}$$

Diese Erklärung hat allerdings den Vortheil, dass man von $u^{r|x}$ sogleich von Anfang an eine ganz bestimmte Vorstellung bekommt; und es ist auch anzuerkennen, wie man, von den Facultäten mit ganzen Exponenten ausgehend, ungezwungener Weise zu diesen unendlichen Producten gelangt. Aber es scheint mir ein wesentlicher Nachtheil zu sein, dass alsdann die zweite der obigen Grundgleichungen aufhört, allgemein gültig zu sein, und es auch nicht möglich ist, eine Darstellungsform der so definirten Facultät aufzustellen, die für *alle* Werthe von u, x, y unverändert dieselbe bleibt. Und dann möchte ich auch fragen: wie soll man in dieser Weise, ohne in Willkürlichkeiten zu gerathen, die Definition der Facultät auf *complexe* (imaginäre) Werthe von x ausdehnen? Und die wahre Begriffsbestimmung einer analytischen Function kann doch nur eine solche sein, welche sich gleichmässig auf *alle* Werthe ihrer Argumente erstreckt, und aus welcher sich auch eine Darstellung des Zusammenhanges zwischen den letzteren und dem Werthe der Function in einer ganz allgemein gültig bleibenden Form muss ableiten lassen. Das ist, so weit ich das Gebiet der Analysis übersehe, überall der Fall, und wird sich, wie ich zeigen werde, auch für die *Facultäten* bewähren.

Die neueste Bearbeitung der Facultäten-Lehre endlich, nämlich die von *Oettinger*, kann ich, so viele schätzbare weitere Entwicklungen und Anwendungen der Theorie sich auch darin finden, in ihrer Grundlage gleichfalls nicht als genügend anerkennen. Die geradezu ausgesprochene Behauptung, dass es nicht nur schwierig, sondern auch überflüssig sei, von einer allgemeinen Definition der Facultät auszugehen, scheint schon von vorn herein nicht dafür zu sprechen, dass diese Methode die rechte sei. Und dann bedient sich der Verfasser, um von einer Formel zu der andern zu gelangen, häufig, ganz unbekümmert, *divergenter* unendlicher Reihen und Producte, und sucht alsdann das Widersprechende, was bei diesem Verfahren nicht selten in den Resultaten hervortreten muss, dadurch zu erklären, dass er einer Gleichung, welche unrichtig ist, wenn die darin vorkommenden Grössen bestimmte Zahlenwerthe haben, gleichwohl eine gewisse *formelle* Gültigkeit zugesteht; was man nach dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft nicht wohl erwarten sollte. Ich bemerke hier, dass namentlich die Reihen-Entwicklung einer Facultät nach *steigenden* Potenzen der Differenz, die häufig zur Anwendung kommt, *niemals* convergirt, sobald der Exponent keine *ganze* Zahl ist. Alles was mit deren Hülfe gefunden wird, ist aber, wenn nicht unrichtig, so doch jedenfalls unsicher.

Nach diesen Bemerkungen glaube ich keiner weitern Rechtfertigung zu bedürfen, wenn ich die Facultäten-Theorie einer abermaligen Untersuchung unterwerfe, und gehe daher sofort zur Sache über. Ich führe nur noch an, dass ich bereits vor geraumer Zeit in einer kleinen Gelegenheitsschrift (Deutsch-Krone, 1843) versucht habe, sowohl die Definition der Facultäten genau festzustellen, als auch die wichtigsten, auf dieselben sich beziehenden Formeln und Entwicklungen in strenger Weise abzuleiten, von welcher Abhandlung die vorliegende als eine neue Bearbeitung und weitere Ausführung zu betrachten ist.

1.

Ich beginne mit der allgemeinsten Bestimmung derjenigen von drei Elementen u, x, y abhängigen Function $f(u, x, y)$, welche den von *Crelle* aufgestellten Gleichungen

$$(1.)\quad f(u,x,y+k) = f(u,x,y)f(u+yx,x,k)$$
$$(2.)\quad f(ku,kx,y) = k^y f(u,x,y)$$
$$(3.)\quad f(u,x,1) \quad = u$$

Genüge leistet.

Vertauscht man in der ersten Gleichung y und k mit einander, so erhält man

$$f(u,x,y+k) = f(u,x,k)f(u+kx,x,y),$$

und wenn man hierin $u-kx$ statt u setzt,

$$f(u,x,y) = \frac{f(u-kx,x,y+k)}{f(u-kx,x,k)};$$

woraus ferner, indem man $u-kx = wx$, also $k = \frac{u}{x} - w$ setzt,

$$f(u,x,y) = \frac{f(wx,x,\frac{u}{x}+y-w)}{f(wx,x,\frac{u}{x}-w)},$$

und sodann, mit Anwendung der zweiten Gleichung,

$$(4.)\quad f(u,x,y) = x^y \frac{f(w,1,\frac{u}{x}+y-w)}{f(w,1,\frac{u}{x}-w)}$$

folgt.

Stellt man sich jetzt der willkührlichen Grösse w einen bestimmten Werth, beigelegt vor, und setzt

$$(5.)\qquad f(w,1,u) = F(u),$$

so erhält man:

$$(6.)\qquad f(u,x,y) = x^y \cdot \frac{F(\frac{u}{x}+y)}{F(\frac{u}{x})}.$$

Umgekehrt erhellet, dass jede Function $f(x, u, y)$, die, bei *ganz willkührlicher* Annahme von $F(u)$, durch diese Formel bestimmt wird, den beiden ersten der obigen Gleichungen Genüge thut. Denn es ergiebt sich aus (b):

$$f(u,x,y+k) = x^{y+k} \cdot \frac{F(\frac{u}{x}+y+k)}{F(\frac{u}{x})} = x^y \cdot \frac{F(\frac{u}{x}+y)}{F(\frac{u}{x})} \cdot x^k \cdot \frac{F(\frac{u+yx}{x}+k)}{F(\frac{u+yx}{x})}$$

$$= f(u,x,y) f(u+yx,x,,k),$$

$$f(ku,kx,y) = (kx)^y \cdot \frac{F(\frac{u}{x}+y)}{F(\frac{u}{x})} = k^y f(u,x,y).$$

Damit nun auch die *dritte* Gleichung befriedigt werde, ist nöthig, dass

$$f(u,x,1) = x\,\frac{F(\frac{u}{x}+1)}{F(\frac{u}{x})} = u \quad \text{oder}$$

$$F\left(\frac{u}{x}+1\right) = \frac{u}{x}\cdot F\left(\frac{u}{x}\right)$$

sei; woraus, wenn man ux statt u setzt, die Relation

$$(7.)\qquad F(u+1) = u.F(u)$$

folgt. Man sieht sofort, dass *eine* Function, welche dieser Gleichung genügt, die *Legendre*sche $\Gamma(u)$ ist, und dass man, um den allgemeinsten Ausdruck von $F(u)$ zu haben, $F(u) = \varphi(u)\,\Gamma(u)$ setzen muss; wo unter $\varphi(u)$ eine *periodische* Function zu verstehen ist, welche unverändert bleibt, wenn u in $u+1$ übergeht. Ohne aber hinsichtlich der Theorie der Γ-Function irgend etwas vorauszusetzen, kann man folgendermaassen fortfahren.

Aus (7) folgt, wenn n eine *ganze positive* Zahl bedeutet:

$$F(u+n) = u(u+1)(u+2)\ldots(u+n-1)\,F(u),$$

und hieraus, wenn $n-1$ statt n und 1 statt u gesetzt wird:

$$F(n) = 1.2\ldots\ldots(n-1)\,F(1), \text{ also}$$

$$\frac{F(1)}{F(u)} = u(1+\tfrac{1}{1}u)(1+\tfrac{1}{2}u)\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)\cdot\frac{F(n)}{F(u+n)}.$$

Nun ergiebt sich aber aus den Sätzen über die Convergenz der unendlichen Producte, die ich im Folgenden zusammenstellen werde, dass sich eine Function $\psi(n)$ der positiven veränderlichen Zahl n, wenn dieselbe ohne Ende wächst, einer bestimmten endlichen Grenze nähert, wenn der Werth von $n^2\cdot\left(\frac{\psi(n)}{\psi(n-1)}-1\right)$ für $n=\infty$ nicht unendlich gross wird. Setzt man nun

$$(1+u)(1+\tfrac{1}{2}u)\cdots\left(1+\frac{u}{n-1}\right) = \psi(n),$$

so ist $\frac{\psi(n)}{\psi(n-1)} = 1+\frac{u}{n}$, und man sieht, dass zwar nicht $\psi(n)$, wohl aber $n^{-u}\psi(n)$, für $n=\infty$ einen bestimmten endlichen Werth annimmt, weil für $n=\infty$,

$$\frac{n^{-u}\psi(n)}{(n-1)^{-u}\psi(n-1)} = \left(1+\frac{u}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^u = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{u}{n}+\frac{u(u+1)}{2n^2}-\ldots\right)$$

$= 1-\frac{u}{n^2}+\frac{u(u+1)}{2n^2}-\ldots$ ist, also $n^2\left(\frac{n^{-u}\psi(n)}{(n-1)^{-u}\psi(n-1)}-1\right)$ zu $\frac{1}{2}u(u-1)$ wird. Da nun ferner $n^{-u} = \left(\frac{1}{2}\right)^u\left(\frac{2}{3}\right)^u\ldots\ldots\left(\frac{n-1}{n}\right)^u$ ist, so hat man:

$$n^{-u}\psi(n) = u\,.\,(\tfrac{1}{2})^u(1+u)\cdot(\tfrac{2}{3})^u(1+\tfrac{1}{2}u)\ldots\ldots\left(\frac{n-1}{n}\right)^u\left(1+\frac{u}{n-1}\right),$$

und es hat das unendliche Product

$$u\cdot\prod_{a=1}^{a=+\infty}\left\{\left(\frac{a}{a+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{a}\right)\right\}$$

einen endlichen, bestimmten Werth, welchen (reellen oder imaginären) Werth auch u haben möge. Ich möchte für dasselbe die Benennung „*Factorielle* von u" und die Bezeichnung $Fc\,(u)$ vorschlagen, indem die Einführung dieser Function in die Theorie der Facultäten dem Gebrauch der Γ Function vorzuziehen sein dürfte, da sie den Vortheil hat, für keinen Werth von u eine Unterbrechung der Stetigkeit zu erleiden, und überhaupt, gleich den einfachsten transcendenten Functionen e^u, $\sin u$, $\cos u$ u. s. w. im Wesentlichen den Character einer rationalen *ganzen* Function hat, so dass sie z. B. auch nach ganzen positiven Potenzen von u in eine *beständig* convergirende Reihe entwickelt werden kann.

Nun ist

$$\frac{n^{-(u+1)}(u+1)(1+\frac{u+1}{1})(1+\frac{u+1}{2})\dots\dots(1+\frac{u+1}{n-1})}{n^{-n}u.(1+\frac{1}{1}u).(1+\frac{1}{2}u)\dots\dots(1+\frac{u}{n-1})} = \frac{1}{1}u\cdot\frac{u+n}{n},$$

mithin, wenn man $n + \infty$ setzt:

$$\frac{Fc(u+1)}{Fc(u)} = \frac{1}{u}, \quad \text{oder}$$

$$(8.) \qquad Fc(u) = Fc(u+1).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der obigen (7), so erhält man

$$Fc(u)F(u) = Fc(u+1)\,F(u+1)\,;$$

d. h. es ist $Fc\,(u)\,F\,(u)$ eine Function von u, die sich nicht ändert, wenn $u+1$ statt u gesetzt wird. Bezeichnet man daher eine solche durch $\varphi\,(u)$, so ergiebt sich

$$F(u) = \frac{\varphi(u)}{Fc(u)},$$

und es wird daher der allgemeinste Ausdruck einer Function $f(u,x,y)$, welche die Gleichungen (1, 2, 3) *befriedigen soll, durch die Formel*

$$(9.) \quad f(u,x,y) = x^{y}\cdot\frac{Fc(\frac{u}{x})}{Fc(\frac{u}{x}+y)}\cdot\frac{\varphi(\frac{u}{x}+y)}{\varphi(\frac{u}{x})}$$

dargestellt, wo

$$(10.) \qquad Fc(u) = u\cdot\prod_{a=1}^{a=+\infty}\left\{\left(\frac{a}{a+1}\right)^{u}\left(1+\frac{u}{a}\right)\right\}$$

ist, und $\varphi\,(u)$ eine beliebige Function bedeutet, für welche die Relation

$$(11.) \qquad \varphi\,(u+1) = \varphi\,(u)$$

gilt. Wenn y eine ganze Zahl ist, so fällt φ aus dem Ausdrucke von $f(u,x,y)$ weg.

2.

Nach dem Vorstehenden ist es zur vollständigen Definition von $f(u,x,y)$ nothwendig, den obigen drei Grundgleichungen noch *eine neue Bedingung hinzuzufügen*, durch welche die Function $\varphi\,(u)$ bestimmt wird. Ehe ich aber die-

selbe aufsuche, muss ich auf eine, allen Functionen, welche den Gleichungen (1, 2, 3) genügen, gemeinsame Eigenthümlichkeit aufmerksam machen, aus deren Nichtbeachtung Irrthümer hervorgehen können, und wirklich hervorgegangen sind.

Man hat zur Bestimmung von $f(u,x,y)$ unter andern folgenden Weg eingeschlagen. Es ist (gemäss 1, 2)

$$f(u,x,y+1) = f(u,x,y)\,(f\,u+yx,x,1) = (u+yx)\,f(u,x,y)$$

$$f(u,x,y+1) = f(u,x,1)\,f(u+x,x,y) = u\,f(u+x,x,y)$$

und daher

$$(12.)\qquad f(u,x,y) = \frac{u}{u+yx}\cdot f(u+x,x,y);$$

woraus man, indem man $u+x$, $u+2x$, $u+3x$ u. s. w. statt u setzt, weiter

$$(13.)\quad f(u,x,y) = \frac{u(u+x)(u+2x)\dots(u+(n-1)x)}{(u+yx)(u+yx+x)\dots\dots(u+yx+(n-1)x)}\cdot f(u+nx,x,y),$$

folgert, wo n eine *ganze positive* Zahl bedeutet. Setzt man ferner in dieser Formel $u-nx$ statt u, so erhält man

$$(14.)\qquad f(u,x,y) = \frac{(u+yx-x)(u+yx-2x)\dots(u+yx-nx)}{(u-x)(u-2x)(u-3x)\dots(u-nx)}\cdot f(u-nx,x,y).$$

Nun ist aber

$$(15.)\quad Fc(u) = \operatorname{Lim.}_{n=\infty}\left\{n^{-u}\cdot\frac{u(u+1)(u+2)\dots(u+n-1)}{1.2\dots\dots(n-1)}\right\},$$

also

$$(16.)\quad \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{w}{x}\right)} = \operatorname{Lim.}_{n=\infty}\left\{n^{-\frac{u}{x}+\frac{w}{x}}\cdot\frac{u(u+x)(u+2x)\dots(u+(n-1)x)}{w(w+x)(w+2x)\dots(w+(n-1)x)}\right\},$$

woraus, wenn man $w-x$ statt u, $u-x$ statt w, $-x$ statt x setzt,

$$(17.)\quad \frac{Fc\left(1-\frac{w}{x}\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)} = \operatorname{Lim.}_{n=\infty}\left\{n^{-\frac{w}{x}+\frac{u}{x}}\cdot\frac{(w-x)(w-2x)\dots(w-nx)}{(u-x)(u-2x)\dots(u-nx)}\right\}$$

folgt. Hiernach geben die Gleichungen (14, 15), wenn man $w = u+yx$ macht

$$(18.)\quad f(u,x,y) = \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}\cdot\operatorname{Lim.}_{n=\infty}\{n^{-y}.f(u+nx,x,y)\}\ \text{und}$$

$$(19.)\quad f(u,x,y)=\frac{Fc\left(1-\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)}\cdot\underset{n=\infty}{\text{Lim.}}\{n^{-y}.f(u-nx,x,y)\}.$$

Bis hieher sind nur die Gleichungen (1, 3) angewandt. Mit Hülfe der *zweiten* ergiebt sich ferner, da

$$f(u+nx,x,y)=(u+nx)^y.f\left(1,\frac{x}{u+nx},y\right)$$

$$f(u-nx,x,y)=(u-nx)^y.f\left(1,\frac{x}{u-nx},y\right),$$

und

$$\underset{n=\infty}{\text{Lim.}}\left\{n^{-y}(u+nx)^y\right\}=x^y.\underset{n=\infty}{\text{Lim.}}\left(1+\frac{u}{nx}\right)^y=x^y,$$

$$\underset{n=\infty}{\text{Lim.}}\left\{n^{-y}(u-nx)^y\right\}=(-x)^y.\underset{n=\infty}{\text{Lim}}\left(1-\frac{u}{nx}\right)^y=(-x)^y$$

ist:

$$(20.)\quad f(u,x,y)=x^y\cdot\frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}\cdot\underset{n=\infty}{\text{Lim.}}f\left(1,\frac{x}{u+nx},y\right),\ \text{und}$$

$$(21.)\quad f(u,x,y)=(-x)^y\cdot\frac{Fc\left(1-\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)}\cdot\underset{n=\infty}{\text{Lim.}}f\left(1,\frac{x}{u-nx},y\right).$$

Setzt man $x=o$, so können die Gleichungen (1, 2, 3), die dann in

$$f(u,o,y+k)=f(u,o,y)f(u,o,k)$$
$$f(ku,o,y)=k^y.f(u,o,y)$$
$$f(u,o,1)=u$$

übergehen, nicht anders befriedigt werden, als wenn man

$$f(u,o,y)=u^y$$

annimmt. Hieraus schliessend, dass $f(u,x,y)$, wenn x seinem numerischen Werthe nach beständig abnimmt, sich der Gränze u^y nähern müsse, würde die Gleichung (20),

$$(22.)\quad f(u,x,y)=x^y\cdot\frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}$$

geben; was mit dem vorhin Bewiesenen, dass $f(u,x,y)$ durch die Gleichungen

(1, 2, 3) allein nicht bestimmt sei, im Widerspruch steht. Aber noch mehr. Die Gleichung (21) würde, unter derselben Voraussetzung,

$$(23.)\qquad f(u,x,y) = (-x)^y \cdot \frac{Fc(1-\frac{u}{x}-y)}{Fc(1-\frac{u}{x})}$$

geben, und es müsste

$$(-1)^y \cdot \frac{Fc(1-\frac{u}{x}-y)}{Fc(1-\frac{u}{x})} = x^y \cdot \frac{Fc(\frac{u}{x})}{Fc(\frac{u}{x}+y)} \cdot \frac{Fc(\frac{u}{x}+y)\cdot Fc(1-\frac{u}{x}-y)}{Fc(1-\frac{u}{x})\cdot Fc(\frac{u}{x})} = (-1)^y,$$

sein; was ein offenbar falsches Resultat ist; wie schon daraus erhellet, dass für $u = x$ der Ausdruck links die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, sobald y keine ganze Zahl ist.

Da die Gleichungen (20, 21) strenge Folgerungen aus den Gleichungen (1, 2, 3) sind, und dieselben wirklich befriedigt werden, wenn man für $f(u, x, y)$ irgend eine der durch die Formel (9.) gegebenen Functionen annimmt: so kann der hervorgetretene Widerspruch nur in der Voraussetzung seinen Grund haben, dass sich $f(1, x, y)$, wenn der numerische Werth von x unendlich klein wird, unbedingt der Grenze 1 nähere. Diese Annahme ist unstatthaft, indem sich vielmehr nachweisen lässt, *dass jede Function, welche den Gleichungen* (1, 2, 3) *genügt, eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit erfährt, wenn x, während u und y constant bleiben, in stetiger Veränderung, vom Positiven zum Negativen übergeht.*

Setzt man in der Formel (9) wx statt u, unter w eine *positive* Zahl verstanden, und wendet die Relation (2) an, so erhält man:

$$(24.)\quad f\left(1,-\frac{1}{w},y\right) = 1^y \cdot \frac{Fc(w)}{w^y . Fc(w+y)} \cdot \frac{\varphi(w+y)}{\varphi(w)}.$$

Setzt man aber wx statt u, und $-x$ statt x, so ergiebt sich:

$$f\left(1,-\frac{1}{w},y\right) = (-1)^y \cdot \frac{Fc(-w)}{w^y . Fc(-w+y)} \cdot \frac{\varphi(-w+y)}{\varphi(-w)}.$$

In Folge der Formel ist aber

$$Fc(u)Fc(-u) = -u . u\Pi\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right) = -u\frac{\sin(u\pi)}{\pi},$$
$$a = 1 \ldots\ldots \infty$$

oder, weil $Fc(u) = uFc(u+1)$ ist:

$$(25.)\qquad Fc(-u) = -\frac{\sin(u\pi)}{\pi Fc(1+u)};$$

daher ist

$$(26.)\quad f\left(1,-\frac{1}{w},y\right) = (-1)^y\cdot\frac{Fc(1+w-y)}{w^y Fc(1+w)}\cdot\frac{\sin(w\pi)}{\sin(w-y)\pi}\cdot\frac{\varphi(-w+y)}{\varphi(-w)},$$

oder, wenn man

$$(-1)^u\frac{\sin(u\pi)}{\varphi(-u)} = \psi(u)$$

setzt, wo dann $\psi(u)$, eben wie $\varphi(u)$, die Eigenschaft hat, dass

$$(27.)\qquad \psi(u+1) = \psi(u)$$

ist:

$$(27_{a}.)\quad f\left(1,-\frac{1}{w},y\right) = 1^y\cdot\frac{Fc(1+w-y)}{w^y Fc(1+w)}\cdot\frac{\psi(w)}{\psi(w-y)}.$$

Nun hat man ferner:

$$(28.)\qquad \begin{aligned} Fc(u) &= u(u+1)(u+2)\dots(u+n-1)\,Fc(u+n),\\ Fc(1) &= 1.\,2.\,3\dots(n-1)\,Fc(n), \end{aligned}$$

wenn n eine *ganze positive* Zahl bedeutet. Nach (10) ist $Fc(1) = 1$, also

$$\frac{Fc(n)}{n\;Fc(u+n)}\cdot Fc(u) = n^{-u}\cdot\frac{u(u+1)\dots\dots(u+n-1)}{1.2\dots\dots(n-1)};$$

woraus, mit Berücksichtigung von (15),

$$(29.)\qquad \underset{n=\infty}{\mathrm{Lim.}}\left\{\frac{Fc(n)}{n^u Fc(n+u)}\right\} = 1$$

folgt.

Es sei nun n die grösseste in w enthaltene ganze Zahl, und $w = n+w'$, so hat man:

$$\frac{Fc(w)}{w^u Fc(w+u)} = \left(\frac{Fc(n)}{n^{u+w'}Fc(n+w'+u)} : \frac{Fc(n)}{n^{w'}Fc(w'+n)}\right)\cdot\left(\frac{w'+n}{n}\right)^{-u},$$

mithin nach (29):

$$(30.)\qquad \underset{w=+\infty}{\mathrm{Lim.}}\left\{\frac{Fc(w)}{w^u Fc(w+u)}\right\} = 1.$$

Eben so ist, weil

$$\frac{Fc(1+w-u)}{w^u Fc(1+w)} = \left(1 : \frac{Fc(1+w)}{(1+w)^{-u}.Fc(1+w-u)}\right)\cdot\left(\frac{1+w}{w}\right)^u \text{ ist,}$$

$$(31.)\qquad \underset{w=+\infty}{\mathrm{Lim.}}\left\{\frac{Fc(1+w-u)}{w^u Fc(1+w)}\right\} = 1,$$

folglich, gemäss (24, 27):

$$(32.)\quad \begin{cases} \lim\limits_{w=+\infty} f\left(1, \frac{1}{w}, y\right) = 1^y \lim\limits_{w=+\infty} \left\{ \frac{\varphi(w+y)}{\varphi(w)} \right\}, \\ \lim\limits_{w=+\infty} f\left(1, -\frac{1}{w}, y\right) = 1^y \lim\limits_{w=+\infty} \left\{ \frac{\psi(w)}{\psi(w+y)} \right\}. \end{cases}$$

Es sind aber $\frac{\varphi(w+y)}{\varphi(w)}$ und $\frac{\psi(w)}{\psi(w-y)}$ beides *periodische* Functionen von w, und können als solche, wenn w ohne Ende zunimmt, keiner bestimmten Grenze sich nähern, wenn sie sich nicht etwa auf *Constanten* reduciren. Soll Dies für jeden Werth von y geschehen, so müssen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ selber von u unabhängig sein. Das ist aber, weil

$$\psi(u) = (-1)^u \frac{\sin(u\pi)}{\varphi(-u)}$$

ist, für beide gleichzeitig nicht möglich. Mithin können sich die Functionen

$$f(1, +x, y) \text{ und } f(1, -x, y),$$

wenn x unendlich klein wird, in keinem Falle *beide* einer bestimmten Grenze nähern; womit die obige Behauptung, dass $f(u, x, y) = u^y\ f(1, \frac{x}{u}, y)$, wenn x vom Positiven zum Negativen übergeht, stets eine Unterbrechung der Stetigkeit erleide, gerechtfertigt ist.

3.

Aus dem Vorhergehenden ist zugleich zu ersehen, dass man eine Bestimmung der Function, wie sie zur vollständigen Definition von $f(u, x, y)$ noch nöthig ist, erhält, wenn man festsetzt, es solle sich $f(1, x, y)$, entweder für einen *positiven*, oder für einen *negativen* Werth von x, wenn derselbe ohne Ende abnimmt, der Grenze 1^y nähern. *Eine* dieser Annahmen ist, wie sich ergeben wird, nothwendig, wenn die Analogie der Facultäten mit den Potenzen so viel als möglich behauptet werden soll.

Bei der *ersten* Annahme muss sich $\varphi(u)$ auf eine Constante reduciren; und wenn man die Function, in welche alsdann $f(u, x, y)$ übergeht, durch $(u+x)^y$ bezeichnet, so hat man:

$$(33.)\quad (u, +x)^y = x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}.$$

Hiernach bedeutet $(u, +x)^y$ eine Function von u, x, y, welche den Gleichungen

$$
(34.)\quad \begin{aligned}
(u, + x)^{y+k} &= (u, + x)^y (u + yx, + x)^k \\
(ku, + kx)^y &= k^y\, (u, + x)^y \\
(u, + x)^1 &= u
\end{aligned}
$$

genügt, und zugleich die Eigenschaft hat, dass sich $(1, + x)^y$ der Grenze 1^y nähert, wenn x, stets positiv bleibend, ohne Ende abnimmt.

Bei der *zweiten* Annahme muss $\psi(u) = (-1)^u \frac{\sin(u\pi)}{\varphi(-u)}$ eine *Constante* sein. Dann hat man:

$$
f(u, -x, y) = (-x)^y \cdot \frac{Fc(-\frac{u}{x})}{Fc(-\frac{u}{x} + y)} \cdot \frac{\varphi(-\frac{u}{x} + y)}{\varphi(-\frac{u}{x})} = x^y \cdot \frac{Fc(1 + \frac{u}{x} - y)}{Fc(1 + \frac{u}{x})}.
$$

Diesen besondern Ausdruck für $f(u, -x, y)$ will ich durch $(u, -x)^y$ bezeichnen; wobei *wohl* zu beachten ist, dass man in den Ausdrücken $(u, + x)^y$, $(u, -x)^y$ die Zeichen $(+)$ und $(-)$ vor x, nicht als zu x gehörige *Vorzeichen* betrachten darf, so dass also $(u, -x)^y$ keineswegs die Function bedeutet, in welche $(u, + x)^y$ übergeht, wenn $-x$ in x übergeht, welche vielmehr durch $(u, + (-x))^y$ auszudrücken wäre. Es soll vielmehr, ganz in dem Sinne des Urhebers dieser Bezeichnungsweise, durch das $(+)$ oder das $(-)$ vor dem x, nur angedeutet werden, dass x mit u in eine gewisse Verbindung trete, die in dem einfachsten Falle, wo y eine ganze positive Zahl und

$$
\begin{aligned}
(u, + x)^y &= u\,(u + x)\,(u + 2x) \ldots (u + (y-1)x) \quad \text{und} \\
(u, - x)^y &= u\,(u - x)\,(u - 2x) \ldots (u - (y-1)x)
\end{aligned}
$$

ist, in der That bei dem ersten Ausdrucke durch *Addition*, so wie bei dem andern durch *Subtraction* vermittelt wird.

Es ist also

$$
(35.)\qquad (u, -x)^y = x^y \cdot \frac{Fc(1 + \frac{u}{x} - y)}{Fc(1 + \frac{u}{x})},
$$

und es gelten für $(u, -x)^y$ die Grundgleichungen

$$
(36.)\quad \begin{aligned}
(u, - x)^{y+k} &= (u, - x)^y\, (u - yx, - x)^k, \\
(ku, - kx)^y &= k^y \,.\, (u, - x)^y, \\
(u, - x)^1 &= u,
\end{aligned}
$$

zu denen noch die Bestimmung tritt, dass sich $(1, -x)^y$ der Grenze 1^y nähert, wenn x, stets positiv bleibend, ohne Ende abnimmt.

Hierdurch sind nun *zwei* Arten von Facultäten auf völlig bestimmte Weise definirt, indem für beide analytische Ausdrücke gefunden sind, die für alle Werthe von u, x, y ihre Gültigkeit behalten. Es scheint zweckmässig, *beide* Formen

$$(u, + x)^y \text{ und } (u, - x)^y$$

beizubehalten, indem man, wenn die Differenz x *positiv* ist, vorzugsweise die *erstere*, im entgegengesetzten Falle aber lieber die *andere* anwendet. Sie hangen übrigens, wie aus (33) 35) ersichtlich, sehr einfach zusammen, indem

$$(37.) \qquad (u, - x)^y = (u - (y-1)\,x, + x)^y \text{ und}$$

$$(38.) \qquad (u, + x)^y = (u + (y-1)\,x, - x)^y$$

ist. Man hat ferner

$$(u, +(-x))^y = (-x)^y \cdot \frac{Fc(-\frac{u}{x})}{Fc(-\frac{u}{x}+y)} = (-x)^y \cdot \frac{Fc(1+\frac{u}{x}-y)}{Fc(1+\frac{u}{x})} \cdot \frac{\sin(\frac{u}{x})\pi}{\sin(\frac{u}{x}-y)\pi},$$

also

$$(39.) \qquad (u, +(-x))^y = (-1)^y \cdot \frac{\sin(\frac{u}{x})\pi}{\sin(\frac{u}{x}-y)\pi} \cdot (u, - x)^y;$$

woraus man sieht, dass $(u, +(-x))^y$ nur dann mit $(u, - x)^y$ gleichbedeutend ist, wenn y eine *ganze* Zahl ist.

Anm. Wenn man die in der Einleitung angegebene, von *Bessel* und *Ohm* aufgestellte Formel für die von ihnen durch $u^{y|x}$ bezeichnete Function entwickelt, so erhält man

$$u^{y|x} = (u, + x)^y,$$
$$u^{y|-x} = (u, - x)^y,$$

wenn in beiden Fällen x *positiv* ist. Hiernach kann, wie schon bemerkt, $u^{y|x}$ nicht für alle Werthe von x durch einen einzigen analytischen Ausdruck dargestellt werden; abgesehen davon, dass die Definition von $u^{y|x}$ nur für *reelle* Werthe von x gegeben ist. Ferner ist es zwar dadurch, dass für positive und negative Werthe von x verschiedene Definitionen gegeben werden, erreicht, dass für positive Werthe von u allerdings

$$\lim_{x=0} u^{y|x} = u^y$$

ist; sowohl wenn x *positiv*, als wenn x *negativ* ist. Es gilt aber diese Gleichung nicht mehr für negative Werthe von u; also auch nicht allgemein.

4.

Die bisherigen Erörterungen haben nun zwar zu einer unzweideutigen Definition von $(u,+x)^y$ und $(u,-x)^y$ geführt; es sind dazu aber *vier* Bestimmungen für jede dieser Functionen nöthig gewesen. Dies ist, wie schon aus den im Vorhergehenden ausgeführten Entwickelungen ohne Mühe nachgewiesen werden könnte, *mehr*, als nöthig. Ich werde daher jetzt zeigen, wie man, ausgehend von einer *ganz allgemeinen* Definition von $(u,+x)^y$ und $(u,-x)^y$, die für jede dieser Functionen nur *zwei* Bestimmungen giebt, auf völlig systematischem Wege zu den Darstellungen derselben durch die Formeln (33, 35) gelangt; wodurch zugleich die Grundgleichungen (34, 36) gegeben werden.

So wie sich der allgemeine Begriff der *Potenz* aus dem Begriffe eines *Products* von gleichen Factoren entwickelt hat, so bildet für die Facultätenlehre die Betrachtung eines *Products äquidifferenter Factoren* den Ausgangspunct. Nachdem nun, wenn y eine *ganze positive* Zahl bedeutet, das Product

$$u(u+x)(u+2x)\dots(u+(y-1)x)$$

durch $(u,+x)^y$ bezeichnet worden ist, findet man, auch ohne dass die Eigenschaften eines solchen Products weiter untersucht werden, indem

$$(u+x,+x)^y = \frac{u+yx}{u}\cdot(u,+x)^y$$

ist, die Differenzen-Gleichung

$$\text{(40.)}\qquad \frac{\Delta(u,+x)^y}{(u,+x)^y} = \frac{y\Delta u}{u},$$

wenn sich das Zeichen Δ auf u bezieht, und $\Delta u = x$ angenommen wird. Gleich wie nun die Betrachtung der *Differential-Gleichung*

$$\frac{df(u)}{f(u)} = \frac{y\,du}{u}$$

zu der Potenz u^y mit willkührlichem Exponenten führt, so kann man sich die Bestimmung einer Function von u zur Aufgabe stellen, welche der *Differenzen-Gleichung*

$$\text{(41.)}\qquad \frac{\Delta f(u)}{f(u)} = \frac{y\Delta u}{u}$$

bei einem beliebigen Werthe von y genügen soll.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt, wenn $\Delta u = x$ gesetzt wird:

$$f(u+x)-f(u)=\frac{yx}{u}f(u),$$

$$f(u+x)=\frac{u+yx}{u}f(u),$$

$$f(u)=\frac{u}{u+yx}f(u+x);$$

woraus, wenn n eine *ganze positive* Zahl bedeutet, weiter

$$f(u)=\frac{u(u+x)(u+2x)\ldots\ldots(u+(n-1)x)}{(u+yx)(u+yx+x)\ldots\ldots(u+(y+n-1)x)}\cdot f(u+nx),\text{ oder}$$

$$(42.)\quad f(u)=\frac{(u,+x)^n}{(u+yx,+x)^n}\cdot f(u+nx)$$

folgt. Wenn y eine *ganze* Zahl ist, so kann man, wie gezeigt, $f(u)=(u,+x)^y$ setzen. Dann hat man:

$$(u+nx,+x)^y=(u+nx)^y\cdot\left(1+\frac{x}{u+nx}\right)\left(1+\frac{2x}{u+nx}\right)\ldots\left(1+\frac{(y-1)x}{u+nx}\right),$$

also

$$\operatorname*{Lim.}_{n=\infty}\frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y}=1.$$

Dieser Umstand führt darauf, in der Gleichung (42) $n=\infty$ zu setzen und sie so zu schreiben:

$$(43.)\quad f(u)=\operatorname*{Lim.}_{n=\infty}\left\{(u+nx)^y\cdot\frac{(u,+x)^n}{(u+yx,+x)^n}\right\}\cdot\operatorname*{Lim.}_{n=\infty}\frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y}.$$

Es ist daher vor allen Dingen nöthig, genauer zu untersuchen, was aus der Formel

$$(u+nx)^y\cdot\frac{(u,+x)^n}{(u+yx,+x)^n}$$

wird, wenn die positive ganze Zahl n ohne Ende wächst.

Zu dem Ende schalte ich hier zunächst einige allgemeine Sätze über die *Convergenz der unendlichen Producte* ein. Dieselben sind zwar, so wie die damit verbundenen Sätze über die Convergenz einer bestimmten Gattung von unendlichen Reihen, zum grossen Theile bekannt. Ich glaube aber, wenn ich gleichwohl ausführlicher darauf eingehe, nicht nur wegen der ganz elementaren Herleitung derselben, die einiges Eigenthümliche haben dürfte, sondern vorzüglich deswegen auf Entschuldigung rechnen zu dürfen, weil ich überall bei den vorkommenden Grössen die Untersuchung nicht auf *reelle* Werthe derselben einschränken, sondern auch auf *complexe* (imaginäre) Werthe ausdehnen werde.

5.

Einige Sätze über die Convergenz und Divergenz unendlicher Producte.

I. Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe

$$u_0\ ,\ u_1\ ,\ u_2, \ldots \infty$$

sämmtlich reell, positiv und kleiner als Eins sind, und zugleich die Reihe eine endliche Summe hat, so convergiren die Producte

$$P_n = (1-u_0)(1-u_1)(1-u_2)\ldots(1-u_n)$$
$$Q_n = (1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n),$$

wenn n beständig zunimmt, beide gegen eine bestimmte, positive Gränze; und zwar das erste beständig *abnehmend*, das andere beständig *zunehmend*.

Es ist klar, dass P_n, Q_n beständig *positiv* sind, und dass die erste Grösse beständig *abnimmt*, die andere aber *zunimmt*, wenn n beständig wächst. Es ist daher zum Beweise des aufgestellten Satzes nur nöthig, zu zeigen, dass P_n stets grösser, und Q_n stets kleiner bleibt, als eine gewisse positive Grösse.

Es ist, wenn a, b, c, d ... reelle Grössen mit denselben Zeichen sind

$$(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab > 1+a+b$$
$$(1+a)(1+b)(1+c) > (1+a+b)(1+c) > 1+a+b+c$$
$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) > (1+a+b+c)(1+d) > 1+a+b+c+d$$

u. s. w.

Dies vorausgesetzt, werde $n = m+r$ gesetzt, wo auch m, r ganze positive Zahlen bedeuten sollen. Dann kann man, wenn E irgend einen echten positiven Bruch bedeutet, m so gross annehmen, dass die Summe

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+r}$$

für jeden Werth von r kleiner als E ist. Hierauf hat man

$$\frac{P_{m+r}}{P_m} = (1-u_{m+1})(1-u_{m+2})\ldots(1-u_{m+r})$$
$$> 1 - u_{m+1} - u_{m+2} - \ldots - u_{m+r} > 1 - E,$$

also

$$P_n > P_m(1-E), \text{ wenn } n > m;$$

was gezeigt werden sollte.

Ferner ist

$$\frac{1}{Q_n} = \left(1-\frac{u_0}{1+u_0}\right)\left(1-\frac{u_1}{1+u_1}\right)\cdots\left(1-\frac{u_n}{1+u_n}\right),$$

und da nun, wenn $n > m$, E auch kleiner als

$$\frac{u_{m+1}}{1+u_{m+1}} + \cdots\cdots + \frac{u_n}{1+u_n}$$

ist, so hat man:

$$\frac{1}{Q_n} > \left(1-\frac{u_0}{1+u_0}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{u_m}{1+u_m}\right)(1-E)$$

$$\frac{1}{Q_n} > \frac{1}{Q_m}(1-E) \quad , \quad Q_n < \frac{Q_m}{1-E}, \quad \text{wenn } n > m.$$

(II.) Wenn dagegen die Reihe

$$u_0 \ , \ u_1 \ , \ u_2, \cdots\cdots$$

keine endliche Summe hat, so wird, wenn n ohne Ende zunimmt, Q_n über jede Gränze hinaus wachsen, während P_n, beständig positiv bleibend und abnehmend, sich der Gränze Null nähert.

Es ist nämlich

$$P_n < 1 + u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n,$$

und die Summe $u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n$ wächst mit n über jede Gränze hinaus. Ferner ist

$$\frac{1}{Q_n} = \left(1+\frac{u_0}{1-u_0}\right)\left(1+\frac{u_1}{1-u_1}\right)\cdots\left(1+\frac{u_n}{1-u_n}\right),$$

und die Reihe $\frac{u_0}{1-u_0}$, $\frac{u_1}{1-u_1}$ u. s. w. hat ebenfalls keine endliche Summe. Es nimmt mithin $\frac{1}{Q_n}$, gleichzeitig mit n, ohne Ende zu; und zwar über jede Gränze hinaus; woraus folgt, dass Qn, beständig abnehmend, sich der Gränze Null nähern muss.

Zusatz. Setzt man $P_n = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$, so ist $P_n = \frac{1.2\ldots\ldots(n-1)}{2.3\ldots\ldots n} = \frac{1}{n}$, also $P_n = 0$, für $n = \infty$. Daraus geht hervor, dass die unendliche Reihe

$$\tfrac{1}{2} \ , \ \tfrac{1}{3} \ , \ \tfrac{1}{4} \ , \cdots\cdots, \frac{1}{n} \cdots\cdots$$

keine endliche Summe haben kann. Wird dagegen

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

gesetzt, so ist

$$P_n = \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdots\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n.n} = \frac{1.2\ldots\ldots(n-1)}{2.3\ldots\ldots n}\cdot\frac{3.4\ldots\ldots(n+1)}{2.3\ldots\ldots n} = \frac{n+1}{2n},$$

also $P_n = \frac{1}{2}$ für $n = \infty$. Mithin wird die unendliche Reihe

$$\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{9},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{n^2}\cdots\cdots$$

eine endliche Summe haben.

(III.) Wenn die Glieder der Reihe

$$u_0\ ,\ u_1\ ,\ u_2,\cdots\cdots$$

sämmtlich *reell* sind, und von einem bestimmten Gliede an beständig dasselbe Zeichen behalten und kleiner als Eins bleiben, so wird das Product

$$P_n = (1+u_0)\,(1+u_1)\cdots\cdot(1+u_n),$$

wenn n ohne Ende wächst, gegen eine bestimmte endliche Gränze (die nicht Null ist, sobald keine der Grössen u_0, $u_1,\cdots = -1$ ist) convergiren, wofern die Reihe $u_0, u_1,\cdots$ eine endliche Summe hat.

Wenn aber das Letztere nicht der Fall ist, so wird

$$P_n = \infty \text{ oder } P_n = 0 \text{ für } n = \infty$$

sein, je nachdem die Grössen u_0, $u_1,\cdots$, von einer bestimmten Grösse an, stets positiv oder stets negativ sind.

Alles dies folgt unmittelbar aus den beiden vorhergehenden Sätzen.

(IV.) Auch wenn die Glieder der unendlichen Reihe

$$u_0\ ,\ u_1\ ,\ u_2,\cdots\cdots\infty$$

complexe (imaginäre) Werthe haben und die Reihe, *unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder*, eine endliche Summe hat, nähert sich das Product

$$P_n = (1+u_0)\,(1+u_1)\cdots\cdots(1+u_n),$$

wenn n ohne Ende wächst, einer bestimmten Gränze, die von Null verschieden ist, wofern nicht eine der Grössen u_0, u_1, $= -1$ ist.

Es werde $u_n = v_n + iw_n$ und

$$(1+u_0)\,(1+u_1)\cdots\cdots(1+u_n) = p_n + iq_n,\ \sqrt{(p_n^2+q_n^2)} = s_n,$$

gesetzt, wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist. Dann hat man:

$$s_n = \sqrt{((1+v_0)^2+w_0^2)}.\sqrt{((1+v_1)^2+w_1^2)} \ldots\ldots \sqrt{((1+v_n)^2+w_n^2)}.$$

Nimmt man nun m so gross an, dass für jeden Werth von n, welcher $\geqq m$ ist, die Summe der absoluten Werthe von v_n und w_n weniger als 1 beträgt, so kann man

$$\sqrt{((1+v_n)^2+w_n^2)} = 1+v_n+\varepsilon_n w_n$$

setzen, wo ε_n dasselbe Zeichen wie w_n hat, dem absoluten Betrage nach aber kleiner als Eins ist. Bezeichnet man darauf den absoluten Werth von v_n durch v'_n, so liegt $\frac{s_n}{s_m}$, wenn $n > m$ ist, zwischen den Gränzen

$$(1-v_{m+1}-\varepsilon_{m+1}w_{m+1})(1-v'_{m+2}-\varepsilon_{m+2}w_{m+2}) \ldots\ldots (1-v'_n-\varepsilon_n w_n) \text{ und}$$
$$(1+v_{m+1}+\varepsilon_{m+1}w_{m+1})(1+v'_{m+2}+\varepsilon_{m+2}w_{m+2}) \ldots\ldots (1+v'_n+\varepsilon_n w_n)$$

Beide Producte nähern sich aber, wenn n ohne Ende wächst, zufolge des Satzes (I.), bestimmten positiven Gränzen: also bleibt der Werth von $\frac{s_n}{s_m}$, und daher auch der Werth von s_n oder $\sqrt{(p_n^2+q_n^2)}$, stets zwischen zwei endlichen Gränzen, wie gross auch n werden mag. Mithin muss es auch für jede der Grössen p_n, q_n Gränzen geben, welche die absoluten Werthe derselben nicht übersteigen können.

Nun ist aber

$$p_{n+1}+iq_{n+1} = (1+v_{n+1}+iw_{n+1})(p_n+iq_n) \text{ und}$$
$$p_{n+1}-p_n = v_{n+1}p_n - w_{n+1}q_n\,,\quad q_{n+1}-q_n = v_{n+1}q_n + w_{n+1}p_n;$$

woraus, wenn man statt n der Reihe nach m, $m+1, \ldots\ldots m+r$ setzt,

$$\begin{aligned} p_{m+r}-p_m &= +v_{m+1}p_m + v_{m+2}p_{m+1} + \ldots\ldots + v_{m+r}p_{m+r-1} \\ &\quad - w_{m+1}q_m - w_{m+2}q_{m+1} - \ldots\ldots - w_{m+r}q_{m+r-1} \\ q_{m+r}-q_m &= +v_{m+1}q_m + v_{m+2}q_{m+1} + \ldots\ldots + v_{m+r}q_{m+r} \\ &\quad + w_{m+1}p_m + w_{m+2}p_{m+1} + \ldots\ldots + w_{m+r}p_{m+r} \end{aligned}$$

folgt. Es hat aber jede der Reihen

$$v_0\,,\ v_1\,,\ v_2, \ldots\ldots$$
$$w_0\,,\ w_1\,,\ w_2\,, \ldots\ldots,$$

unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder, eine endliche Summe; und da die absoluten Werthe von p_n, q_n, wie gross auch n werden mag, gewisse Gränzen nicht übersteigen, so müssen auch die Reihen

$$p_0 v_0 \;,\; p_1 v_1, \ldots\ldots; \; p_0 w_0 \;,\; p_1 w_1; \ldots\ldots$$
$$q_0 v_0 \;,\; q_1 v_1, \ldots\ldots; \; q_0 w_0 \;,\; q_1 w_1, \ldots\ldots$$

endliche Summen haben. Folglich kann man m so gross werden lassen, dass für jeden Werth von r die Ausdrücke rechts in den vorstehenden Gleichungen, also auch $p_{m+r} - p_m$ und $q_{m+r} - q_m$, dem absoluten Werthe nach, kleiner als jede gegebene Grösse sind. Dadurch aber ist bewiesen, dass p_n, q_n nicht bloss endlich bleiben, wenn n ohne Ende wächst, sondern auch beide gegen bestimmte Gränzen convergiren. Ferner ist klar, dass diese Gränzen nicht beide Null sein können, weil sonst $s_n = \sqrt{(p_n^2 + q_n^2)}$ für $n = \infty$ ebenfalls $= 0$ sein würde; was, wie vorhin gezeigt, nicht der Fall ist, wofern nicht eine der Grössen u_0, $u_1 \ldots\ldots = -1$ ist. Dieser Fall aber kann ganz ausgeschlossen bleiben, weil dann P_n, für jeden Werth von n, von einem bestimmten Werthe an, gleich Null sein würde.

(V.) Nicht selten trifft man eine unendliche Reihe an, deren Glieder

$$u_0 \;,\; u_1 \;,\; u_2, \ldots\ldots u_n, \ldots\ldots$$

ein solches Gesetz befolgen, dass sich der Quotient $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ in eine (endliche oder unendliche) Reihe von der Form

$$1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \ldots\ldots$$

entwickeln lässt, wo a_1, a_2, a_3, ... von n unabhängig sind, übrigens aber beliebige complexe Werthe haben können, auf die Weise, dass

$$\left.\begin{array}{l} \text{Lim.}\, n\left(\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1\right) = a_1 \\ \text{Lim.}\, n^2\left(\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1 - \frac{a_1}{n}\right) = a_2 \\ \text{Lim.}\, n_3\left(\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1 - \frac{a_1}{n} - \frac{a_2}{n_2}\right) = a_3 \end{array}\right\} \text{für } n = \infty$$

u. s. w. ist.

Wenn in diesem Falle a_μ die erste der Grössen a_1, a_2, ... ist, welche nicht verschwindet, so dass

$$\underset{n=\infty}{\text{Lim.}}\, n^\mu \left(\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1\right) = a_\mu$$

ist, und es ist *erstens* $\mu > 1$, so wird u_n, wenn n ohne Ende zunimmt, gegen eine bestimmte, endliche und von Null verschiedene Gränze convergiren. Wird dieselbe durch u bezeichnet, so kann man ferner

$$u_n = u + \frac{v_n}{n^{\mu-1}}$$

setzen, wo v_n eine Grösse ist, die endlich bleibt, wie gross auch n werden mag.

Setzt man
$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{k_n}{n^\mu},$$
so erhält man
$$u_r = u_0\left(1+\frac{k_1}{1^\mu}\right)\left(1+\frac{k_2}{2^\mu}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{k_n}{n^\mu}\right).$$

Nun ist aber $\operatorname{Lim}_{n=\infty} k_n = a_\mu$; es bleibt mithin k_n endlich, wie gross auch n werden mag. Daraus folgt, dass die Reihe

$$\frac{k_1}{1^\mu},\ \frac{k_2}{2^\mu},\ldots\ldots,\frac{1}{n^\mu},\ldots\ldots\infty,$$

unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder, eine endliche Summe hat, weil Dies für die Reihe

$$1,\ \frac{1}{2^\mu},\ \frac{1}{3^\mu},\ldots\ldots,\frac{1}{n^\mu},\ldots\ldots$$

gilt, wie es bereits für $\mu = 2$ im Zusatze zu (No. II.) gezeigt wurde, und daher auch feststeht, wenn $\mu > 2$ ist. Damit ist aber nach (No. III.) erwiesen, dass u_n für $n = \infty$ einen bestimmten endlichen, von Null verschiedenen Werth annimmt.

Bei diesem Beweise ist allerdings vorausgesetzt worden, dass keine der Grössen u_0, u_1, ... gleich Null sei; der Satz bleibt aber auch gültig, wenn Dies nur für alle die Grössen, von einer bestimmten Grösse an, Statt findet. Denn es sei die Grösse die m^{te}, so setze man $n = m + r$; dann ist

$$\frac{u_{m+r}}{u_{m+r-1}} = 1 + \frac{a_\mu}{(r+m)^\mu} + \frac{a_{\mu+1}}{(r+\mu)^{\mu+1}} + \ldots\ldots$$

woraus, sobald $r > m$ ist,

$$\frac{u_{m+r}}{u_{m+r-1}} = 1 + \frac{a_\mu}{r_\mu} + \frac{a'_{m+1}}{r_\mu} + \ldots\ldots$$

folgt, wo a_μ, $a'_{\mu+1}$, ... von r unabhängig sind. Mithin bekommt u_{m+r} für $r = \infty$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth.

Ist nun
$$\operatorname{Lim.}_{n=\infty} u_n = u,$$
so setze man $u^n = v_n + iw_n$, $k_n = g_n + ih_n$; alsdann hat man:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{g_n + ih_n}{n^\mu}(v_n + iw_n),\ \text{und}$$

daher, wenn man $g_n v_n - h_n w_n = p_n$, $g_n w_n + h_n v_n = q_n$ setzt,

$$u_n - u_{n+1} = -\frac{p_{n+1} + iq_{n+1}}{(n+1)^\mu}.$$

Substituirt man nun der Reihe nach $n+1$, $n+2, \ldots n+r-1$ statt n, wo r irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, und addirt die so entstehenden Gleichungen zu der vorstehenden, so ergiebt sich:

$$u_n - u_{n+r} = -\frac{p_{n+1} + iq_{n+1}}{(n+1)^\mu} - \ldots\ldots - \frac{p_{n+r} + iq_{n+r}}{(n+r)^\mu},$$

oder auch, wenn

$$\sigma_{n,r} = \frac{1}{(n+1)^\mu} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+r)^\mu}$$

ist, und $P_{n,r}$ einen Mittelwerth zwischen der grössten und der kleinsten der Grössen $p_{n+1}, \ldots\ldots, p_{n+r}$, und eben so, $Q_{n,r}$ einen Mittelwerth zwischen der grössesten und kleinsten der Grössen $q_{n+1}, \ldots\ldots, q_{n+r}$ bezeichnet:

$$u_n - u_{n+r} = -(P_{n,r} + iQ_{n,r}).\sigma_{n,r}.$$

Lässt man nun r ohne Ende wachsen, während n constant bleibt, so nähert sich u_{n+r} der Gränze u; eben so nähert sich $\sigma_{n,r}$ einer Gränze, die durch σ_n bezeichnet werden möge, und deshalb müssen auch $P_{n,r}$, $Q_{n,r}$ gegen bestimmte Gränzen convergiren; welche P_n, Q_n sein mögen. Man erhält daher

$$u_n = u - \sigma_n (P_n + iQ_n),$$

und es ist klar, dass P_n, Q_n endlich bleiben, wie gross auch n werden mag, da Dies für g_n, h_n, v_n, w_n, also auch für p_n, q_n, der Fall ist, und also Gränzen sich müssen angeben lassen, die $P_{n,r}$ und $Q_{n,r}$ und mithin auch P_n, Q_n, dem absoluten Werthe nach, nicht übersteigen können. Ferner ist

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{1}{(n+1)^\mu} + \frac{1}{(n+2)^\mu} + \frac{1}{(n+3)^\mu} + \ldots\ldots \infty \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\mu-2}} + \frac{1}{(n+2)^2 (n+2)^{\mu-2}} + \ldots\ldots \infty, \\
&\overline{\gtrless} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\ldots\right) \cdot \frac{1}{(n+1)^{\mu-2}} \\
&\overline{\gtrless} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right) \cdot \frac{1}{n^{\mu-2}}, \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots\right) \cdot \frac{1}{n^{\mu-2}} \\
&= \frac{1}{n^{\mu-1}}.
\end{aligned}$$

Man kann also $\sigma_n = \frac{\varepsilon_n}{n^{\mu-1}}$ setzen, wo ε_n ein echter Bruch ist, und wenn man $\varepsilon_n(P_n + iQ_n)$ durch $-v_n$ bezeichnet, so hat man:

$$u_n = u + \frac{v_n}{n^{\mu-1}},$$

und es bleibt v_n *endlich*, wie gross auch n werden mag.

(VI.) Wenn aber *zweitens* a_1 nicht Null ist, so sind drei Fälle zu unterscheiden.

(A.) Ist der reelle Theil von a_1 *positiv*, so wird u_n unendlich gross für $n = \infty$;

(B.) Ist der reelle Theil von a_1 *Null*, so bleibt zwar u_n endlich, wie gross auch n werden mag, nähert sich aber, wenn n beständig zunimmt, keiner bestimmten Gränze.

(C.) Ist der reelle Theil von a_1 *negativ*, so wird $u_n = 0$ für $n = \infty$.

Es sei $a_1, = g + hi$ und es werde

$$p_n = \left(1 + \frac{g}{m}\right)\left(1 + \frac{g}{m+1}\right)\dots\left(1 + \frac{g}{m+n}\right),$$
$$q_n = \left(1 + \frac{hi}{m}\right)\left(1 + \frac{hi}{m+1}\right)\dots\left(1 + \frac{hi}{m+n}\right)$$

gesetzt, wo m eine ganze positive Zahl bedeuten soll, die dem absoluten Werthe nach grösser als g, sowohl als auch h ist. Dann hat man:

$$\frac{u_n}{p_n q_n} : \frac{u_{n-1}}{p_{n-1}.q_{n-1}} = \frac{u_n}{u_{n-1}}.\frac{p_{n-1}.q_{n-1}}{p_n.q_n}$$
$$= \left(1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots\right)\left(1 + \frac{g}{n+m}\right)^{-1}\left(1 + \frac{hi}{n+m}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + \frac{a_1}{n} + \dots\right)\left(1 - \frac{g}{n} + \dots\right)\left(1 - \frac{hi}{n} + \dots\right)$$
$$= 1 + \frac{a'_2}{n^2} + \dots,$$

wo a'_2 u. s. w. von n unabhängig ist. Mithin convergirt, nach dem vorhergehenden Satze, $\frac{u_n}{p_n q_n}$, wenn n beständig zunimmt, gegen eine bestimmte endliche und von Null verschiedene Gränze, und man kann

$$\frac{u_n}{p_n.q_n} = v + \frac{v}{n}, \text{ also}$$
$$u_n = p_n.q_n.\left(v + \frac{v_n}{n}\right),$$

setzen, wo ϱ von n unabhängig ist, ϱ_n aber stets endlich bleibt.

Setzt man $q_n = q'_n + iq''_n$, so hat man:

$$q'_n q'_n + q''_n q''_n = \left(1+\frac{h^2}{m^2}\right)\left(1+\frac{h^2}{(m+1)^2}\right) \cdots\cdots \left(1+\frac{h^2}{(m+n)^2}\right),$$

und es nähert sich diese Grösse, nach (No. I.), wenn n ohne Ende wächst, einer bestimmten, von Null verschiedenen Gränze, weil die Reihe

$$\frac{h^2}{m^2}, \quad \frac{h^2}{(m+1)^2}, \cdots\cdots$$

eine endliche Summe hat. Mithin bleiben auch q'_n und q''_n stets endlich.

Bezeichnet man $\frac{h}{m+n}$ durch t_n, so hat man:

$$q'_n + iq''_n = (1+it_n)(q'_{n-1} + iq''_{n-1}),$$

also

$$q'_n - q'_{n-1} = -t_n q''_{n-1}, \quad q''_n - q''_{n-1} = t_n q'_{n-1}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen statt n der Reihe nach n, $n+1, \cdots\cdots, n+r$ und addirt sie dann, so erhält man:

$$q'_{n+r} - q'_{n-1} = -(t_n + t_{n+1} + \cdots\cdots + t_{n+r-1})\, q''_{n,r}$$
$$q''_{n+r} - q''_{n-1} = (t_n + t_{n+1} + \cdots\cdots + t_{n+r-1})\, q'_{n,r};$$

wo $q'_{n,r}$ einen Mittelwerth der Grössen $q'_{n-1}, q'_n, \cdots, q'_{n+r-1}$, und $q''_{n,r}$ einen Mittelwerth der Grössen $q''_{n-1}, q''_n, \cdots\cdots, q''_{n+r-1}$

bedeutet. Nun bleiben aber die Werthe der Grössen links in diesen Gleichungen stets endlich, während die Summe

$$t_n + t_{n+1} + \cdots\cdots + t_{n+r-1} = \frac{h}{m+n} + \frac{h}{m+n+1} + \cdots\cdots + \frac{h}{m+n+r-1},$$

wenn r wächst und n constant bleibt, über jede Gränze hinaus zunimmt. Daher müssen $q'_{n,r}$, $q''_{n,r}$ beide sich der Null nähern, wenn r ohne Ende zunimmt, n aber unverändert bleibt.

Es werde nun n so gross angenommen, dass die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern der Reihe $q'_{n-1}, q'_n, q'_{n+1}, \cdots\cdots \infty$, dem absoluten Betrage nach, kleiner sei als eine beliebig angenommene, noch so kleine Zahl E; was möglich ist, weil $q'_{n+r} - q'_{n+r-1} = -t_{n+r}\, q''_{n+r-1}$, und t_{n+r} beliebig klein werden kann, wenn nur n gross genug angenommen wird, während q''_{n+r-1} stets endlich bleibt. Ferner sei r so gross, dass auch der absolute Betrag von

$q'_{n,r}$ kleiner als E ist. Haben dann in der Reihe $q'_{n-1}, q'_n, q'_{n+r-1}$ sämmtliche Glieder dasselbe Zeichen, so ist $q'_{n,r}$ dem absoluten Betrage nach grösser als das kleinste derselben; dieses muss daher von Null weniger verschieden sein, als E. Im entgegengesetzten Fall aber muss es zwei *unmittelbar* auf einander folgende Glieder von verschiedenen Zeichen geben, und da die Differenz derselben kleiner als E ist, so folgt, dass jedes von ihnen kleiner als E ist. Man sieht also, dass man, wenn man in der Reihe $q'_0, q'_1, \ldots$, von irgend einem Gliede aus weiter geht, stets auf eins kommen muss, das dem absoluten Betrage nach noch kleiner als jede gegebene Grösse ist. Dasselbe gilt für die Reihe $q''_0, q''_1, \ldots$.

Nun nähert sich aber der Werth von $q'_n q'_n + q''_n q''_n$, wenn n beständig zunimmt, einer bestimmten Gränze G; und wenn daher wieder E eine beliebige kleine Zahl ist, so muss man, ausgehend von einem beliebigen Gliede der Reihe $q_0, q_1, \ldots$ unter den folgenden stets auf eins kommen, für welches die Bedingungen

$$q'_n q'_n + q''_n q''_n \begin{matrix} > G - E \\ < G + E \end{matrix} \quad \text{und}$$
$$q''_n q''_n < E$$

erfüllt werden. Dann hat man $q'_n q'_n \begin{matrix} > G - 2E \\ < G + E \end{matrix}$; d. h. es muss auf jedes Glied der Reihe $q'_0, q'_1, \ldots$, wie weit vom Anfange entfernt es auch sei, stets wieder ein solches Glied folgen, welches seinem absoluten Betrage nach der Gränze $\sqrt{G}$ beliebig nahe kommt. Dasselbe gilt von den Gliedern der Reihe $q''_0, q''_1, \ldots$; und somit ist erwiesen, dass sich q_n, wenn n beständig wächst, keiner bestimmten Gränze nähert, sondern sowohl der reelle, als auch der imaginäre Theil dieser Grösse, zwischen zwei verschiedenen endlichen Gränzen *schwankt.*

Für das Product p_n folgt unmittelbar aus (Nr. I), in Verbindung mit dem Umstande, dass die Reihe

$$\frac{g}{m}, \quad \frac{g}{m+1}, \ldots, \frac{g}{m+n}, \ldots$$

keine endliche Summe hat:

$$\lim_{n=\infty} p_n = \infty \quad , \quad \text{wenn } g \text{ positiv ist und}$$
$$\lim_{n=\infty} p_n = 0 \quad , \quad \text{wenn } g \text{ negativ ist.}$$

Aus der Formel

$$u_n = \left(\varrho + \frac{v_n}{n}\right) p_n . q_n$$

ergiebt sich jetzt ohne Weiteres Folgendes.

1. Wenn g *positiv* ist, so wird der analytische Modul von u_n unendlich gross für $n = \infty$;
2. Wenn g *negativ* ist, so wird derselbe unendlich klein für $n = \infty$;
3. Wenn $g =$ *Null* ist, so nähert sich derselbe, wenn n beständig zunimmt, zwar einer bestimmten Gränze; aber da dann $u_n = v q_n + \frac{v_n q_n}{n}$ und $\lim\limits_{n=\infty} \frac{v_n q_n}{n} = 0$ ist, so convergirt u_n selbst, gegen keinen bestimmten Werth, sondern *schwankt*.

Anm. Unter der hier absichtlich vermiedenen Voraussetzung der Lehre von den *Potenzen* mit beliebigen Exponenten, lässt sich der vorstehende Satz viel kürzer begründen. Denn es ist

$$\frac{u_n}{n^{g+hi}} : \frac{u_{n-1}}{(n-1)^{g+hi}} = \frac{u_n}{u_{n-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{g+hi} = \left(1+\frac{g+hi}{n}+\dots\right)\left(1-\frac{g+hi}{n}+\dots\right)$$
$$= \left(1+\frac{a_2'}{n_2}+\dots\right),$$

folglich nähert sich, wenn n ohne Ende zunimmt, $\frac{u_n}{n^{g+hi}}$ nach (Nr. 5) einer bestimmten, von Null verschiedenen Gränze; und wenn man dieselbe durch v bezeichnet, so kann man

$$\frac{u_n}{n^{g+hi}} = v + \frac{v_n}{n},$$

oder

$$u_n = n^g \cdot \left(v + \frac{v_n}{n}\right)[\cos(h \log n) + i \sin(h \log n)];$$

setzen, wo v_n stets endlich bleibt. Aus dieser Formel folgt der zu beweisende Satz unmittelbar.

(VII.) Wenn wieder

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{g+hi}{n} + \frac{a_2}{n_2} + \dots,$$

ist, so weiss man, dass die Summe

$$\text{(A.)} \qquad u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n,$$

wenn n ohne Ende zunimmt, gegen eine bestimmte endliche Gränze *convergirt*, sobald der analytische Modul von x *kleiner* als 1 ist; so wie auch, dass sie *divergirt*, wenn der genannte Modul *grösser* als 1 ist. Beides gilt

auch, wenn t_n den analytischen Modul von u_n, ξ den von x bedeutet, für die Summe

$$(\text{B.}) \qquad t_0 + t_1\xi + t_2\xi^2 + \cdots\cdots + t_n\xi^n.$$

Ist aber der analytische Modul von x gleich 1, so finden folgende Sätze Statt.

1. Die Summe (A) *convergirt*, wofern nicht $x = 1$ ist, sobald g *negativ*, die Summe (B) aber nur, wenn $g < -1$ ist.
2. Wenn aber $x = 1$ ist, so *convergirt* (A), und dann gleichzeitig auch (B), nur dann, wenn $g < -1$ ist; sie bleibt zwar endlich, wie gross auch n werden mag, wenn $g = -1$ und $h \gtrless 0$ ist, sie *schwankt* aber, und divergirt in jedem andern Falle.
3. Beide Reihen *divergiren*, wenn $g \geqq 0$ ist, indem dann weder $u_n x^n$, noch $t_n \xi^n$, für $n = \infty$ unendlich klein werden.

Da der analytische Modul von x der Einheit gleich sein soll, so ist die Summe (B) gleich

$$t_0 + t_1 + \cdots\cdots + t_n.$$

Ferner, wenn

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{g+hi}{n} + \frac{g'+h'i}{n^2} + \cdots\cdots$$

ist, so ist

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \sqrt{\left\{\left(1 + \frac{g}{n} + \frac{g'}{n^2} + \cdots\cdots\right)^2 + \left(\frac{h}{n} + \frac{h'}{n^2} + \cdots\cdots\right)^2\right\}}$$

$$= 1 + \frac{g}{n} + \cdots\cdots$$

Setzt man nun, indem m eine ganze positive Zahl bedeutet, die dem absoluten Betrage nach grösser als g ist, wieder

$$p_n = \left(1 + \frac{g}{m}\right)\left(1 + \frac{g}{m+1}\right)\cdots\cdots\left(1 + \frac{g}{m+n}\right),$$

so kann man, wie in (Nr. IV) gezeigt wurde,

$$t_n = \left(t + \frac{t'_n}{n}\right)p_n$$

setzen, wo t von n unabhängig ist, t'_n aber stets endlich bleibt. Nun ist

$$p_n - p_{n-1} = \frac{g}{m+n} \cdot p_{n-1},$$

$$(m+n).p_n - (m+n-1).p_{n-1} = (g+1).p_{n-1}.$$

Setzt man in dieser Gleichung statt n, der Reihe nach $1, 2, \ldots\ldots, n$, so erhält man, durch Zusammenziehung der so entstehenden Gleichungen:

$$(m+n)p_n - mp_0 = (g+1)(p_0 + p_1 + \ldots\ldots + p_{n-1}).$$

Aus dieser Gleichung aber ist zu sehen, dass es, wofern nicht $g+1=0$ ist, zur Convergenz der Summe

$$p_0 + p_1 + \ldots\ldots + p_{n-1}$$

hinreichend und nothwendig ist, dass $(m+n)p_n$ einer bestimmten Gränze sich nähere, wenn n beständig zunimmt. Dies kann aber, da

$$\frac{(m+n)p_n}{(m+n-1)p_{n-1}} = \left(1+\frac{g}{n+m}\right)\left(1-\frac{1}{m+n}\right)^{-1}$$
$$= \left(1+\frac{g}{n}+\ldots\ldots\right)\left(1+\frac{1}{n}+\ldots\ldots\right) = 1+\frac{g+1}{n}+\ldots\ldots,$$

ist, nur dann geschehen, wenn $g+1$ *negativ* ist, (indem der Fall $g+1=0$ ausgeschlossen ist), wo dann $(m+n)\,p_n$ für $n=\infty$ (gemäss No. VI.) zu Null wird.

Ist $g+1=0$, so hat man

$$p_n = \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{m+n}\right) = \frac{m-1}{m+n} \text{ und}$$

$$p_0 + p_1 + \ldots\ldots + p_n = (m-1)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\ldots\ldots+\frac{1}{m+n}\right).$$

Diese Summe ist aber (No. II. Zus.) divergent. Mithin ist es zur Convergenz der Summe

$$p_0 + p_1 + \ldots\ldots + p_n$$

nothwendig und hinreichend, dass $g < -1$ sei.

Nun ist aber

$$t_0 + t_1 + \ldots\ldots + t_n = t_0 + t(p_1 + \ldots\ldots + p_n) + (1'_1 p_1) + \tfrac{1}{2}(t'_2 p_2) + \ldots\ldots + \frac{t'_n p_n}{n}.$$

Wenn daher $g < -1$ ist, so wird auch $t_0 + t_1 + \ldots\ldots + t_n$ convergiren, indem $(t'_1 p_1) + \frac{1}{2}(t'_2 p_2) + \ldots\ldots + \frac{t'_n p^n}{n}$ gleichzeitig mit $p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n$ convergirt.

Wäre $g \geqq -1$, aber < 0, so würde von diesen beiden letzten Summen die erste divergiren, die andere aber, da

$$\frac{p_n}{n} \cdot \frac{p_{n-1}}{n-1} = \frac{p_n}{p_{n-1}} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{g}{n}+\ldots\ldots\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{g-1}{n}+\ldots\ldots$$

ist, noch convergiren; folglich würde auch $t_0 + t_1 + \ldots\ldots + t_n$ divergiren. Dasselbe

findet Statt, wenn $g \geqq 0$ ist, weil dann t_n für $n = \infty$ nicht unendlich klein wird. Man sieht also, dass die Reihe (B) convergirt, oder divergirt, je nachdem $g < -1$ ist, oder nicht.

Hinsichtlich der Summe (A) ist es zur Convergenz zunächst erforderlich, dass $\lim\limits_{n=\infty} . t_n = 0$ sei, weshalb $g < 0$ sein muss. Dies vorausgesetzt, werde

$$\left(1 + \frac{g+hi}{m}\right)\left(1 + \frac{g+hi}{m+1}\right) \cdots\cdots \left(1 + \frac{g+hi}{m+n}\right) = P_n$$

gesetzt, so hat man:

$$\frac{u_n}{P_n} : \frac{u_{n-1}}{P_{n-1}} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{P_{n-1}}{P_n} = \left(1 + \frac{g+hi}{n} + \frac{a_2}{n_2} + \cdots\cdots\right)\left(1 + \frac{g+hi}{n+m}\right)^{-1}$$
$$= 1 + \frac{a'_2}{n_2} + \cdots\cdots$$

Mithin kann man (nach No. IV)

$$u_n = P_n\left(\varrho + \frac{w_n}{n}\right),$$

setzen, wo wieder ϱ von n unabhängig ist, w_n aber stets endlich bleibt. Ferner sei

$$s_n = u_1 x + u_2 x^2 + \cdots\cdots + u_n x^n$$
$$S_n = P_1 x + P_2 x^2 + \cdots\cdots + P_n x^n$$
$$S'_n = w_1 . P_1 x + \tfrac{1}{2} w_2 . P_2 x^2 + \cdots\cdots + \frac{w_n}{n} \cdot P_n x^n;$$

dann hat man

$$s_n = \varrho S_n + S'_n.$$

Nun ist $\frac{P_n}{n} : \frac{P_{n-1}}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{g+hi}{n}\right) = 1 + \frac{g-1+hi}{n} + \cdots\cdots,$

und da $g - 1 < -1$ ist, so convergirt, wenn man durch Q_n den analytischen Modul von P_n bezeichnet, nach dem vorher Bewiesenen die Summe

$$\tfrac{1}{1} Q_1 + \tfrac{1}{2} Q_2 + \cdots\cdots + \frac{Q^n}{n},$$

und daher auch, indem $x^n w_n$ stets endlich bleibt, S'_n. Daraus folgt, dass s_n *convergirt*, *schwankt*, oder *divergirt*, je nachdem das Eine oder das Andere mit S_n der Fall ist.

Es ist aber

$$(1-x) S_n = P_1 x + (P_2 - P_1) x^2 + (P_3 - P_2) x^3 + \cdots\cdots + (P_n - P_{n-1}) x^{n-1} - P_n x^{-1}$$
$$= P_1 x + (g + hi) \cdot \left\{\frac{P_1}{m+2} \cdot x + \frac{P_2 x^2}{m+3} + \cdots\cdots + \frac{P_{n-1}}{m+n} \cdot x^{n-1}\right\} \cdot x - P_n . x^{n+1}.$$

Die eingeklammerte Summe convergirt; was gerade so gezeigt wird, wie für S'_n, und $\operatorname{Lim}_{n=\infty} P_n = 0$, weil g negativ angenommen worden; folglich wird auch $(1-x)S_n$, und, wenn nicht $1-x=0$, auch S_n convergiren.
Die Summe (A) convergirt also stets, wenn $g<0$, und nicht $x=1$ ist.

In diesem Ausnahmfalle ist

$$S_n+P_0 = P_0+P_1+\dots\dots+P_n = \frac{(m+n+1).P_{n+1}-m.P_0}{g+hi+1};$$

wie es sich unmittelbar aus der im Vorhergehenden gefundenen Formel für die Summe $p_0+p_1+\dots\dots+p_{n-1}$ ergiebt, wenn man in derselben $g+hi$ für g und $n+1$ statt n setzt. Es wird daher, wofern nicht etwa $g=-1$ und zugleich $h=0$ ist, S_n convergiren, wenn sich $(m+n+1)P_{n+1}$, bei beständig zunehmendem Werthe von n, einer bestimmten Gränze nähert. Dies kann, da

$$\frac{(m+n+1).P_{n+1}}{(m+n).P_n} = \left(1+\frac{g+hi}{n+1}+\dots\dots\right)\left(1+\frac{m+1}{n}\right)\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-1}$$
$$= 1+\frac{g+1+hi}{n}+\dots\dots,$$

ist, nur geschehen, wenn $g+1<0$ ist, indem der Fall $g+1=0$, $h=0$ ausgeschlossen ist.

Ist $g+1=0$ und $h=0$, so ist die Divergenz der Summe $P_0+P_1+\dots\dots+P_n$ bereits im Vorhergehenden bewiesen.

Folglich convergirt, wofern $x=1$ ist, die Summe (A) nur, gleichzeitig mit der Summe (B), wenn $g<-1$ ist.

Wenn $g=-1$ und $h \gtrless 0$, so bleibt der Werth von $(m+n+1)\,P_{n+1}$ nach (No. VI.) zwar stets endlich, nähert sich aber keiner bestimmten Gränze. Dasselbe gilt also auch von S_n und von der Summe (A).

Wenn endlich $g>-1$, also $g+1>0$ ist, so wird der Werth von $(m+n+1)\,P_{n+1}$ unendlich gross für $n=\infty$. Mithin divergirt in diesem Falle S_n, und auch die Summe (A).

Damit ist der aufgestellte Satz in allen seinen Theilen erwiesen.

Anm. 1. Setzt man statt u_n den in der Anm. zu (No. VI) gegebenen Ausdruck $u_n = \frac{u}{n^{g+hi}}+\frac{v_n}{n^{g+1+hi}}$, so ist leicht zu sehen, dass die Summe (A) gleichzeitig mit der folgenden:

$$1+x+\frac{x^2}{2^{g+hi}}+\frac{x^3}{3^{g+hi}}+\dots\dots+\frac{x^n}{n^{g+hi}}$$

convergirt, *schwankt*, oder *divergirt*.

Anm. 2. Die Sätze (V. bis VII.) stimmen, wenn man den in ihnen vorkommenden Grössen nur reelle Werthe beilegt, im Wesentlichen mit denen überein, welche *Gauss* in der Abhandlung: „Disquisitiones generales circa seriem infinitam"

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\cdot x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2.\gamma(\gamma+1)}\cdot x^2+\ldots\ldots\text{"}$$

begründet hat. Mit der hier gegebenen Erweiterung dienen sie für eine grosse Menge von unendlichen Producten und Reihen, die in der Analysis vorkommen, zur Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz derselben. Aus diesem Grunde habe ich sie hier ausführlicher entwickelt, als grade für den nächsten Zweck nöthig gewesen wäre. Uebrigens würden sie sich ohne Mühe noch bedeutend verallgemeinern lassen.

6.

Jetzt zurückkehrend zu der Gleichung (43, §. 4), gebe ich derselben, da

$$\frac{(u,+x)^n}{(u+yx,+x)^n}=\frac{u.(u+x)(u+2x)\ldots\ldots(u+(n-1)x)}{(u+yx)(u+yx+x)\ldots\ldots(u+(y+n-1)x)},$$

$$=\frac{\frac{u}{x}\cdot(1+\frac{u}{x})(1+\frac{u}{2x})\ldots\ldots(1+\frac{u}{(n-1)x})}{(\frac{u+yx}{x})(1+\frac{u+yx}{x})(1+\frac{u+yx}{2x})\ldots\ldots(1+\frac{u+yx}{(n-1)x})}$$

und $\underset{n=\infty}{\text{Lim.}}\left\{\frac{(u+nx)^y}{(nx)^y}\right\}=1^y$ ist, indem ich

$$n^{n-u}u(1+u)(1+\tfrac{1}{2}u)\ldots\ldots\left(\frac{u}{n-1}\right)=F(u,n) \tag{44.}$$

setze, die Form:

$$f(u)=x^y.\,\text{Lim.}\left\{\frac{F(\frac{u}{x},n)}{F(\frac{u}{x}+y,n)}\right\}\cdot\underset{n=\infty}{\text{Lim.}}\left\{\frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y}\right\}. \tag{45.}$$

Nun ist

$$\frac{F(u,n)}{F(u,n-1)}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-u}\cdot\left(1+\frac{u}{n-1}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^u\cdot\left(1+\frac{u}{n-1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{u}{n}+\frac{u(u-1)}{2n^2}\ldots\ldots\right)\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u}{n^2}+\ldots\right)$$

$$=1-\frac{u(u-1)}{2n^2}+\ldots\ldots,$$

also convergirt $F(u,n)$, wenn n ohne Ende zunimmt, gemäss (No. V. §. 5), gegen

eine bestimmte endliche Gränze, welchen Werth auch u haben mag. Bezeichnet man die Gränze, die eine Function von u ist, durch $Fc\,(u)$, so hat man:

$$(46.)\quad Fc(u) = \underset{n=\infty}{Lim.}\left\{n^{-u}.u\left(1+u\right)\left(1+\tfrac{1}{2}u\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)\right\},$$

oder

$$(47.)\quad Fc(u) = u\,\Pi\cdot\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{u}\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}$$
$$\alpha = 1 \ldots\ldots \infty.$$

Es zeigt sich aus diesen Formeln zugleich, dass $Fc\,(u)$ nur verschwindet, wenn u der Null, oder einer negativen ganzen Zahl gleich ist. Hiernach ist

$$\underset{=\infty}{\text{Lim.}}\frac{F(\frac{u}{x},n)}{F(\frac{u}{x}+y,n)} = \frac{F(\frac{u}{x})}{F(\frac{u}{x}+y)},$$

und es muss daher, wenn es wirklich eine Function $f(u)$ giebt, die der Gleichung (41) genügt, auch $\frac{f(u+nx)}{(u+nx)y}$ einer bestimmten Gränze sich nähern, wenn n beständig zunimmt; wenigstens insofern nicht $Fc\left(\frac{u}{x}\right)=0$ ist. Bezeichnet man diese Gränze durch $\psi(u)$, so erhellet, dass

$$(48.)\qquad \psi(u+x) = \psi(u)$$

sein muss, indem $\underset{n=\infty}{\text{Lim.}}\frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y} = \underset{n=\infty}{\text{Lim.}}\frac{f(u+x+nx)}{(u+x+nx)^y}$ ist. Dann erhält man

$$(49.)\qquad f(u) = x^y\cdot\frac{Fc(\frac{u}{x})}{Fc(\frac{u}{x}+y)}\cdot\psi(u).$$

Umgekehrt lässt sich nun erweisen, dass jede Function von u, welche durch diese Formel dargestellt wird, wenn nur $\psi(u,\,x)$ die in der Gleichung (46) ausgesprochene Eigenschaft hat, der Gleichung (41) genügt. Denn es ist

$$uF(u+1,n) = n^{-u-1}.\frac{(u+1)(u+2)\ldots\ldots(u+n)}{1\,.\,2\ldots\ldots(n-1)} = \frac{u+n}{n}\cdot F(u,n),$$

woraus für $n=\infty$,

$$(50.)\qquad Fc(u) = u\;Fc(u+1)$$

folgt. Mithin ist

$$f(u+x) = x^y \cdot \frac{Fc(\frac{u}{x}+1)}{Fc(\frac{u}{x}+y+1)} \cdot \psi(u+x) = \frac{u+yx}{u} \cdot f(u),$$

oder

$$\frac{f(u+x)-f(u)}{f(u)} = \frac{yx}{u};$$

welches die Gleichung (4?) ist.

Um nun die Function $\psi(u)$ zweckmässig zu bestimmen, ist zu untersuchen, ob es so geschehen könne, dass $f(u)$ auch an der angeführten Eigenschaft von $(u, +x)^y$, für den Fall dass y eine ganze Zahl ist, nach welcher

$$\operatorname{Lim.}_{n=\infty} \frac{(u+nx, x)^y}{(u+nx)^y} = 1^y$$

ist, Theil nimmt. Wenn Dies sein soll, so muss man in Folge der Gleichung (45),

$$(51.)\ (u, +x)^y = x^y \cdot \frac{Fc(\frac{u}{x})}{Fc(\frac{u}{x}+y)}$$

definiren.

Nun ist in (§. 3) mittels der beiden, aus (50 und 46) folgenden Gleichungen

$$(52.)\qquad Fc(u) = u(u+1)\ldots\ldots(u+n-1)\,Fc(u+n)$$

$$(53.)\qquad Fc(1) = 1$$

gezeigt worden, dass

$$(54.)\qquad \operatorname{Lim.}_{n=\infty} \left\{\frac{n^{-u}Fc(n)}{Fc(u+n)}\right\} = 1$$

ist; wobei zu bemerken, dass hier, wie auch in (46), unter n^{-u} derjenige Werth der Potenz zu verstehen sei, welcher durch die Formel

$$n^{-u} = 1 - u\log n + \frac{u^2\log^2 n}{1.2} + \ldots\ldots$$

gegeben wird, wenn von den verschiedenen Werthen von $\log n$ der *reelle* Werth genommen wird; unter welcher Bedingung $Fc(u)$ zu einer *eindeutigen* Function von u wird.

Hiernach ist

$$(u+nx, +x)^y = x^y \cdot \frac{Fc(\frac{u}{x}+n)}{Fc(\frac{u}{x}+y+n)},$$

$$\frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y} = \frac{(nx)^y}{(u+nx)^y} \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x}+n\right)}{n^{-\frac{u}{x}} \cdot Fc(n)} \cdot \frac{n^{-\frac{u}{x}-y}.Fc(n)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y+n\right)};$$

mithin ist in der That:

$$(55.)\qquad \operatorname{Lim.}_{n=\infty}\left\{\frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y}\right\} = 1^y.$$

Hinsichtlich der Function $Fc(u)$ ist noch zu bemerken, dass sie durch die Gleichungen (50, 53, 54) vollständig bestimmt wird. Denn aus (50 und 53) folgt

$$Fc(u) = \frac{u(u+1)\ldots\ldots(u+n-1)}{1.2\ldots\ldots(n-1)} \cdot \frac{Fc(n)}{Fc(n+u)};$$

woraus sich mittels (54) die Formel (46) ergiebt.

Durch das Vorstehende sind also jetzt folgende Resultate erlangt.

I. Es giebt eine, und zwar *nur* eine, für alle Werthe der unbeschränkt veränderlichen Grösse a geltende, eindeutige und für keinen endlichen Werth von u unendlich werdende Function $Fc(u)$, welche die in den Gleichungen

$$(56.)\qquad \begin{cases} Fc(u) = uFc(u+1), \\ Fc(1) = 1 \text{ und} \\ \operatorname{Lim.}_{n=\infty}\left\{\dfrac{n^{-u}.Fc(n)}{Fc(u+n)}\right\} = 1 \end{cases}$$

ausgesprochenen Eigenschaften hat, und die durch die Formel

$$Fc(u) = u.\Pi_{a=1\ldots\ldots\infty}\left\{\left(\frac{a}{a+1}\right)^u \cdot \left(1+\frac{u}{a}\right)\right\}$$

dargestellt wird.

II. Es giebt eine, und zwar nur eine, von drei unbeschränkt veränderlichen Elementen, der Basis u, der Differenz x und dem Exponenten y abhängige und durch $(u,+x)^y$ bezeichnete Function, welche diejenigen Eigenschaften hat, welche die Gleichungen

$$(57.)\qquad \frac{\Delta(u,x)^y}{(u,+x)^y} = \frac{yx}{u}, \quad \text{oder} \quad (u+x,+x)^y = \frac{u+yx}{u}\cdot(u,+x)^y$$

aussprechen, in denen sich das Zeichen Δ auf u bezieht und $\Delta u = x$ ist; so wie durch

$$(58.)\qquad \operatorname{Lim.}_{n=\infty}\left\{\frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y}\right\} = 1^y,$$

wo n eine *ganze positive* Zahl bedeutet. Durch diese Gleichung wird die Function vollständig bestimmt. Ihr allgemeiner Ausdruck ist

$$(59.)\quad (u,+x)^y = x^y \cdot \frac{Fc(\frac{u}{x})}{Fc(\frac{u}{x}+y)},$$

oder

$$(60.)\quad (u,+x)^y = x^y \cdot \frac{u}{u+yx} \cdot \underset{\alpha=1 \ldots \infty}{\Pi} \cdot \left\{ \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^y \cdot \frac{u+\alpha x}{u+(y+\alpha)x} \right\}$$

Aus der Formel (59) ergeben sich dann, wie in (§. 1.) gezeigt, für $(u,+x)^y$ die Grundgleichungen

$$(61.)\quad (u,+x)^{y+k} = (u,+x)^y (u+yx,+x)^k, \quad (u,+x)^{y-k} = \frac{(u,+x)^y}{(u+(y-k)x,+x)^k},$$

$$(62.)\quad (ku,+kx)^y = k^y (u,+x)^y \text{ und}$$

$$(63.)\quad (u,+x)^1 = u,$$

aus welchen sich nun eine Reihe anderer, z. B.

$$(64.)\quad (u,+x)^0 = 1$$

$$(65.)\quad (u,+x)^{-y} = \frac{1}{(u-yx,+x)^y}$$

$$(66.)\quad (u,+x)^y = u(u+x)(u+2x)\ldots\ldots(u+(y-1)x)$$

$$(67.)\quad (u,+x)^{-y} = \frac{1}{u-x \,.\, u-2x \ldots\ldots u-yx}$$

wenn y ganz und positiv

$$(68.)\quad (u,+x)^y = \left(\frac{x}{w}\right)^y \cdot \frac{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}+y}}{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}},$$

wo v und w ganz beliebig sind, u. s. w. herleiten lassen; wie Dies in dem *Crelle*'schen „Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques" zu sehen.

Ich bemerke noch, dass die Formel (43), welche aus der Bestimmungsgleichung (57) folgt, durch das unendliche Product (60) zu dem Ausdrucke von $(u,+x)^y$ mittels der andern (58) unmittelbar führt, dessen Convergenz nach dem Satze (Nr. V §. 5) feststeht, sobald nicht $\frac{u}{x}+y$ Null oder eine *negative ganze* Zahl ist. Wenn aber $\frac{u}{x}+y = -m$ ist (unter m eine ganze positive Zahl, Null eingeschlossen, verstanden), so folgt aus (68), indem man $v=1$, $w=1$ setzt:

$$(u,+x)^y = \frac{x^y(1,+1)^{-m-1}}{(1,+1)^{-y-m-1}}$$

Aber $(1, +1)^{-m-1}$ ist nach (65) $= \frac{1}{0}$, so dass also die Form $\frac{1}{0}$, welche in diesem Falle das Product (60) annimmt, durch die Natur der Function $(u, +x)^y$ gefordert wird.

Nachdem auf diese Weise eine Definition der Facultät $(u, +x)^y$ gefunden ist, *die nicht mehr Bestimmungen enthält, als nöthig sind*, und die alsbald zu einem allgemeinen Ausdrucke, so wie zu den wichtigsten Eigenschaften derselben führt, gelangt man auf einem ganz ähnlichen Wege zu der andern Facultäten-Form $(u, -x)^y$; worunter, um wiederholt daran zu erinnern, nicht $(u, +(-x))^y$ verstanden werden soll.

Sie wird nämlich durch die beiden Gleichungen

$$(69.)\qquad \frac{\Delta(u, -x)^y}{(u, -x)^y} = -\frac{yx}{u}, \quad \text{und}$$

$$(70.)\qquad \text{Lim.}_{n=\infty} \left\{ \frac{(u+nx, -x)^y}{(u+nx)^y} \right\} = 1^y$$

definirt; wo aber jetzt $\Delta u = -x$ zu setzen ist.

Dann folgt aus (69):

$$\frac{(u-x, -x)^y - (u, -x)^y}{(u, -x)^y} = -\frac{yx}{u},$$

$$(u-x, -x)^y = \frac{u-yx}{u} \cdot (u, -x)^y,$$

und hieraus, indem man $u+x$ statt u setzt:

$$(u, -x)^y = \frac{u+(1-y)x}{u+x} \cdot (u+x, -x);$$

welche Gleichung zu der folgenden:

$$(u, -x)^y$$

$$= \frac{u+(1-y)x}{u+x} \cdot \frac{u+(2-y)x}{u+2x} \cdots\cdots \frac{u+(n-y)x}{u+nx} \cdot (u+nx, -x)^y$$

$$= \frac{\left(\frac{u}{x}+1-y\right)\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1-y}{1}\right)\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1-y}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1-y}{n-1}\right)}{\left(\frac{u}{x}+1\right)\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1}{1}\right)\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1}{n-1}\right)} \cdot (u+nx, -x)^y$$

führt. Setzt man jetzt $(u+nx, -x)^y$ statt

$$x^y \cdot \frac{(u+nx, -x)^y}{(u+nx)^y} \cdot \frac{n^{-\frac{u}{x}+y-1}}{n^{-\frac{u}{x}-1}} \cdot \left(\frac{nx}{u+nx}\right)^{-y},$$

und dann $n = \infty$, so erhält man, gemäss (70 und 46):

$$(71.)\qquad (u,-x)^y = x^y.\frac{Fc(\frac{u}{x}+1-y)}{Fc(\frac{u}{x}+1)},\quad \text{oder auch}$$

$$(72.)\qquad (u,-x)^y = x^y.\frac{u+x-yx}{u+x}.\underset{a=1\,\ldots\ldots\,\infty}{\Pi}.\left\{\left(\frac{a+1}{a}\right)^y.\frac{u+(a+1-y)x}{u+(a+1)x}\right\}.$$

Zugleich lässt sich aus der Formel (71) mittels der Eigenschaften der Function $Fc(u)$ ohne Weiteres beweisen, dass die durch dieselbe ausgedrückte Function $(u,-x)^y$ wirklich die in den Gleichungen (69, 70) ausgesprochenen Eigenschaften hat.

Es ergeben sich aus ihr für $(u,+x)^y$ die Grundgleichungen:

$$(73.)\ (u,-x)^{y+k} = (u,-x)^y(u-yx,-x)^k,\ (u,-x)^{y-k} = \frac{(u,-x)^y}{(u-(y-k)x,-x)^k},$$

$$(74.)\ (ku,-kx)^y = k^y(u,-x)^y,\quad \text{und}$$

$$(75.)\ (u,-x)^1 = u,$$

aus denen wieder die folgenden:

$$(76.)\ (u,-x)^0 = 1,$$

$$(77.)\ (u,-x)^{-y} = \frac{1}{(u+yx,-x)^y},$$

$$\left.\begin{array}{l}(78.)\ (u,-x)^y = u(u-x)(u-2x)\ldots\ldots(u-(y-1)x)\\ (79.)\ (u,-x)^{-y} = \dfrac{1}{(u+x)(u+2x)\ldots\ldots(u+yx)},\end{array}\right\}\ \text{wenn } y \text{ ganz und positiv ist.}$$

$$(80.)\ (u,-x)^y = \left(\frac{x}{w}\right)^y.\frac{(v,-w)^{\frac{v}{w}-\frac{u}{x}+y}}{(v,-w)^{\frac{v}{w}-\frac{u}{x}}}\ \text{u. s. w.}$$

hergeleitet werden*). Ferner hat man:

$$(81.)\qquad (u,-x)^y = (u+x-yx,+x)^y = \frac{1}{(u+x,+x)^{-y}}$$

$$(82.)\qquad (u,+x)^y = (u-x+yx,-x)^y = \frac{1}{(u-x,-x)^{-y}}.$$

*) Es ist hierbei zu bemerken, dass, obwohl $(u,-x)^y$ nicht gleich $(u,+(-x))^y$ ist, gleichwohl alle aus den Gleichungen (73—75) ohne Zuziehung von (70) folgenden Gleichungen aus den entsprechenden für $(u,+x)^y$ durch Verwandlung von x in $(-x)$ sich ergeben.

Setzt man endlich in (59) $u = x = 1$, und $u - 1$ für y, so findet sich

$$(83.)\qquad Fc(u) = \frac{1}{(1,+1)^{u-1}},$$

und wenn man in (71) $u = 0$, $x = 1$ und $-u + 1$ statt y setzt:

$$(84.)\qquad Fc(u) = (0,-1)^{1-u},$$

so dass also die *Factorielle* $Fc(u)$ selbst eine *Facultät* ist.

7.

Es ist oben angegeben worden, dass sich die Function $Fc(u)$ nach ganzen Potenzen von u in eine *beständig*, d. h. für alle reellen und imaginären Werthe von u convergirende Reihe entwickeln lasse; so wie, dass die Reihe, in welche man die Facultät $(u,+x)^y$ nach steigenden Potenzen der Differenz x entwickeln kann, *niemals* convergent ist. Es scheint mir nicht unangemessen, auf die Rechtfertigung beider Behauptungen näher einzugehen.

Zu dem Ende stelle ich hier noch einige Sätze über die Convergenz der unendlichen Reihen zusammen, welche hier, so wie auch im Folgenden, zur Anwendung kommen.

1. Wenn man eine unendliche Reihe von der Form

$$\Sigma\, a_{\alpha,\beta,}\ \ldots\ x^\alpha y^\beta \ldots\ldots$$

hat, wo $x, y \ldots\ldots$ veränderliche Grössen, und $\alpha, \beta, \ldots\ldots$ ganze Zahlen sind, von denen jede, unabhängig von den andern, alle Werthe von 0 bis $+\infty$ durchläuft, und es lässt sich nachweisen, dass die Glieder derselben, wenn für $x, y, \ldots\ldots$ bestimmte Werthe $x_0, y_0 \ldots\ldots$ gesetzt werden, endlich bleiben, wie gross auch $\alpha, \beta \ldots\ldots$ werden mögen: so convergirt die Reihe für alle Werthe von $x, y \ldots\ldots$, die, ihrem analytischen *Modul* nach, beziehlich kleiner als $x_0, y_0 \ldots\ldots$ sind, unbedingt.

Bezeichnet man nämlich die analytischen Moduln von

$$\begin{array}{llll} & a_{\alpha,\beta,}\ \ldots & x\,,\ y\,,\ \ldots\ldots & x_0\,,\ y_0\,,\ \ldots\ldots \\ \text{durch} & A_{\alpha,\beta,}\ \ldots\ldots & \xi\,,\ \eta\,,\ \ldots\ldots & \xi_0\,,\ \eta_0\,,\ \ldots\ldots \end{array}$$

so lässt sich, der Voraussetzung nach, eine (positive) Grösse G angeben, die grösser ist als

$$A_{\alpha,\beta,}\ \ldots\ldots\ \xi_0^\alpha\, \eta_0^\beta \ldots\ldots,$$

welche Werthe auch $\alpha, \beta \dots$ haben mögen. Alsdann ist der Modul von $a_{\alpha,\beta,} \dots$ kleiner als $G \zeta_0^{-\alpha} \eta_0^{-\beta} \dots$, also der Modul von $a_{\alpha,\beta,} \dots x^\alpha y^\beta \dots$ kleiner als $G \xi_0^{-\beta} \eta_0^\beta \dots \zeta^\alpha \eta^\beta$, und daher die Summe von beliebig vielen Gliedern der betrachteten Reihe kleiner als,

$$\Sigma G \xi_0^{-\alpha} \eta_0^{-\beta} \dots \xi^\alpha \eta^\beta \dots = \frac{G}{(1-\frac{\xi}{\xi_0})(1-\frac{\eta}{\eta_0}) \dots},$$

wofern $\zeta < \xi_0$, $\eta < \eta_0 \dots$; wodurch der aufgestellte Satz erwiesen ist.

Eine Reihe soll *unbedingt* convergent heissen, wenn sie es bei jeder beliebigen Anordnung ihrer Glieder bleibt.

(2.) Es seien die Glieder einer unendlichen Reihe

$$\varphi\ ,\ \varphi'\ ,\ \varphi''\ , \dots$$

Functionen beliebig vieler Veränderlichen $x, y \dots$, die sich nach ganzen positiven Potenzen von $x, y, \dots$ in Reihen entwickeln lassen. Ferner sollen $\psi, \psi', \psi'', \dots$ diejenigen Reihen bezeichnen, in welche die Reihen-Ausdrücke von $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots$ dadurch übergehen, dass jeder Coefficient derselben durch seinen analytischen Modul ersetzt wird.

Wenn nun für bestimmte positive Werthe $\xi, \eta, \dots$ von $x, y \dots$ die Reihen $\psi, \psi', \psi'' \dots$ sämmtlich convergiren, so wie auch ihre Summe

$$\psi + \psi' + \psi'' + \dots,$$

so ist Dasselbe auch der Fall mit der Summe

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' + \dots,$$

für alle Werthe von $x, y, \dots$, die, ihrem analytischen Modul nach, nicht grösser sind als $\xi, \eta, \dots$ Und wenn man durch $a_{\alpha,\beta,} \dots$, $a'_{\alpha,\beta,} \dots$, $a''_{\alpha,\beta,} \dots \dots$ die Coefficienten von $x^\alpha y^\beta \dots$ in den Reihen für $\varphi, \varphi'\ \varphi'' \dots$ bezeichnet und

$$a_{\alpha,\beta}, \dots + a'_{\alpha,\beta}, \dots + a''_{\alpha,\beta}, \dots + \dots = A_{\alpha,\beta}, \dots$$

setzt, so ist für die genannten Werthe von $x, y, \dots$ auch die Reihe

$$\Sigma A_{\alpha,\beta}, \dots x^\alpha y^\beta \dots$$

convergent, und gleich der Summe

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' + \dots$$

Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar aus dem vorhergehenden und aus dem Begriffe einer *unbedingt* convergenten Reihe.

(3.) Wenn die Reihen

$$\varphi = \Sigma a_{\alpha,\beta,}\cdots\cdots x^{\alpha}y^{\beta}\cdots\cdots \quad , \quad \varphi_1 = \Sigma b_{\alpha,\beta,}\cdots\cdots x^{\alpha}y^{\beta}\cdots\cdots$$

beide für alle Werthe von $x, y, \cdots\cdots$, die dem analytischen Modul nach kleiner als beziehlich $\xi, \eta, \cdots\cdots$ sind, convergiren, so ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze, dass auch die Reihen

$$\Sigma(a_{\alpha,\beta,}\cdots\cdots \pm b_{\alpha,\beta,}\cdots\cdots)x^{\alpha}, y^{\beta}\cdots\cdots$$
$$\Sigma(a_{\alpha',\beta',}\cdots\cdots b_{\alpha'',\beta'',}\cdots\cdots x^{\alpha}y^{\beta})$$
$$\alpha' + \alpha'' = \alpha \quad , \quad \beta' + \beta'' = \beta, \cdots\cdots$$

für dieselben Werthe von $x, y \cdots\cdots$ convergent sind, und die Summe, die Differenz und das Product von φ und φ_1 darstellen.

Daraus ergiebt sich, als weitere Folgerung:

(4.) Wenn $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ beliebig viele Functionen von $x, y, \cdots\cdots$ sind, die sich nach ganzen positiven Potenzen dieser Grössen in Reihen entwickeln lassen, und F ist eine rationale und ganze Function von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$, so ist die Reihe, welche aus F durch Substitution jener Reihen für $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ und durch combinatorische Entwicklung nach Potenzen von $x, y \cdots\cdots$ hervorgeht, stets *unbedingt convergent*, und ihre Summe ist gleich F, für alle diejenigen Werthe von $x, y, \ldots$, für welche die Entwicklungen von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ es sämmtlich sind.

(5.) Ist aber F eine Function von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$, die sich in eine *unendliche* Reihe

$$\Sigma A_{\alpha,\beta,\gamma}\cdots\cdots \varphi^{\alpha}\varphi_1^{\beta}\varphi_2^{\gamma}\cdots\cdots$$

entwickeln lässt, und man setzt statt $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ ihre Reihen-Ausdrücke, so gelten, hinsichtlich der Convergenz der Reihe, die man aus der vorstehenden durch Entwicklung nach Potenzen von $x, y, \cdots\cdots$ erhält, folgende Bestimmungen.

(A.) Es convergire die ursprüngliche Reihe für F, sobald $\varphi, \varphi_1, \cdots\cdots$ ihrem analytischen Modul nach kleiner sind als beziehlich $\varrho, \varrho_1, \cdots\cdots$, und es seien $\psi, \psi_1 \cdots\cdots$ die Reihen, in welche $\varphi, \varphi_1 \cdots\cdots$ übergehen, wenn man jeden Coefficienten derselben durch seinen analytischen Modul ersetzt; ferner sei $f(x, y, \cdots\cdots)$ die Reihe, in welche F durch die angegebene Substitution übergeht, und $\xi, \eta, \cdots\cdots$ seien wieder die Moduln von $x, y, \cdots\cdots$: alsdann convergirt $f(x, y, \cdots\cdots)$ und es besteht die Gleichung

$$F(\varphi, \varphi_1, \cdots\cdots) = f(x, y, \cdots\cdots)$$

jedenfalls für alle Werthe von x, y, ..., die den Bedingungen

$$\psi(\xi, \eta, \ldots\ldots) < \varrho \quad , \quad \psi_1(\xi, \eta, \ldots\ldots) < \varrho_1 \ldots\ldots$$

Genüge leisten. Wenn daher $\varphi(0, 0, \ldots\ldots)$, $\varphi_1(0, 0, \ldots\ldots)$, ... ihrem Modul nach kleiner als ϱ, ϱ_1, ... sind, so wird die Reihe $f(x, y, \ldots\ldots)$ wenigstens für alle Werthe von x, y, ..., welche die bestimmten Gränzen nicht überschreiten, convergiren.

(B.) (Convergirt die Reihe, in welche F nach Potenzen von φ, φ_1, ... entwickelt werden kann, für alle Werthe dieser Grössen, so convergirt die Reihe $f(x, y, \ldots\ldots)$ und es besteht die Gleichung

$$f(x, y, \ldots\ldots) = F(\varphi, \varphi_1, \ldots\ldots)$$

für alle diejenigen Werthe von x, y, ..., für welche die Reihen-Entwicklungen von φ, φ_1, ... sämmtlich unbedingt convergiren.

Anm. Es ist wohl zu bemerken, dass die vorstehenden Sätze (2 — 5) nicht unbedingt *umgekehrt* werden können, so dass man z. B. behaupten dürfte, es convergire $f(x, y, \ldots\ldots)$ *nur* für solche Werthe von $x, y, \ldots\ldots$, für welche Dies bei den Ausdrücken von φ, φ_1, ... durch die Reihen der Fall ist. Sie geben daher, obgleich bei vielen Untersuchungen ein nützlicher Gebrauch von ihnen gemacht werden kann, keineswegs die wahren Criterien, nach welchen über die Convergenz von Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen einer oder mehrerer Veränderlichen fortschreiten, entschieden werden könnte. Diese Criterien müssen vielmehr aus einer andern Quelle abgeleitet werden; wie ich Solches bei einer andern Gelegenheit zu zeigen gedenke. Ich erlaube mir nur, als ein Haupt-Ergebniss meiner Untersuchungen über diesen Gegenstand, folgenden allgemeinen Satz hier anzuführen.

Es seien $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ als Functionen einer unabhängigen veränderlichen Grösse x durch ein System von n Differential-Gleichungen

$$F\left(x_1, x_2 \ldots\ldots, \frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \frac{d^2x_1}{dx^2}, \frac{d^2x_2}{dx^2}, \ldots\ldots\right) = 0,$$

$$F_1\left(x_1, x_2, \ldots\ldots, \frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \frac{d^2x_1}{dx^2}, \frac{d^2x_2}{dx^2}, \ldots\ldots\right) = 0$$

u. s. w.

definirt, wo F, F_1, ... ganze Functionen von x_1, x_2, ... und deren Differential-Coefficienten, die bis zu einer beliebigen Ordnung ansteigen können, bezeichnen, und es seien

$$\varphi_1(x)\,,\ \varphi_2(x)\,,\ \cdots\cdots,\ \varphi_n(x)$$

unendliche Reihen von der Form $\Sigma a_\alpha x^\alpha$, welche, statt $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ in die aufgestellten $\alpha = 0 \cdots\cdots \infty$ Differential-Gleichungen gesetzt, denselben *formell* Genüge leisten: so werden diese Reihen, wenn nicht für beliebige, doch stets für alle solche Werthe von x sämmtlich unbedingt convergiren, die, ihrem analytischen Modul nach, einen bestimmten Gränzwerth g nicht erreichen. Sie stellen dann continuirliche Functionen von x dar, welche die Differential-Gleichungen wirklich befriedigen. Der genannte Grenzwerth ist aber der Modul eines solchen Werthes von x, in dessen Nähe eine der Functionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots\cdots$, $\varphi_n(x)$, oder einer ihrer Differential-Coefficienten, unendlich gross wird.

Fügt man zu diesem Satze, der auf alle algebraischen Differential-Gleichungen Anwendung findet, und unter einigen Modificationen auch noch gilt, wenn an die Stelle von F_1, F_2, $\cdots\cdots$ überhaupt eindeutige Functionen von x_1, x_2, $\cdots$, $\frac{dx_1}{du}$, $\frac{dx_2}{du}$, $\cdots\cdots$ treten, die für keine Werthe dieser Grössen unendlich werden noch einen zweiten hinzu, der die Bedingungen angiebt, unter welchen die in Rede stehenden Reihen, für solche Werthe von x, deren Modul gleich g ist, convergiren: so ist dadurch ein Mittel gegeben, um in zahlreichen Fällen die Gränzen der Convergenz einer unendlichen Reihe von der betrachteten Form, schon *vor* ihrer wirklichen Darstellung, mittels einer nähern Untersuchung des Characters der zu entwickelnden Grösse, festzusetzen; was besonders deshalb wichtig ist, weil man dann zur Bestimmung der Coefficienten jede passende Methode anwenden kann, ohne genöthigt zu sein, nachträglich aus dem Bildungsgesetze derselben die Convergenz-Bedingungen der Reihe zu ermitteln: ein Verfahren, welches überdies nur bei den einfacheren Reihenformen ohne Weitläufigkeit ausführbar ist.

Ich betrachte jetzt die Function $Fc(u)$, und beschränke die Veränderlichkeit von u zunächst auf solche Werthe von u, deren analytischer Modul kleiner als eine beliebig angenommene ganze positive Zahl m ist.

Man hat

$$Fc(u) = u \cdot \underset{\alpha=1\cdots m-1}{\Pi}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\} \cdot \underset{\alpha=m\cdots\infty}{\Pi}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}$$

Setzt man nun

$$\underset{\alpha=m\cdots\cdots\infty}{\Pi}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\} = \underset{\alpha=0\cdots\cdots\infty}{\Pi}\left\{\left(\frac{\alpha+m}{\alpha+m+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{\alpha+m}\right)\right\} = \varphi(u,m),$$

so ist

$$\log\varphi(u,m) = \underset{a=0\,\ldots\ldots\,\infty}{\Sigma}\left\{-u\log\left(1+\frac{1}{\alpha+m}\right)+\log\left(1+\frac{u}{\alpha+m}\right)\right\}.$$

$$= \underset{\alpha=0\,\ldots\ldots\,\infty}{\Sigma}\left\{\underset{a=2\,\ldots\ldots\,\infty}{\Sigma}\frac{(-1)^a(u^a-u)}{a(\alpha+m)^a}\right\}$$

Es sei ferner

$$\varphi^a(u) = \underset{a=2\,\ldots\ldots\,\infty}{\Sigma}\left(\frac{(-1)^a(u^a-u)}{a(\alpha+m)^a}\right);$$

und wenn man sämmtliche Coefficienten dieser Reihe durch ihren analytischen Modul ersetzt:

$$\psi_a(u) = \underset{a=2\,\ldots\ldots\,\infty}{\Sigma}\left(\frac{u^a+u}{a(m+\alpha)^a}\right),$$

so wird sich nach dem weiten der vorstehenden Sätze die Summe

$$\varphi_1(u)+\varphi_2(u)+\ldots\ldots+\varphi_n(u)+\ldots\ldots\infty$$

nach Potenzen von u in eine convergirende Reihe entwickeln lassen, sobald die Summe

$$\underset{\alpha=0\,\ldots\ldots\,\infty,\ a=2\,\ldots\ldots\,\infty}{\Sigma\Sigma}\left(\frac{u^a+u}{a(m+\alpha)^a}\right)$$

für positive Werthe von u einen endlichen Werth hat.

Nun ist aber

$$\underset{\alpha=0\,\ldots\ldots\,\infty}{\Sigma}\cdot\frac{1}{(m+\alpha)^a} = \frac{1}{m^a}\cdot\underset{\alpha=0\,\ldots\ldots\,\infty}{\Sigma}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^a},$$

und wenn man in der letztern Summe das $n$te Glied durch t_n bezeichnet:

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{n-1}{m}\right)^a}{\left(1+\frac{n}{m}\right)^a} = \frac{\left(1+\frac{m-1}{n}\right)^a}{\left(1+\frac{m}{n}\right)^a} = 1-\frac{a}{n}+\ldots\ldots.$$

Daher ist für $a>1$ die Reihe convergent (§. 5, VII, 1.); folglich ist, wenn $\underset{\alpha=0\ldots\infty}{\Sigma}\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^a} = s_a$ gesetzt wird,

$$\underset{\alpha=0\,\ldots\ldots\,\infty,\ a=2\,\ldots\ldots\,\infty}{\Sigma\Sigma}\left(\frac{u^a+u}{a(m+\alpha)^a}\right) = \underset{a=2\,\ldots\ldots\,\infty}{\Sigma}\left(\frac{(u^a+u)s_a}{am^a}\right);$$

und diese Reihe convergirt, weil $\frac{u}{m}$ kleiner als 1 ist und die Grössen $s_2, s_3, \dots$ eine abnehmende Reihe bilden.

Hiernach lässt sich nun $\log \varphi(u, m)$ nach ganzen Potenzen von u in eine convergirende Reihe entwickeln, und daher auch, nach dem fünften der obigen Sätze (Nr. B),

$$\underset{\alpha = m \dots \infty}{\Pi}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\} = e^{\log \varphi(u,m)}$$

Dasselbe ist für alle Werthe von u mit dem Producte

$$u\,\underset{\alpha = 1 \dots m-1}{\Pi}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\},$$

der Fall; und somit ergiebt sich, dass sich $Fc(u)$ nach ganzen positiven Potenzen von u in eine Reihe entwickeln lässt, welche für alle Werthe von u, deren Modul kleiner als m ist, convergirt. Nun kann aber die Zahl m beliebig gross angenommen werden: folglich muss die in Rede stehende Reihe für *alle* Werthe von u convergiren. Es ist daher $Fc(u)$ eine eindeutige Function von u, die, ganz wie e^u, $\sin u$, $\cos u$ u. s. w., für alle Werthe von u endlich und continuirlich ist.

Wenn der Exponent von $(u, +x)^y$ eine ganze positive Zahl ist, so lässt sich diese Grösse in eine endliche Reihe von der Form

$$u^y\left\{1+(y)_1\cdot\frac{x}{u}+(y)_2\cdot\frac{x^2}{u^2}+\dots\right\}$$

entwickeln, wo sich die Coefficienten $(y)_1, (y)_2, \dots$ als ganze Functionen von y ergeben. Nimmt man für y eine beliebige Zahl an, so verwandelt sich die vorstehende Formel in eine unendliche Reihe, und man hat, ähnlich, wie es sich bei der Binomial-Reihe bewährt, geschlossen, sie müsse auch in diesem Falle den Werth von $(u, +x)^y$ geben, sobald sie convergirt.

Dass sich Dies im Allgemeinen *nicht* so verhält, wenn man für $(u, +x)^y$ die oben aufgestellte Definition annimmt, ist leicht zu zeigen. Aber es scheint mir nicht unwesentlich, nachzuweisen, dass die in Rede stehende Reihe, wofern y keine ganze Zahl ist, niemals convergirt, welche Werthe man auch den Grössen u, x, y beilegen mag. Denn convergirte sie auch, und für alle Werthe von u, die eine bestimmte Grösse überschreiten, so könnte man sie zunächst für diese Werthe als Definition der Facultät benutzen, und dann leicht zu einer allgemeinen Bestimmung dieser Function gelangen.

Wenn eine Reihe von der Form

$$\sum_{\alpha=-\infty\ldots+\infty}(a_\alpha x^\alpha),$$

wo α eine veränderliche ganze Zahl bedeuten soll, für alle Werthe von x, deren analytischer Modul zwischen zwei Gränzen a und b liegt, convergirt, so giebt es, wofern man x auf irgend einen, ganz innerhalb dieser Gränzen liegenden Bereich beschränkt, in demselben stets nur eine *endliche* Anzahl von Werthen, für welche die Reihe den Werth Null annimmt; d. h., bestimmter ausgedrückt: wenn x_0 irgend ein besonderer Werth von x ist, c der Modul derselben, und d eine positive Grösse, die kleiner angenommen wird als die kleinste der Differenzen $c-a$, $b-c$, so kann von den Werthen von x, für welche der Modul von $x-x_0$ kleiner als d ist, nur eine endliche Anzahl die Summe der Reihe gleich Null machen. Der strenge Beweis dieses Satzes, von dem man bei manchen Untersuchungen Gebrauch machen kann, lässt sich aus den oben aufgestellten Convergenz-Sätzen ableiten; was ich jedoch hier der Kürze wegen übergehe.

Dies vorausgesetzt, werde in der obigen Formel (was unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann) $x=1$ gesetzt; für y werde irgend ein bestimmter Werth angenommen, während der Grösse u nur positive Werthe beigelegt werden. Angenommen nun, die Reihe convergire für irgend einen Werth u_0 von u, so wird es auch für jeden grössern Werth geschehen, und es ist unter dieser Voraussetzung

$$\varphi(u)=u^y.\left\{1+(y)_1\cdot\frac{1}{u}+(y)_2\cdot\frac{1}{u^2}+\ldots\ldots\right\}$$

eine continuirliche Function von u, wenn diese Grösse zwischen den Grenzen u_0 und $+\infty$ liegt.

Wenn y eine *ganze positive* Zahl ist, so hat man $\varphi(u+1)=\frac{u+y}{y}\varphi(u)$ also

$$(u+y).\{u^y+(y)_1u^{y-1}+(y)_2u^{y-2}+\ldots\ldots\}=u.\{(u+1)^y+(y)_1(u+1)^{y-1}+\ldots\ldots\}.$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung nach fallenden Potenzen von u, so müssen die Coefficienten der einen Reihe den gleichstelligen der andern für alle ganzzahligen Werthe von y gleich sein; woraus folgt, dass sie es auch für *alle* Werthe von y sein werden, weil sie nämlich sämmtlich ganze Functionen von y sind. Mithin muss die in der vorstehenden Gleichung ausgesprochene Relation

$$\varphi(u+1)=\frac{u+y}{u}\cdot\varphi(u)$$

überhaupt gelten, sobald nur beide Reihen convergiren; was bei den obigen Annahmen der Fall ist. Ferner ist

$$\operatorname*{Lim.}_{n=\infty}\left\{\frac{\varphi(u+n)}{(u+n)^y}\right\}=1^y.$$

(In der That gelangt man, wenn man die angedeutete Rechnung ausführt, zu den bekannten Ausdrücken von $(y)_1$ $(y)_2$, u. s. w.)

Vergleicht man diese beiden Relationen mit den beiden für $(u,+1)^y$ geltenden

$$(u+1,+1)^y=\frac{u+y}{u}\cdot(u,+1)^y \quad \text{und}$$

$$\operatorname*{Lim.}_{n=\infty}\left\{\frac{(u+n,+1)^y}{(u+n)^y}\right\}=1^y,$$

welche, wie gezeigt worden, zur Bestimmung dieser Function hinreichen, so ergiebt sich, dass

$$\varphi(u)=(u,+1)^y=1^y\cdot\frac{Fc(u)}{Fc(u+y)}$$

sein muss. Man hat daher

$$1^y.Fc(u)=u^y.Fc(u+y).\{1+(y)_1u^{-1}+(y)_2u^{-2}+\dots\},$$

für alle positiven Werthe von u, die grösser als u_0 sind.

Es sei nun y ein reeller Bruch $=\frac{\mu}{\nu}$, so erhebe man beide Seiten dieser Gleichung zur νten Potenz. Dies giebt

$$Fc(u)^{\nu}=u^{\mu}.Fc(u+y)^{\nu}.\left\{1+\left(\tfrac{\mu}{\nu}\right)_1u^{-1}+\left(\tfrac{\mu}{\nu}\right)_2u^{-2}+\dots\right\}^{\nu}$$

Beide Seiten dieser Gleichung lassen sich nach ganzen Potenzen von u in Reihen entwickeln, welche, den obigen Sätzen (4, 5) gemäss, nicht bloss für die erwähnten positiven Werthe von u, sondern überhaupt für alle, deren analytischer Modul grösser als u_0 ist, convergent sind. Sie müssen daher in ihren Coefficienten übereinstimmen, weil ihre Differenz sonst eine Function von u wäre, die für alle Werthe von u, welche positiv und $>u_0$ sind, verschwände; was nicht möglich ist. Sind aber die gleichstelligen Coefficienten auf beiden Seiten gleich, so muss die in Rede stehende Gleichung auch für alle Werthe von u richtig sein, für welche beide Reihen convergiren; namentlich also auch für alle negativen Werthe, die ihrem absoluten Werthe nach grösser als u_0 sind.

Nun werde für u eine negative ganze Zahl $(-n)$ angenommen, so ist $Fc(-n)=0$, nicht aber $Fc\left(-n+\frac{\mu}{\nu}\right)$; folglich muss

$$\left(1+\left(\frac{\mu}{\nu}\right)_1\cdot\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{\mu}{\nu}\right)_2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2-\dots\dots\right)$$

für jeden Werth von n Null sein, der $> u_0$ ist. Dies ist aber nicht möglich, und daher ist die Annahme, dass die Reihe

$$u^y(1+(y)_1 u^{-1}+(y)_2.u^{-2}+\dots\dots),$$

wenn die Coefficienten $(y)_1$, $(y)_2$, ... als ganze Functionen von y so bestimmt werden, wie es nöthig ist, damit sie für ganzzahlige Werthe von y, der Facultät $(u,+1)^y$ gleich wird, für irgend einen Werth von u convergire, sobald y ein Bruch ist, *unstatthaft.*

Damit soll jedoch keineswegs behauptet werden, dass die Differenz zwischen $(u,+1)^y$ und der Summe mehrerer der ersten Glieder der Reihe, wenn u ohne Ende wächst, nicht kleiner werden könne, als jede gegebene Grösse. Indessen leuchtet ein, dass sich aus der in Rede stehenden Reihe, hinsichtlich der Facultät $(u,+x)^y$, namentlich was das Verhalten derselben betrifft, wenn der Quotient $\frac{x}{u}$ unendlich klein wird, ohne Betrachtung des Ergänzungsgliedes, welches der Reihe hinzuzufügen ist, sobald man sie mit irgend einem Gliede abbricht, durchaus keine sicheren Schlüsse ziehen lassen. Ein brauchbarer Ausdruck dafür dürfte sich aber nur mit Schwierigkeit ermitteln lassen.

8.

Ich gehe jetzt zu den Entwicklungen von $(u+k,+x)^y$ und $(u+k,-x)^y$, so wie von $\log(u,+x)^y$ und $\log(u,-x)^y$ über, welche in dem erwähnten *Crelle*'schen „Mémoire" aus der daselbst als *allgemeine Taylor*sche Reihe aufgestellten Entwicklungsformel hergeleitet worden sind. In der Gestalt, wie sie dort gegeben sind, ist ihre Richtigkeit ausser Frage, indem sie *identische* Umgestaltungen der zu entwickelnden Functionen sind, und dem allgemeinen $n$ten Gliede jedesmal der ergänzende *Rest* beigefügt ist. Anwendbar sind sie jedoch nur, insofern sich dieses Ergänzungsglied um so mehr der Null nähert, je mehr Glieder der Reihe man nimmt. Ob Jenes der Fall sei, lässt sich in den meisten Fällen aus der Betrachtung des Ergänzungsgliedes selbst nur schwer erkennen, (es dürfte vielleicht möglich sein, den in Rede stehenden Rest durch ein *bestimmtes Integral* auszudrücken, welches eine leichtere Beurtheilung seines Betrages zuliesse), indem der am angeführten Orte zu diesem Zwecke aufgestellte Satz, wie es

von dem Verfasser selbst in einer spätern Abhandlung über denselben Gegenstand bemerkt worden ist, nur dann gilt, wenn die Reihe mit irgend einem Gliede *abbricht*. Aus dem blossen Umstande aber, dass die Summe der n ersten Glieder, wenn n ohne Ende wächst, sich einer bestimmten endlichen Gränze nähert, lässt sich bei Reihen von dieser Form nicht schliessen, dass die Reihe der zu entwickelnden Grösse *gleich* sei. Denn gesetzt, es sei für eine gewisse Function $F(x)$ und für bestimmte Werthe von x, k, a, wirklich

$$F(x+k) = F(x) + \underset{\nu=1 \cdots\cdots \infty}{\Sigma} \cdot \left\{ \frac{(k, -a)^\nu}{(1, +1)^\nu} \cdot \frac{\Delta^\nu F(x)}{a^\nu} \right\},$$

wo $\Delta x = a$ ist: so sei $\psi(x)$ eine Function von x, welche der Bedingung $\psi(x+a) = \psi(x)$ genügt. Dann würde die Reihe, die sich für $\psi(x+k) F(x+k)$ findet, indem

$$\Delta^\nu . \psi(x) . F(x) = \psi(x) \Delta^\nu . F(x)$$

ist, ebenfalls convergiren. Wollte man nun annehmen, es gebe dieselbe auch den Werth von

$$\psi(x+k) . F(x+k), \text{ so dass man also}$$

$$\psi(x+k) . F(x+k) = \psi(x) . F(x) + \psi(x) . \underset{\nu=1 \cdots\cdots \infty}{\Sigma} \left\{ \frac{(k, -a)^\nu}{(1, +1)^\nu} \cdot \frac{\Delta^\nu . F(x)}{a^\nu} \right\}$$

hätte, so müsste

$$\psi(x+k) = \psi(x)$$

sein, für jeden Werth von k, für welchen die erste Reihe convergirt; was nicht möglich ist, wenn man nicht für k bloss Vielfache von a nimmt, wo alsdann die Reihe eine endliche Zahl von Gliedern hat.

Wenn gleich hiernach die Benutzung der in Rede stehenden Entwicklungsformel in manchen Fällen nicht ohne Schwierigkeit ist, so bleibt sie doch jedenfalls ein treffliches Mittel, um auf einem natürlichen und directen Wege zu vielen Reihen-Ausdrücken zu gelangen; worauf dann die Untersuchung, inwiefern dieselben wirklich als Ausdrücke der zu entwickelnden Grössen anzusehen sind, auf eine dem jedesmaligen einzelnen Falle angepasste Weise anzustellen ist.

Für die Function $(u, +x)^y$ hat man, wenn man das Zeichen Δ auf u bezieht und $\Delta u = x$ setzt:

$$\Delta (u, +x)^y = yx \cdot \frac{(u, +x)^y}{u}.$$

Aber es ist $(u+x, +x)^{y-1} = (u+x, +x)^{-1} (u, +x)^y = \frac{(u, +x)^y}{u}$, also

$$(85.)\qquad \Delta(u,+x)^y = yx(u+x,+x)^{y-1}.$$

Durch mehrmalige Wiederholung derselben Operation folgt hieraus:

$$(86.)\qquad \Delta^n(u,+x)^y = x^n(y,-1)^n(u+nx,+x)^{y-n}.$$

Aber es ist $(u+nx,+x)^{y-n} = (u+nx,+x)^{-n}(u,+x)^y = \frac{(u,+x)^y}{(u,+x)^n}$, also

$$(87.)\qquad \Delta^n(u,+x)^y = x^n(y,-1)^n\frac{(u,+x)^y}{(u,+x)^n},\ \Delta u = x.$$

Für $(u,-x)^y$ hat man, wenn man in der Formel (69)

$$\frac{(u-x,-x)^y-(u,-x)^y}{(u,-x)^y} = -\frac{yx}{u}$$

$u+x$ statt u setzt:

$$\Delta(u,-x)^y = \frac{yx}{u+x}(u+x,-x)^y = yx(u,-x)^{y-1},$$

woraus weiter

$$(88.)\qquad \Delta^n(u,-x)^y = x^n(y,-1)^n(u,-x)^{y-n} = x^n$$
(für $\Delta u = x$)
$$= x^n(y,-1)^n.\frac{(u,-x)^y}{(u-yx+x,+x)^n}$$

folgt.

Die angeführte Entwicklungsformel giebt nun

$$(89.)\qquad (u+k,+x)^y$$
$$= (u,+x)^y\left\{1+\frac{yk}{u}+\frac{y(y-1)}{1.2)}.\frac{k(k-x)}{u(u+x)}+\ldots\ldots+\frac{(y,-1)^n}{(1,+1)^n}.\frac{(k,-x)^n}{(u,+x)^n}\right\}+R_n,$$

wo R_n das Ergänzungsglied bezeichnet, auf dessen Ausdruck es hier nicht weiter ankommt. Wenn y eine ganze positive Zahl ist, so bricht die Reihe mit dem y^{ten} Gliede ab und giebt den vollständigen Ausdruck für $(u+k,+x)^y$. In jedem andern Falle aber ist die Zahl ihrer Glieder unendlich, und es ist zu untersuchen: *erstens*, unter welchen Bedingungen sie dann eine endliche Summe habe; und *zweitens*, ob diese Summe wirklich $=(u+k,+x)^y$ sei.

Für den ersten Punct werde

$$\frac{(y,-1)^n}{(1,+1)^n}.\frac{(k,-x)^n}{(u,+x)^n} = t_n$$

gesetzt; dann ist

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{y-n+1}{n}\cdot\frac{k-nx+x}{u+nx-x} = \left(1-\frac{y-1}{n}\right)\left(1-\frac{k+x}{nx}\right)\left(1+\frac{u+x}{nx}\right)^{-1}$$

$$= 1 - \frac{y+\frac{u+k}{x}-1}{n} + \ldots\ldots$$

Die eingeklammerte Reihe, ins Unendliche fortgesetzt, hat nach dem Satze (§ 5, VII, 1) eine endliche Summe, sobald der *reelle* Theil von

$$\frac{u+k}{x} + y \text{ positiv ist.}$$

Nun ist, wenn $x = 1$ gesetzt wird,

$$\frac{(u+k,+1)^y}{(u,+1)^y} = \frac{(u,+1)^{y+k}}{(u,+1)^y(u,+1)^k}$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck durch $\varphi(u)$, so ergiebt sich

$$\varphi(u+1) = \frac{(u+y+k)u}{(u+y)(u+k)}\varphi(u) \quad (57.) \text{ und}$$

$$\operatorname{Lim.}_{n=\infty}\varphi(u+n) = 1 \qquad (58.)$$

Setzt man daher

$$\Sigma\left\{\frac{(y,-1)^\nu(k,-1)^\nu}{(1,+1)^\nu(u,+1)^\nu}\right\} = \varphi_1(u),$$

so ist zu untersuchen, ob für alle diejenigen Werthe von u, für welche die Reihe convergirt, ebenfalls die Relation

$$\varphi_1(u+1) = \frac{(u+y+k)u}{(u+y)(u+k)}\varphi_1(u)$$

sich ergebe. Erfolgt Dies, so hat man

$$\frac{\varphi_1(u+1)}{\varphi(u+1)} = \frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)};$$

woraus weiter, für jeden ganzzahligen Werth von n,

$$\frac{\varphi_1(u+1)}{\varphi(u+n)} = \frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)}$$

folgt. Setzt man nun $n = \infty$, so erhält man, indem auch

$$\varphi_1(u+n) = 1 \text{ ist, für } n = \infty:$$

$$\varphi_1(u) = \varphi(u), \text{ d. h.}$$

$$(90.)\quad \frac{(u,+1)^{y+k}}{(u,+1)^y(u,+1)^k}$$

$$=1+\frac{yk}{u}+\frac{y(y-1)k(k-1)}{1.2.u(u+1)}+\frac{y(y-1)(y-2)k(k-1)(k-2)}{1.2.3.u(u+1)(u+2)}+\dots\dots\infty;$$

für alle diejenigen Werthe von u, y, k, bei denen $u+y+k$ eine *positive*, oder auch eine *complexe* Grösse mit *positivem* reellem Theile ist. Wird dann $\frac{u}{x}$ statt u und $\frac{k}{x}$ statt k gesetzt, so ergiebt sich die Richtigkeit der Gleichung

$$(91.)\quad (u+k,+x)^y$$

$$=(u,+x)^y\left\{1+\frac{yk}{u}+\frac{y(y-1)k(k-x)}{1.2.u(u+x)}+\frac{y(y-1)(y-2)k(k-x)(k-2x)}{1.2.3.u(u+x)(u+2x)}+\dots\dots\right\}$$

für die angegebenen Werthe von u, x, y, k, für welche die Reihe convergirt.

Die fragliche Relation für $\varphi_1(u)$ lässt sich aber folgendermassen erweisen. Es sei

$$t_\nu=\frac{y(y-1)\dots\dots(y-\nu+1).k(k-1)\dots\dots(k-\nu+1)}{1.2\dots\dots\nu.u(u+1)\dots\dots(u+\nu-1)},\ t_0=1,$$

so dass

$$\varphi_1(u)=\sum_{\nu=0\dots\dots\infty}t_\nu$$

ist. Dann findet sich

$$\varphi_1(u+1)=u\sum_{\nu=0\dots\dots\infty}\frac{t_\nu}{u+\nu},$$

indem sich t_ν in $\frac{u}{u+\nu}t_\nu$ verwandelt, wenn $u+1$ statt u gesetzt wird. Nun ist aber

$$t_{\nu+1}=\frac{(y-\nu)(k-\nu)}{(\nu+1)(u+\nu)}t_\nu\quad,\quad\frac{t_\nu}{u+\nu}=\frac{\nu+1}{(y-\nu)(k-\nu)}t_{\nu+1},$$

also

$$\varphi_1(u+1)=\sum_{\nu=0\dots\dots\infty}\frac{(\nu+1)u.t_{\nu+1}}{(y-\nu)(k-\nu)}=\sum_{\nu=1\dots\dots\infty}\frac{\nu u.t_\nu}{(y-\nu+1)(k-\nu+1)}=\sum_{\nu=0\dots\dots\infty}\frac{\nu u.t_\nu}{(y-\nu+1)(k-\nu+1)},$$

indem in der letzten Reihe das Glied, für welches $\nu=0$ ist, sich auf Null reducirt. Es ist aber

$$\frac{\nu u}{(y-\nu+1)(k-\nu+1)}=\frac{u(y+1)}{(k-y)(y-\nu+1)}+\frac{u(k+1)}{(y-k)(k-\nu+1)},$$

und daher

$$\varphi_1(u+1)=\sum\frac{u(y+1)t_\nu}{(k-y)(y-\nu+1)}+\sum_{\nu=0\dots\dots\infty}\frac{u(k+1)t_\nu}{(y-k)(k-\nu+1)},$$

Ferner ist

$$(y-\nu)t_\nu = \frac{(\nu+1)(u+\nu)}{k-\nu}\,t_{\nu+1},$$

also
$$\underset{\nu=0\,\dots\,\infty}{\Sigma}(y-\nu)t_\nu = \underset{\nu=0\,\dots\,\infty}{\Sigma}\frac{(\nu+1)(u+\nu)t_{\nu+1}}{k-\nu} = \underset{\nu=0\,\dots\,\infty}{\Sigma}\frac{\nu(u+\nu-1)t_\nu}{k-\nu+1},$$

mithin
$$\Sigma\left(y-\nu-\frac{\nu(u+\nu-1)}{k-\nu+1}\right)t_\nu = 0.$$

Aber es ist
$$y-\nu-\frac{\nu(u+\nu-1)}{k-\nu+1} = (u+y+k)-\frac{(k+1)(u+k)}{k-\nu+1},$$

mithin
$$\Sigma(u+y+k)t_\nu - \Sigma\frac{(k+1)(u+k)}{k-\nu+1}t_\nu = 0, \text{ oder}$$

$$\Sigma\frac{(k+1)t_\nu}{k-\nu+1} = \frac{u+y+k}{u+k}\varphi_1(u).$$

Vertauscht man in dieser Gleichung k und y mit einander, so erhält man weiter:

$$\Sigma\frac{(y+1)t_\nu}{k-\nu+1} = \frac{u+y+k}{u+y}\varphi_1(u),$$

und, durch Verbindung beider Gleichungen, die zu beweisende Relation

$$\varphi_1(u+1) = \frac{u(u+y+k)}{(u+y)(u+k)}\varphi_1(u).$$

Die Formel (90), eine der wichtigsten in der Facultäten-Lehre, findet sich in der oben erwähnten Abhandlung von *Gauss*, wenn auch in etwas anderer Form; ich habe sie hier hergeleitet, ohne die allgemeinen Relationen, aus denen sie dort hervorgeht, vorauszusetzen.

Die Reihe für $(u+k, -x)^y$ lässt sich auf ganz ähnliche Weise finden; noch leichter aber aus der vorhergehenden herleiten, indem (nach 81)

$$(u+k, -x)^y = (u+k-(y-1)x, +x)^y$$

ist, und daher in (75) rechts, nur $(u, +x)^y$ in $(u-(y-1)x, +x)^y = (u, -x)^y$ zu verwandeln und in der eingeklammerten Reihe $u-(y-1)x$ statt u zu setzen ist. Da nun aber

$$\frac{(u, -x)_y}{(u-(y-1)x, +x)^n} = \frac{(u, -x)^y}{(u-yx+nx, -x)^n} = (u, -x)^{y-n} \text{ (73, 82)},$$

ist, so ergiebt sich

$$(92.)\ (u+k,-x)^y = (u,-x)^y + y(u,-x)^{y-1}.k + \frac{y(y-1)}{1.2}(u,-x)^{y-2}.k(k-x)$$
$$+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}(u,-x)^{y-3}k(k-x)(k-2x) + \ldots\ldots \infty.$$

Dem Obigen zufolge gilt diese Reihe für alle Werthe von u, x, y, k, für welche der reelle Theil von $\frac{u-(y-1)x+k}{x}+y = \frac{u+k}{x}+1$ *positiv* ist.

Betrachtet man dagegen die Reihe

$$\Sigma\left\{\frac{(y,-1)^\nu}{(1,+1)^\nu}(u,+1)^{y-\nu}(k,+1)^\nu\right\},$$

zu welcher man gelangt, wenn man $(u+k,+1)^y$ auf ähnliche Weise entwikkelt, aber $\Delta u = -1$ setzt, so ist dieselbe, weil

$$(93.)(u,+1)^{y-\nu}(k,+1)^\nu = \frac{(u,+1)^y(k,+1)^\nu}{(u+y-\nu,+1)^\nu} = \frac{(u,+1)^y(k,+1)^\nu}{(u+y-1,-1)^y} = \frac{(u,+1)^y(-k,+1)^\nu}{(1-u-y,+1)^\nu}$$

ist, in Folge der Gleichung (75), wenn in derselben $1-u-y$ statt u,$-k$ statt k und $x=1$ gesetzt wird, sobald der reelle Theil von $1-u-k$ *positiv* ist, gleich

$$\frac{(u,+1)^y(1-u-y-k,+1)^y}{(1-u-y,+1)^y} = \frac{(u,+1)^y}{(-u,-1)^y}(-u-k,-1)^y.$$

Also ist

$$(94.)\ (u,+1)^y + y(u,+1)^{y-1}k + \frac{y(y-1)}{1.2}(u,+1)^{y-2}k(k+1)$$
$$+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}(u,+1)^{y-3}k(k+1)(k+2)+\ldots\ldots\infty = \frac{(u,+1)^y}{(-u,-1)^y}(-u-k,-1)^y,$$

und *nicht* $=(u+k,+1)^y$, wofern y keine *ganze* Zahl ist. Es ist aber

$$\frac{(u,+1)^y}{(-u,-1)^y} = \frac{Fc(u).Fc(1-u)}{Fc(u+y).Fc(1-u-y)} = \frac{\sin(u\pi)}{\sin(u+y)\pi},$$

und die Summe der vorstehenden Reihe, wenn sie convergirt, ist daher

$$\frac{\sin(u\pi)\sin(u+k+y)\pi}{\sin(u+y)\sin(u+k)\pi}(u+k,+1)^y;$$

wie dies bereits *Ohm* bemerkt hat. Man hat hier ein treffendes Beispiel zu dem oben Gesagten, dass man beim Gebrauch der Formel

$$F(u+k) = F(u) + \frac{\Delta F(u)}{\Delta u}k + \frac{\Delta^2 F(u)}{\Delta u^2}\cdot\frac{k(k-u)}{2} + \ldots\ldots + \frac{\Delta^n F(u)}{\Delta u^n}\cdot\frac{(k,-\Delta u)^n}{(1,+1)_n} + R_n$$

nicht schliessen dürfe, es sei $R_n = 0$ für $n = \infty$, sobald die Summe der n ersten Glieder bei stets wachsendem Werthe von n sich einer bestimmten Gränze nähert. Hierdurch unterscheidet sich diese Entwicklung wesentlich von der gewöhnlichen *Taylor*schen; denn bei der letztern ist wenigstens für alle diejenigen Functionen, auf welche sich der im vorhergehenden Paragraph augeführte allgemeine Convergenz-Satz bezieht, stets

$$F(u+k) = F(u) + \sum_{n=1\,\cdots\,\infty} \frac{d^n F(u)}{du^n} \cdot \frac{k^n}{(1,+1)^n},$$

sobald die unendliche Reihe eine endliche Summe, und u nicht einen derjenigen besondern Werthe hat, in deren Nähe der Gang der Function F eine gewisse Eigenthümlichkeit hat.

Aus (75) folgt

$$\frac{1}{k} \cdot \left(\frac{(u+k,+x)^y}{(u,+x)^y} - 1 \right) = \frac{y}{u} + \frac{y(y-1)}{1.2} \cdot \frac{k-x}{u(u+x)} + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3} \cdot \frac{(k-x)(k-2x)}{u(u+x)(u+2x)} + \ldots \infty.$$

Nimmt man nun an, es sei die Summe $\frac{u}{x} + y$ in ihrem reellen Theile *positiv*, so kann man k so klein annehmen, dass die Reihe rechts convergirt und die Formel nach ganzen positiven Potenzen von k entwickelt werden kann. Thut man Dies und setzt dann $k = 0$, so ergiebt sich:

$$(95.)\quad \frac{\partial \log (u,+x)^y}{\partial u} = \frac{y}{u} - \frac{y(y-1)}{1.2} \cdot \frac{x}{u(u+x)} + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3} \cdot \frac{2x^2}{u(u+x)(u+2x)} - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot \frac{(y,-1)^n}{(1,+1)^n} \cdot \frac{(1,+1)^{n-1}}{(u,+x)^n} \cdot x^{n-1} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{y}{u} - \frac{y(y-1)}{2} \cdot \frac{x}{u(u+x)} + \frac{y(y-1)(y-2)}{3} \cdot \frac{x^2}{u(u+x)(u+2x)} - \ldots$$

Nun ergiebt sich aber aus der Formel (71), wenn man in derselben $n-1$ statt n und $u+x$ statt u setzt:

$$\Delta^{n-1} (u+x,+x)^y = (y,-1)^{n-1} \cdot \frac{(u+x,+x)^y \cdot x^{n-1}}{(u+x,+x)^{n-1}}, \text{ für } \Delta u = x;$$

und wenn man jetzt $y = -1$ setzt:

$$(96.)\quad \Delta^{n-1} \left(\frac{1}{u} \right) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(1,+1)^{n-1} \cdot x^{n-1}}{(u,+x)^n},\ \Delta u = x,$$

folglich

$$(97.)\quad \frac{\partial \log(u,+x)^y}{\partial u} = \frac{y}{u} + \frac{y(y-1)}{1.2}\cdot\Delta\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\cdot\Delta^2\left(\frac{1}{u}\right) + \dots\dots$$
$$+ \frac{(y,-1)^n}{(1,+1)^n}\cdot\Delta^{n-1}\left(\frac{1}{u}\right) + \dots\dots$$

Nimmt man ferner an, dass nicht nur $\frac{u}{x}+y$, sondern auch $\frac{u}{x}$ dem reellen Theile nach *positiv* sei, so erfahren die Grössen auf beiden Seiten dieser Gleichung bei keinem Werthe von u, für welchen diese Bedingungen erfüllt sind, eine Unterbrechung der Stetigkeit, und man erhält durch Integration:

$$(98.)\quad \log(u,+x)^y = y.\log u + \frac{y(y-1)}{1.2}\cdot\Delta\log u + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\cdot\Delta^2\log u + \dots\dots$$
$$+ \frac{(y,-1)}{(1,+1)^n}\cdot\Delta^{-1}\log u + \dots\dots$$

Die Integrations-Constante ist nämlich $=0$, indem, wenn man $u+vx$ statt u setzt, wo v eine ganze positive Zahl ist, sowohl $\Delta^{n-1}\log u$ als auch $\log(u,+x)^y - y\log u$ $= \log\frac{(u,+x)^y}{u^y}$ für $v=\infty$ sich auf Null reduciren.

Da

$$(u,+x)^{y+v} = (u,+x)^y\,(u+yx,+x)^v = (u,+x)^v\,(u+vx,+x)^y,$$

also

$$(u,+x)^y = \frac{(u,+x)^v}{(u+yx,+x)^v}(u+vx,+x)^y$$

ist, und man die ganze positive Zahl v so gross annehmen kann, dass sowohl $\frac{u}{x}+v$ als $\frac{u}{x}+v+y$ ihrem reellen Theile nach *positiv* sind, so folgt, dass die Formel (81) in allen Fällen zur Berechnung von $(u,+x)^y$ ausreicht.

Aus der Gleichung $(u,-x)^y = \frac{1}{(u+x,+x)^{-y}}$ ergiebt sich ferner, wenn

sowohl $\frac{u}{x}+1$, als auch $\frac{u}{x}+1-y$,

ihrem reellen Theile nach *positiv* sind:

$$(99.)\quad \log(u,-x)^y = y\log(u+x) - \frac{y(y+1)}{1.2}\cdot\Delta\log(u+x) + \frac{y(y+1)(y+2)}{1.2.3}\cdot\Delta^2\log(u+x) - \dots$$
$$\dots\dots + (-1)^{n-1}.\frac{(y,+1)^n}{(1,+1)^n}\cdot\Delta^{n-1}\log(u+x) + \dots\dots,$$

wo wieder, wie in (81), $-\Delta u = x$ zu setzen ist.

Ferner hat man

$$(u,-x)^{\gamma-\nu} = (u,-x)^{\gamma}(u+\gamma x,-x)^{-\nu} = \frac{(u,-x)^{\gamma}}{(u+\gamma x+x,+x)^{\nu}}$$

$$(u,-x)^{\gamma-\nu} = (u,-x)^{-\nu}(u+\nu x,-x)^{\gamma} = \frac{(u+\nu x,-x)^{\gamma}}{(u+x,+x)^{\nu}},$$

also

$$(100.)\quad (u,-x)^{\gamma} = \frac{(u+\gamma x+x,+x)^{\nu}}{(u+x,+x)^{\nu}}(u+\nu x,-x)^{\gamma},$$

und es lässt sich wieder in allen Fällen ν so gross annehmen, dass die Formel (83) zur Berechnung von $(u,-x)^{\gamma}$ benutzbar ist.

9.

Um eine Anwendung der im vorhergehenden Paragraph entwickelten Formeln zu geben, will ich daraus die Ausdrücke der *trigonometrischen* Function durch *Facultäten* herleiten.

Es ist für $z = \sin u$:

$$u = z + \tfrac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^7}{7} + \dots\dots,$$

für alle reellen Werthe von u, zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, diese selbst nicht ausgeschlossen.

Ist nun m eine ganze beliebige (complexe) Grösse, substituirt man den vorstehenden Ausdruck von u in die Reihe für

$$e^{mui} = 1 + (mi)u + (mi)^2\cdot\frac{u^2}{1.2} + (mi)^3\cdot\frac{u^3}{1.2.3} + \dots\dots,$$

und entwickelt dann die Formel nach Potenzen von z, so muss die daraus hervorgehende Reihe, die von der Form

$$e^{mui} = \sum_{\alpha=0\,\dots\,\infty}(a_\alpha z^\alpha) = \sum_{\alpha=0\,\dots\,\infty}(a_\alpha \sin^\alpha u)$$

ist, in Folge des Satzes (§. 7) ebenfalls für alle jene Werthe von u convergiren.

Nachdem auf diese Weise die Bedingung, unter welcher die vorstehende Gleichung Statt findet, festgestellt ist, kann man sich zur Bestimmung der Coefficienten irgend einer passenden Methode bedienen; z. B. durch zweimaliges Differentiiren, indem

$$\frac{d.\sin^\alpha u}{du} = \alpha \sin^{\alpha-1} u \cos u,$$

$$\frac{d^2 \sin^\alpha u}{du^2} = \alpha(\alpha-1)\sin^{\alpha-2} u \cos^2 u - \alpha \sin^\alpha u,$$

$$= \alpha(\alpha-1)\sin^{\alpha-2} u - \alpha^2 \sin^\alpha u$$

ist, und daraus

$$-m^2 e^{mi} = \sum_{a=0\cdots\infty} a_a(\alpha(\alpha-1)\sin^{\alpha-2}u - \alpha^2\sin^\alpha u)$$

$$= \sum_{\alpha=-2\cdots\infty}((\alpha+2)(\alpha+1)a_{\alpha+2}.\sin^\alpha u) - \sum_{\alpha=0\cdots\infty}(\alpha^2 a_\alpha.\sin^\alpha u),$$

oder $$e^{mui} = \Sigma\frac{1}{m^2}(\alpha^2 a_\alpha - (\alpha+1)(\alpha+2)a_{\alpha+2}).\sin^\alpha u$$

herleiten. Dann muss

$$\frac{1}{m^2}(\alpha^2 a_{\alpha-(\alpha+1)(\alpha+2)}a_{\alpha+2}) = a_\alpha,$$

oder $$a_{\alpha+2} = \frac{\alpha^2-m^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

sein. Hieraus ergiebt sich

$$a_{2\nu} = \frac{(\frac{1}{2}m,-1)^\nu(-\frac{1}{2}m,-1)^\nu}{(1,+1)^\nu(\frac{1}{2},+1)^\nu} = (-1)^\nu.\frac{(m,-2)^\nu(m,+2)^\nu}{(2,+2)^\nu(1,+2)^\nu} = (-1)^\nu.\frac{(m,-2)^\nu(m,+2)^\nu}{(1,+1)^{2\nu}}$$

$$a_{2\nu+1} = \frac{im(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},-1)^\nu(-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},-1)^\nu}{(1,+1)^\nu(\frac{3}{2},+1)^\nu} = (-1)^\nu.\frac{mi(m-1,-2)^\nu(m+1,+2)^\nu}{(1,+1)^{2\nu+1}},$$

indem dann einerseits wirklich

$$\frac{a_{2\nu}}{a_{2\nu-2}} = -\frac{(m-2(\nu-1))(m+2(\nu-1))}{(2\nu-1)\cdot 2\nu} = \frac{(2\nu-2)^2-m^2}{(2\nu-1)\cdot 2\nu}$$

$$\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu-1}} = -\frac{(m-1-2(\nu-1))(m+1+2(\nu-1))}{2\nu\cdot(2\nu+1)} = \frac{(2\nu-1)^2-m^2}{2\nu(2\nu+1)}$$

ist, und andrerseits durch Substitution der Reihe $u = \sin u + \cdots\cdots$ in die für e^{mui}, $a_0 = 1$, $a_1 = mi$ sich findet. Man hat daher

$$(101.)\ \cos mu = \Sigma\left\{\frac{(\frac{1}{2}m,-1)^\nu(-\frac{1}{2}m,-1)^\nu}{(1,+1)^\nu(\frac{1}{2},+1)^\nu}\sin^{2\nu}u\right\} = \Sigma\left\{(-1)^\nu\frac{(m,-2)^\nu(m,+2)^\nu}{(1,+1)^{2\nu}}\sin^{2\nu}u\right\}$$

$$(102.)\ \sin mu = m\Sigma\left\{\frac{(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},-1)^\nu(-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2},-1)^\nu}{(1,+1)^\nu(\frac{3}{2},+1)^\nu}\sin^{2\nu+1}u\right\}$$

$$= m\Sigma\left\{(-1)^\nu\frac{m(m-1,-2)^\nu(m+1,+2)^\nu}{(1,+1)^{2\nu+1}}\sin^{2\nu+1}u\right\}$$

$$\nu = 0\ \ldots\ldots\ \infty$$

für jeden Werth von m, und für alle diejenigen reellen Werthe von u, die nicht ausserhalb des Intervalls $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Setzt man nun $u = \frac{1}{2}\pi$, und $2m$ statt m, so erhält man durch Verglei-

chung mit der Formel (90), indem man in derselben $u = \frac{1}{2}$, $y = m$, $k = -m$, und auch $u = \frac{3}{2}$, $y = m - \frac{1}{2}$, $k = -m - \frac{1}{2}$ setzt:

$$(103.) \qquad \cos m\pi = \frac{1}{(\frac{1}{2}, +1)^{+m}\,(\frac{1}{2}, +1)^{-m}},$$

und $\sin m\pi = \dfrac{2m \cdot (\frac{3}{2}, +1)^{-1}}{(\frac{3}{2}, +1)^{m-\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}, +1)^{-m-\frac{1}{2}}}$, oder, weil $(\frac{3}{2}, +1)^{-1} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}-1} = 2$,

$(1, +1)^m = (1, +1)^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}, +1)^{m-\frac{1}{2}}$ und $(1, +1)^{-m} = (1, +1)^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}, +1)^{-m-\frac{1}{2}}$ ist,

$$(104.) \qquad \sin m\pi = \frac{4m(1, +1)^{\frac{1}{2}}(1, +1)^{\frac{1}{2}}}{(1, +1)^{+m}(1, +1)^{-m}}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch m und setzt darauf $m = 0$, so ergiebt sich:

$$(105.) \qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = (1, +1)^{\frac{1}{2}},$$

und daher

$$(106.) \qquad \sin m\pi = \frac{m\pi}{(1, +1)^{-m}\,(1, +1)^{+m}}.$$

Da (nach 83) $(1, +1)^m = \dfrac{1}{Fc(1+m)}$ ist, so erhält man aus den vorstehenden Formeln:

$$(107.) \quad \sin m\pi = m\pi\, Fc(m+1)\, Fc(1-m) = \pi\, Fc(m)\, Fc(1-m),$$

$$(108.) \qquad \sqrt{\pi} = \frac{1}{Fc(\frac{1}{2})},$$

und, da $(\frac{1}{2}, +1)^m = \dfrac{Fc(\frac{1}{2})}{Fc(m+\frac{1}{2})}$ ist:

$$(109.) \quad \cos m\pi = \pi\, Fc(\tfrac{1}{2} + m) . Fc(\tfrac{1}{2} - m);$$

übereinstimmend mit (107), wenn man dort $m + \frac{1}{2}$ statt m setzt.

Alle diese Formeln gelten, nach der hier gegebenen Ableitung, für jeden reellen und imaginären Werth von m. Man sieht daraus, dass der Gebrauch der Function $Fc(u)$ vor der Anwendung von $\Gamma(u)$ insofern im Vortheil ist, als die letztere, wenigstens nach der gewöhnlichen Definition, nur für positive Werthe von u eine Bedeutung hat. Dabei bemerke ich jedoch, dass $\Gamma(u)$ auch als bestimmtes Integral so zu definiren sei, dass die Beschränkung wegfällt. Hierauf gedenke ich bei einer andern Gelegenheit zurückzukommen, indem überhaupt die Formeln, welche den Zusammenhang der Facultäten mit *bestimmten Integralen* darstellen, in dieser Beziehung eine nähere Untersuchung verdienen.

Braunsberg in Ostpreussen, den 20. Mai 1854.

2.

Wie eine Tafel der untheilbaren Factoren der Zahlen bis zu beliebiger Höhe möglichst leicht und sicher aufzustellen sei.

(Vom *Herausgeber.*)

1.

Es giebt eine solche gedruckte Tafel, die bis zu *Einer Million und Zwanzig Tausend* reicht, unter dem Titel:

> *Cribrum arithmeticum sive tabula continens numeros primos, a compositis segregatos, occurrentes in serie numerorum ab unitate progredientium, usque ad* 1 000 000 *et ultra haec ad* 20 000, *numeris compositis, per* 2, 3, 5 *non dividuis. Adscripti sunt divisores simplices, non minime tantum, sed omnino omnes. Confecit Ladislaus Chernac, Pannonius, A. L. M. Philos. et medic. doctor, in almo lyceo Daventriensi Philos. professor. Daventriae, sumptibus auctoris, literis J. H. de Lange Typogr. Anno* 1811.

Die Tafel füllt 1020, etwas niedrige Folioseiten.

Eine andere, bis zu *Drei Millionen* reichende gedruckte Tafel hat den Titel:

> *Table des diviseurs pour tous les nombres du* 1er, 2^e *et* 3^e *million, avec les nombres premiers qui s'y trouvent; par Burckhardt. Paris, chez Bachelier* 1817.

Sie hat ebenfalls das Folioformat.

Die *Chernac*sche Tafel giebt vollständig und sehr deutlich an, was man sucht, und, wie es ihr Titel besagt, *sämmtliche* untheilbare oder *Stammfactoren* (Primfactoren) der zusammengesetzten Zahlen; so wie auch sehr deutlich die *Stammzahlen* (Primzahlen). Die *Burckhardt*sche Tafel giebt *nur die kleinsten*

Factoren der Zahlen an; und dies wenig einfach und deutlich. Sie erfüllt also weniger ihren Zweck, als die *Chernac*sche Tafel, weil von jeder vorausberechneten Tafel verlangt werden darf, dass sich Das, was sie anzugeben bestimmt ist, unmittelbar, ohne alle Mühe und weitere Rechnung darin finden lasse.

Gedruckte Tafeln, welche weiter reichten als bis zu 3 Millionen, giebt es, so viel dem Herausgeber bekannt ist, nicht.

Dass nun eine *möglichst weit* reichende Tafel der Factoren nützlich sein würde und zu wünschen sei, wissen Alle, die sich mit der Zahlentheorie beschäftigen; und auch Andern wird solches nicht erst nachzuweisen nöthig sein, da jede Wahrheit, in jeder Form, nützlich ist; wenn nicht unmittelbar und sogleich, so doch mittelbar, und in der Folge. Es käme also darauf an, wie eine Fortsetzung der Tafel der Factoren der Zahlen *am angemessensten* aufzustellen sei.

2.

An sich selbst würde kaum etwas einfacher sein, als die Erfüllung der Aufgabe. Man dürfte nur alle Stammzahlen, mit sich selbst und mit einander, auf alle mögliche Weise multipliciren. Die Producte würden alle möglichen zusammengesetzten Zahlen mit ihren Factoren geben, und die Stammzahlen blieben übrig.

Da aber offenbar die Mühe einer solchen Rechnung bald bis ins Unüberwindliche steigen würde, so kommt es zunächst auf die möglichste *Erleichterung* der Rechnung an. Doch die blosse Erleichterung genügt nicht; es kommt auch *eben so nothwendig* auf die möglichste *Sicherheit* der Ergebnisse an. Nur dasjenige unter den verschiedenen Mitteln zur *Erleichterung* wird das bessere sein, welches zugleich die möglichste *Sicherheit* gewährt.

Ein solches Mittel dürfte folgendes sein.

3.

Wie es auch in den beiden oben genannten Tafeln geschehen ist, können alle mit 2, 3 oder 5 aufgehenden Zahlen in der Factorentafel ganz *übergangen* werden, weil sie nicht allein unmittelbar kenntlich sind, sondern auch ihre Theilung mit 2, 3, 5, so oft wiederholt, bis man auf Quotienten kommt, die *nicht mehr* mit 2, 3, 5 aufgehen, allzu leicht ist, als dass es rathsam wäre, ihnen den, für sie nöthigen Raum zu opfern, der beinahe *dreiviertel* des gesammten, für *alle* Zahlen nöthigen Raumes ausmacht.

Die Tafel braucht also immer nur diejenigen Zahlen, welche *nicht* mit 2, 3, 5 aufgehen, und ihre Factoren anzugeben; aber dann *alle* ihre Stammfactoren.

Es werde, der Kürze wegen

Jede mit 2, 3 oder 5 nicht aufgehende Zahl durch E bezeichnet, jede Stammzahl im Allgemeinen mit p, und jedes Product von R und E, durch $P = pE$.

4.

Man würde nun, um die auf die Zahlen E beschränkte Tafel mit allen ihren Stammfactoren aufzustellen, alle E, bis zu einer gewissen Grenze E, der Reihe nach mit allen p, von dem kleinsten in Betracht kommenden $p = 7$ an, zu multipliciren haben. Die Producte P sind sämmtlich wieder nur Zahlen, die nicht mit 2, 3, 5 aufgehen, also nur höhere $E > E_1$, weil *beide* Factoren p und E der Producte $P = pE$ nicht durch 2, 3, 5 theilbar sind. Auch geben die Multiplicationen die E *alle*, bis zu pE_1. Denn wäre ein $E > E_1$ vorhanden, auf welches keines der Producte zuträfe, so könnte dasselbe doch immer nur Factoren aus der Reihe der p und der $E < E_1$ haben; und *alle* Multiplicatoren aus der Reihe der p und der $E < E_1$ wurden berührt.

Will man nun mit der Factorentafel z. B. bis zu

der Grenze B

gehen, so würde man alle E, von dem kleinsten $E = 7$ an, bis zu demjenigen E, welches zunächst $< \frac{B}{p}$ ist, je mit allen p, vom kleinsten $p = 7$ an, bis zu p nächst $< \sqrt{B}$, zu multipliciren haben; denn p nächst $< \sqrt{B}$, mit E zunächst $< \frac{B}{< \sqrt{B}}$ multiplicirt, giebt ein Product, welches zunächst $< B$ ist.

Will man daher zunächst z. B. bis zu $B = 7$ Millionen gehen (weshalb grade bis zu *sieben* Millionen, wird sich weiter unten in (§. 14) zeigen), so muss man mit dem kleinsten $p = 7$ alle E, von dem kleinsten $E = 7$ an, bis zu $E = \frac{7\,000\,000}{7} = 1000\,000$, mit dem nächsten $p = 11$ alle E, von dem kleinsten $E = 7$ an bis zu $E < \frac{7\,000\,000}{11} = 636.361$, welches zunächst $< \frac{7\,000\,000}{11}$ ist, multipliciren, und so weiter, bis man zu demjenigen P gelangt, welches zunächst $< \sqrt{7\,000\,000} = 2645{,}751 \ldots$ also $= 2633$ ist, und mit welchem dann alle E, von dem kleinsten $E = 7$ an, bis zu demjenigen $E = 2641$ zu multipliciren sind, welches zunächst $< \sqrt{B} = 2645{,}751$ ist.

Eigentlich wäre es nicht nöthig, immer mit den verschiedenen p, die E, von dem *kleinsten* $E = 7$ an, bis zu E zunächst $< \sqrt{B}$, zu multipliciren, sondern nur die *von p selbst* an, weil man sonst viele Producte *mehremal* findet; z. B. wenn die $E = 7, 11, 13, 17 \ldots$, stets von $E = 7$ an, erst mit 7, dann mit 11, dann mit 13 u. s. w. multiplicirt werden, so findet man die Producte 7. 11 oder 11. 7, 7. 13 oder 13. 7 u. s. w. *zweimal*. Indessen ist es nicht rathsam, diese Erleichterung sich zu gestatten, weil man dadurch zahlreiche *Proben* der Rechnung verlieren würde.

5.

Es fragt sich demnach, wie die Zahlen E mit den verschiedenen p, nicht allein mit der *wenigsten Mühe*, sondern auch *am sichersten* zu multipliciren seien. Die Tafeln, welche zu dieser *Vorbereitung der Factorentafel* aufzustellen sind, und welche die Producte $P = p.E$ enthalten, sollen *Productentafeln* heissen.

Ein wesentliches Mittel, die *Sicherheit* der Multiplicationen zu fördern, besteht darin, alle Zahlenreihen, welche *wiederholt* vorkommen, nicht wiederholt zu *schreiben*, sondern sie *drucken* zu lassen; und zwar nicht mit beweglicher Schrift (Typen), welche beim Druck herausfallen und dann möglicherweise unrichtig wieder eingesetzt werden können, sondern sie *vom Stein drucken* (*lithographiren*) zu lassen. Sind dann die Zahlenreihen im Probedruck einmal völlig berichtigt, so sind Abweichungen *nicht mehr möglich.* Zugleich erspart aber auch das Drucken der wiederholt vorkommenden Zahlenreihen offenbar eine grosse Masse von *Schreiben*, und gewährt folglich auch eine grosse *Erleichterung*

Es kommt also darauf an, die Vorbereitungen zur Factorentafel, also die Aufstellung der *Productentafeln*, so *einzurichten*, dass sich möglichst viele Zahlenreihen *wiederholen*; was auf folgende Weise geschehen kann.

6.

Man bezeichne die 80 Zahlen $E < 300$ durch ε.

Es sind folgende:

(1.)	$\varepsilon =$	1	31	61	91	121	151	181	211	241	271
		7	37	67	97	127	157	187	217	247	277
		11	41	71	101	131	161	191	221	251	281
		13	43	73	103	133	163	193	223	253	283
		17	47	77	107	137	167	197	227	257	287

19	49	79	109	139	169	199	229	259	289
23	53	83	113	143	173	203	233	263	293
29	59	89	119	149	179	209	239	269	299

Dann drückt

$$(2.)\qquad E = 300n + \varepsilon \text{ für } n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots,$$

stets mit den *nemlichen* ε, *alle* E bis zu jeder beliebigen Höhe aus. Auch giebt *nur allein* der Ausdruck (2) *alle* E und *keine andern* Zahlen, keine solche welche mit 2, 3 oder 5 aufgehen, weil 300 mit 2, 3 oder 5 aufgeht (was auch n sei), ε aber nicht. Weder der Ausdruck

$$(3.)\qquad 100n + \varepsilon \text{ , für } \varepsilon > 0 < 100,$$

noch der Ausdruck

$$(4.)\qquad 200n + \varepsilon \text{ , für } \varepsilon > 0 < 200,$$

geben, weder *alle* E, noch *bloss ausschliesslich* die E. Der Ausdruck (3.) giebt z. B. die $E = 103, 203, 403 \ldots$ *nicht*, dagegen 201, 501, 801 ....., welche *keine* E sind. Der Ausdruck (4) giebt die $E = 109, 409, 509 \ldots$ *nicht*, dagegen 201, 801, 1101 ....., welche *keine* E sind. Nur der Ausdruck (2) erfüllt die *beiden* Bedingungen, *alle* E, und *nur die* E zu geben.

Wenn man daher die 80 Zahlen ε (1), die nun, weil sie immer dieselben bleiben, *gedruckt* werden können, in senkrechten Spalten unter einander setzt, und zwar *bloss ihre beiden letzten Ziffern*, mit darüber vermerkten Hunderten, wie es z. B. in (Taf. II.) in den zehn, mit ε bezeichneten Spalten zu sehen ist, so drücken diese *gedruckten* Zahlen *die beiden letzten Ziffern aller möglichen* E, und *keiner andern* Zahlen aus.

In der *Factorentafel selbst*, welche die Producte $p.E = P$ enthalten soll, die ebenfalls nur E sind (und keine andern Zahlen) sind die 80 Zahlen ε nur einmal, vorn, links, und allenfalls, der Deutlichkeit wegen, noch einmal in der Mitte der Breite der Seite zu drucken nöthig, weil sie, vermöge (2), für jedes 300 mehr die *nemlichen* sind. Und da nun auf einer Folioseite, in der Breite bequem zu zehn Spalten Raum bleibt, wie es (Taf. I) zeigt, so kann jede Folioseite, oder jede *Nummer der Factorentafel* bequem die 800 *Producte* $P = p.E$ fassen, die in je 3000 Zahlen vorkommen; so dass also zu jeder Million der Factorentafel nicht ganz 334, und zu jeden 3 *Millionen* gerade 1000 *Folioseiten* nöthig sind.

Dies hat *Chernac* in seiner Tafel nicht berücksichtigt. Er hat nur die $\varepsilon > 0 < 200$ unter einander gesetzt. Davon war die Folge, dass auch *die beiden*

letzten Ziffern der E, weil sie nicht in jeder senkrechten Spalte die *nemlichen* sind, in jeder dieser Spalten gedruckt werden mussten; wodurch es dann weiter geschah, dass eine Folioseite, statt über 3000, nur über 1000 Zahlen sich erstrekken konnte, und dass *statt* 334 Folioseiten zu Einer Million, *deren* 1000 nöthig waren. Hätte *Chernac* die $\varepsilon > 0 < 300$ unter einander gesetzt, so konnte der Raum, welchen seine Tafel einnimmt, statt *einer* Million, *drei* Millionen fassen.

Auch in den Vorberechnungen der *Productentafeln*, wie z. B. (Taf. III), wären eigentlich die 80 Zahlen $\varepsilon > 0 < 300$ nur einmal auf jeder Folioseite, links, vorn, zu drucken nöthig, weil sie für jedes 300 mehr, *dieselben* sind; indessen ist es hier, wie sich weiter unten zeigen wird, der Deutlichkeit und Sicherheit wegen besser, sie für *jedes* 300 *wiederholt*, also 10 *mal* auf jeder Folioseite drucken zu lassen; wie in (Taf. III, IV, V). Auch von den *Productentafeln* kann jede Folioseite die 800 Zahlen E umfassen, welche hier, nicht als *Producte*, sondern als die *Factoren* in je 3000 Zahlen vorkommen, die nun mit den verschiedenen p zu multipliciren sind.

Es sind aber keinesweges für jedes p, wie es scheint, so viele Folioseiten zur Vorberechnungstafel nöthig, als man haben müsste, um mit den Factoren bis zu $\frac{B}{p}$ hinaufzusteigen, z. B. für $p = 7$ und $B = 7$ Millionen nicht $\frac{7000000}{7.3000} = 334$ Folioseiten der *Productentafel*, sondern es ist, wie es sich zeigen wird, *für jedes p eine einzige Folioseite hinreichend*; so dass die Vorberechnung, wenn man mit der Factorentafel bis zu $B = 7$ Mill. gehen *will*, also nach (§. 4) mit den Multiplicatoren p bis zu $p = 2633$ gehen *muss*, nur 379 *Folioseiten* erfordert; nemlich so viele, als es von $p = 7$ bis $p = 2633$ *Stammzahlen* giebt.

7.

Weiter würde die Vorberechnung wie folgt auszuführen sein.

Die *beiden letzten Ziffern* der *Stammzahlen p*, mit welchen die Zahlen E zu multipliciren sind, können *alle ungrade Zahlen* $> 0 < 100$ sein; mit Ausnahme derer, welche mit 5 aufgehen; so dass also ihrer *vierzig* sind. Bezeichnet man daher diese 40 Zahlen durch k so lassen sich *alle* Stammzahlen durch

$$(5.) \qquad p = 100m + k$$

ausdrücken; wo aber m nicht gleich *allen* Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 ..... ist, sondern für jedes andere k *andere* bestimmte ganzzahlige Werthe hat. Die 379 verschiedenen Multiplicatoren p von 1 bis 2633 (§. 6) lassen sich wie folgt ausdrücken.

(6.) $p =$
k

1 + 100 (0, 1, 3, 4, 6, 7, 12, 13, 16, 18, 19)
3 + 100 (1, 5, 11, 13, 20, 22, 25)
7 + 100 (0, 1, 3, 6, 9, 13, 16, 19, 22)
9 + 100 (1, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 16, 17, 23, 26)
11 + 100 (0, 2, 3, 8, 9, 15, 18, 20 21, 23, 24)
13 + 100 (0, 1, 3, 6, 10, 12, 16, 19, 21, 22)
17 + 100 (0, 3, 6, 11, 12, 20, 24, 26)
19 + 100 (0, 4, 6, 7, 9, 10, 13, 16)
21 + 100 (4, 5, 8, 10, 13, 16, 17, 22, 25, 26)
23 + 100 (0, 2, 5, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 24)
27 + 100 (1, 2, 7, 8, 13, 14, 16, 20)
29 + 100 (0, 2, 8, 9, 11, 12, 14, 20, 21)
31 + 100 (0, 1, 3, 4, 6, 10, 12, 15, 18, 19, 21, 25)
33 + 100 (2, 4, 7, 10, 14, 17, 19, 23, 26)
37 + 100 (0, 1, 3, 9, 12, 16, 21, 22, 24)
39 + 100 (1, 2, 4, 7, 8, 10, 14, 20, 22, 23, 25)
41 + 100 (0, 2, 5, 6, 9, 17, 21, 23, 24)
43 + 100 (0, 4, 6, 7, 15, 21, 22, 25)
47 + 100 (0, 3, 5, 6, 9, 14, 17, 18, 23, 24)
49 + 100 (1, 3, 4, 10, 12, 15, 19, 25)
51 + 100 (1, 2, 7, 10, 11, 14, 19, 22, 23, 25)
53 + 100 (0, 3, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 17, 20, 21)
57 + 100 (1, 2, 4, 5, 7, 8, 16, 23 25)
59 + 100 (0, 3, 6, 8, 12, 14, 15, 17, 24)
61 + 100 (0, 4, 6, 7, 10, 13, 18, 21)
63 + 100 (1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 16, 20)
67 + 100 (0, 1, 3, 4, 9, 13, 15, 16, 18, 22, 24)
69 + 100 (2, 5, 7, 10, 16, 20, 22)
71 + 100 (0, 2, 5, 9, 11, 14, 15, 18, 23)
73 + 100 (0, 1, 3, 6, 7, 13, 18, 19, 22, 24)
77 + 100 (2, 5, 6, 8, 9, 12, 17, 18, 23, 24)
79 + 100 (0, 1, 3, 4, 12, 15, 18, 19, 21, 25)
81 + 100 (1, 2, 8, 11, 13, 14, 20, 22, 23)
83 + 100 (0, 2, 3, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 20, 22, 23)
87 + 100 (4, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 17, 19, 20)
89 + 100 (0, 3, 12, 14, 17, 18, 20, 23)
91 + 100 (1, 4, 6, 9, 10, 12, 25)
93 + 100 (1, 2, 5, 10, 11, 14, 16, 19, 22, 23, 25)
97 + 100 (0, 1, 3, 7, 9, 10, 12, 15, 16, 19, 22)
99 + 100 (1, 4, 5, 13, 14, 16, 19, 20, 23)

Von den Producten

$$(7.)\ p.E=(100m+k)(300n+\varepsilon)[S.2\,u.5]=30000mn+100m\varepsilon+300nk+k\varepsilon$$

sind nun aber offenbar *die beiden letzten Ziffern* für die nemlichen ε und k immer *dieselben*, was auch m und n sein mögen. Denn wenn man von $k\varepsilon$ in (7) noch so viele 100 abzieht, als es angeht, so ist alles Uebrige des Products rechts in (7) irgend ein *Vielfaches von* 100, welches durch die den beiden letzten vorhergehenden Ziffern des Products ausgedrückt wird, so dass *nur diese* Ziffern mit m, n und $k\varepsilon$ sich ändern, die *beiden letzten* Ziffern von $k\varepsilon$ für dieselben ε und k aber nicht. Diese *beiden letzten* Ziffern aller Producte $P=p.E$ bilden daher in *allen möglichen* Producten nur 40 *verschiedene Zahlenreihen*, als so *viele k* es giebt, jede von 80 Zahlen, als so viele *der* ε sind Daher können wieder diese 40 Zahlenreihen *gedruckt* werden. (Taf. II) giebt sie an. Die Zahlen, welche *die beiden letzten Ziffern* von $k\varepsilon$, also auch von jedem Product $P=p.E$ ausdrücken, sollen durch η bezeichnet werden.

Die Zahlen in den Spalten ε der Vorberechnungstafeln, welche die beiden letzten Ziffern *der E* sind, bleiben unverändert für *alle* Productentafeln *dieselben*; weshalb sie *gedruckt* werden konnten. Sollen nun aber auch noch die beiden letzten Ziffern η der *Producte* $p.E=P$ gedruckt werden, so müssen 40 *verschiedene* Tafeln, mit den in (Taf. II.) angegebenen 40 verschiedenen Zahlenreihen η, auf Stein gezeichnet werden. Sie geben dann die z. B. in (Taf. III.) mit η bezeichneten Zahlen an, welche auf *derselben* Seite der Vorberechnungstafel *dieselben* sind, da die Seite für *dieselben* beiden letzten Ziffern der p und der E gilt.

Sollte man das Zeichnen auf Stein von 40 verschiedenen Seiten der Productentafeln *zu theuer* finden, so kann man auch eine hinreichende Zahl Abdrücke von (Taf. II) machen lassen, davon die senkrechten Streifen abschneiden und sie mit Gummi auf die dann leeren Spalten η (Taf. III, IV, V) aufheften lassen. Dies wird *weniger theuer* sein, da es nicht nöthig ist, dass der *Rechner* das Abschneiden und Aufheften der Streifen selbst verrichte; was vielmehr auch recht gut von einem *Buchbinder* geschehen kann. Die *Sicherheit* der Rechnung bleibt bei dieser zweiten Art dieselbe, während, nächst Kosten, dem Rechner auch noch einige Mühe erspart wird.

Geschieht es so, so ist zur Vorberechnung nur *eine einzige* Tafel mit den Zahlen in den Spalten ε (Taf. III) *auf Stein zu zeichnen* nöthig; von welcher dann so viele Abdrücke gemacht werden, als Multiplicatoren p in Betracht kom-

men. Mit den Zahlenreihen η aus den Abdrücken von (Taf. II) werden dann die für sie bestimmten leeren Spalten gefüllt.

8.

Von den Producten $p.E = P$ wären also nun schon *die beiden letzten Ziffern* für die Spalten η z. B. in (Taf. III, IV u. V), *ohne alle weitere Rechnung*, mit der *vollkommensten Sicherheit* erlangt. Es ist nichts mehr davon *zu schreiben* nöthig, sondern sie sind sämmtlich *gedruckt*. Es kommt jetzt weiter auf die *übrigen Ziffern der Producte* an.

Diese Producte sind für die *Factorentafel* zu dem Zwecke zu berechnen nöthig, dass man die *Stellen* in dieser Tafel erfahre, *in welche die Factoren p zu setzen sind*. Die Productentafeln müssen also zu dem Ende die Producte *vollständig* angeben.

Die Producte $p.E = P$ steigen für $B = 7$ Mill. bis zu 7 Ziffern. Die *beiden letzten* derselben liefern die Productentafeln *gedruckt*; es sind also noch die *fünf*, den beiden letzten *vorhergehenden* Ziffern zu *berechnen* und einzu*schreiben*. Die 5 Ziffern würden nun auch in den, z. B. nach (Taf. III) dazu noch vorhandenen leeren Streifen, Raum finden, wenn man die vorderste Ziffer (die der Millionen) *darüber* setzte; allein diese Art des Einschreibens wäre, auch für den *Zweck* der Producte, nicht bequem. Denn man müsste dann in der *Factorentafel* (Taf. I) jedes Product, welches die Productentafel angiebt, aus der vordern senkrechten Spalte ε, aus den für die verschiedenen Hunderte darüber gesetzten Zahlen und aus den über die Blätter gesetzten Zahlen der Zehntausende *zusammenlesen*; was beschwerlich wäre. Auch würde dann in den Productentafeln sehr viel zu *schreiben* sein.

Um Dies zu vermeiden, gebe man die den beiden letzten *vorhergehenden* Ziffern der Producte, statt sie auszuschreiben, auf folgende andere Weise an. Da nemlich jede Seite der Factorentafel 3000 Zahlen umfasst, so können alle Producte, welche in der Factorentafel vorkommen, durch

$$(8.) \qquad P = p.E = 3000\mu + z$$

ausgedrückt werden, wo μ *die Zahl oder Nummer der Seite* und z diejenige Zahl *in der Seite* bezeichnet, welche von den letzten Ziffern des Products ausgedrückt wird, und die, weil z nicht über 3000 steigt, nie mehr als *vier* Ziffern hat. Damit μ in (8) wirklich *die Nummer der Seite* der Factorentafel

bezeichne, muss man beim Numeriren der Seiten nicht mit 1, sondern mit 0 anfangen, weil für die $P < 3000$, welche auf der *ersten* Seite vorkommen, in (8), $\mu = 0$ ist.

Nun sind, wie sich oben in (§. 7) zeigte, die *beiden letzten Ziffern* η der Producte $P = p.E$, für das gleiche p, von einer Seite zur andern, *dieselben*, so dass sie, nach der Angabe von (Taf. II), *gedruckt* werden konnten: mithin sind nur noch *die zwei, den beiden letzten vorhergehenden Ziffern*, welche durch c bezeichnet werden mögen, für die z in (8) zu berechnen und zu *schreiben* nöthig, *nebst der Zahl oder Nummer* μ (von Null anfangend) der *Seite* der Factorentafel, auf welcher das Product vorkommt. Nur die z, folglich nur die c und die μ, ändern sich mit jedem p.

Es rücken aber die E in den *Productentafeln* von einer Seite bis zur nächsten um 3000 fort: also nehmen die *Producte* $p.E = P$, welche die Vorberechnungstafeln angeben, von einer Seite derselben bis zur nächsten, um das *p-fache von* 3000 *zu*; mithin ist, wenn für irgend ein E das *Product* $p.E$ nach (8) durch $p.E = P = 3000\mu + z$ ausgedrückt wird, dasjenige für ein um 3000 grösseres E, also dasjenige *Product*, welches auf der nächstfolgenden Seite der Productentafel an *derselben Stelle* stehen würde, um *p mal* 3000 *grösser*, und beträgt folglich

$$(9.)\; p(E+3000) = p.E + 3000p = 3000\mu + z + 3000p\,(8) = 3000(p+\mu)+z,$$

mit *demselben* z; bloss die Nummer μ der *Seite* der Tafel, welche die Producte aufnimmt (also der *Factorentafel*), ist *um* p *gestiegen*. Mithin bleiben die z, und folglich die c, von einer Seite der Productentafel bis zur nächsten, dritten u. s. w., also auf allen Seiten, unverändert *dieselben*; bloss die μ steigen; und zwar *je um* p.

Dies ist der Grund, weshalb, wie in (§. 6) gesagt, *von den Productentafeln für jedes* p *nur eine einzige Seite nöthig ist.* Denn nicht bloss die *zwei*, sondern sogar die *vier* letzten Ziffern würden, wenn man für das nemliche p die Vorberechnungsseiten *wiederholt* drucken lassen *wollte*, nur stets *dieselben* sein, und nur μ würde sich ändern. Das Wiederholen der Productentafelseiten ist aber offenbar, *bloss der Steigerung der* μ *wegen*, nicht nöthig, da sich diese Steigerung, stets um p, auch ohne *Das* leicht angeben lässt.

Das Steigen der μ auf *einer und derselben* Seite der Productentafel aber wird am bequemsten auf folgende Weise angezeigt werden können. Wollte man nemlich wiederum jedes μ ganz ausschreiben, so würde man, da die Factorentafel

für $B = 7$ Mill. 2334 Folioseiten erfordert, folglich μ bis zu 2334 steigen kann, mit dem μ doch wieder bis zu *vierziffrigen* Zahlen gelangen. Um Dies zu vermeiden, deute man, wie es in (Taf. III, IV u. V) in den mit μ bezeichneten Spalten geschehen ist, blos jedesmal, wenn μ steigt, an, *um wieviel* es steigt; wozu dann bloss *einziffrige* Zahlen nöthig sind; wenigstens für alle $p < 5000$, also bis $B = 25$ Millionen, weil E nie um mehr als 6, folglich $p.E$ erst dann um mehr als $6.5000 = 30\,000$, oder μ um mehr als 10 *auf einmal* steigt, wenn $p > 5000$ ist. Erst für $B > 250$ Mill. kann die Steigerung von μ eine *dreiziffrige* Zahl sein u. s. w.

Oben über jede Spalte μ setze man das *vollständige* μ; was dann *Proben* der Rechnung giebt, da in jeder der um 300 zunehmenden Hauptspalten der Productentafeln das darüber stehende μ die *Summe* desjenigen μ, welches über der nächst vorhergehenden Hauptspalte steht, und der *einzelnen Steigerungen* der μ in der nemlichen nächst vorigen Hauptspalte, auch ausserdem die Summe *aller* einzelnen Steigerungen der μ auf der *ganzen Seite*, gleich p sein muss.

9.

Ehe die Vollendung der *Productentafeln* und die Anwendung derselben auf die *Factorentafel* weiter beschrieben wird, mag des Verfahrens gedacht werden, durch welches die Tafel (II.) der *beiden letzten* Ziffern η der Producte $P = p.E$ aufgestellt worden ist.

Es hätte diese Tafel ohne alles Weitere aus den

„*Rechentafeln des Herausgebers, welche alles Multipliciren und* „*Dividiren mit Zahlen unter* 1000 *ganz ersparen, bei grösseren Zah-* „*len aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen*; *Berlin*, „*bei Maurer*, 1820."

bloss *ausgeschrieben* werden können. Man hat indessen folgende *sicherere* einfache *selbstständige* Aufstellung vorgezogen. Denn eben so, wie beim practischen Rechnen jedes Verfahren in dem Maasse unsicher ist, wie es eine stete, bedeutendere Aufmerksamkeit und Spannung des Urtheils in Anspruch nimmt, ist auch ein Verfahren, welches, wie das blosse Abschreiben, des fortwährenden Gebrauchs des Urtheils fast gar nicht bedarf, ebenfalls unsicher. Nur dasjenige Verfahren beim *practischen Rechnen* dürfte das bessere sein, welches eine stete, aber nicht erschlaffende urtheilende Aufmerksamkeit des Rechners auf Das was er hin-

schreibt erfordert, in dem Maasse, dass der Zerstreuung der Gedanken nicht Spielraum bleibt.

A. Die *beiden letzten* Ziffern η der $P = p.E$ hangen bloss von den beiden letzten Ziffern der beiden Factoren p und E von P ab. Die beiden letzten Ziffern der E sind die 80 Zahlen E in (1); die von p sind die 40 ungeraden Zahlen.

(10.)	$k =$	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
		3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
		7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
		9	19	29	39	49	59	69	79	89	99.

Die ε bleiben für *alle* Productentafeln *dieselben.* Es kommt also nur darauf an, diese ε mit den k (10) zu multipliciren; und zwar kommt es nur auf die *beiden letzten* Ziffern η der Producte an.

B. Wirklich zu multipliciren sind zu dem Ende nur nöthig die ersten *acht* ε: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 und 29, mit den *drei* ersten $k > 1 = 3, 7, 9$; und von den Producten sind nur die beiden letzten Ziffern zu nehmen; welches dann die ersten 32 zweiziffrigen Zahlen oben links in der Ecke von (Taf. II) giebt. Alle übrigen der 3200 Producte der Tafel werden durch gleichsam blosses *Abzählen*, zum Theil sogar durch bloss *wiederholtes Schreiben*, wie folgt, gefunden.

C. Zunächst nemlich haben die Producte aller, je um 10 grösseren k(10), mit einem und demselben ε, *dieselbe letzte Ziffer.* Namentlich die Producte der in (10) in der ersten wagerechten Zeile stehenden k (1, 11, 21 etc.) mit $\varepsilon = 7$, haben alle 7 zur *letzten* Ziffer; die Producte der k in der zweiten Zeile, mit $\varepsilon = 7$, haben alle 1, diejenigen der k in der dritten Zeile, mit $\varepsilon = 7$, alle 9, und diejenigen der k in der vierten Zeile, mit $\varepsilon = 7$, alle 3 zur *letzten* Ziffer. Also alle, in die zu $\varepsilon = 7$ gehörige wagerechte Zeile, quer durch die (Taf. II.) zu setzenden Zahlen haben, der Reihe nach wiederholt 7, 1, 9, 3 zu ihren *letzten* Ziffern. Das Gleiche findet nicht bloss für die $\varepsilon = 7$ Statt, sondern auch, eben so, für alle ε, deren *letzte Ziffer* 7 ist, also auch für $\varepsilon = 17, 37, 47$ etc.; denn es kommt zunächst nur auf die *letzte Ziffer* der Producte $k.\varepsilon$ an, auf welche die vorletzten Ziffern der ε und k keinen Einfluss haben.

Auf ganz ähnliche Weise folgt, dass die *letzten* Ziffern der Producte der k mit denjenigen ε deren letzte Ziffer 1 ist, *quer über*, 1, 3, 7, 9 sind, mit denjenigen ε, deren letzte Ziffer 3 ist, 3, 9, 1, 7 und mit denjenigen ε, deren letzte Ziffer 9 ist, 9, 7, 3, 1. Man darf daher nur, quer durch die, Tafel:

$$
(11.)\quad \left\{\begin{array}{l}
\text{Hinter den } \varepsilon = \;\; 1, 11, 31, 41 \ldots\ldots \text{ wiederholt } 1, 3, 7, 9, \\
\text{Hinter den } \varepsilon = \;\; 7, 17, 37, 47 \ldots\ldots \text{ wiederholt } 7, 1, 9, 3, \\
\text{Hinter den } \varepsilon = 13, 23, 43, 53 \ldots\ldots \text{ wiederholt } 3, 9, 7, 1, \text{ und} \\
\text{Hinter den } \varepsilon = 19, 29, 49, 59 \ldots\ldots \text{ wiederholt } 9, 7, 3, 1,
\end{array}\right.
$$

schreiben, so sind *ohne alle Rechnung* die *letzten Ziffern* aller zweiziffrigen Zahlen der Tafel (II.) vollständig gefunden.

D; Es fehlen noch die *vorletzten* Ziffern der Producte $k\varepsilon$; und diese finden sich wie folgt durch blosses *Abzählen*.

Zum Anfange sind die *vorletzten* Ziffern der Producte aller 80 verschiedenen ε, *bloss erst mit den ersten drei k*, 3, 7, 9 nöthig. Diejenigen der Producte der *acht ersten* ε: 1, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29 mit $k = 3, 7, 9$ wurden nach (*B*) durch wirkliche Multiplication gefunden. Aus ihnen finden sich die Producte der übrigen 70 verschiedenen ε mit $k = 3, 7, 9$, wenn man zu denen der ersten acht ε, wiederholt $30k$ addirt. Also nehmen diese Producte, z. B. für $k = 3$, *wiederholt* um $3.30 = 90$ und mithin ihre *vorletzten* Ziffern *wiederholt* um 9 zu; die vorletzten Ziffern der Producte der $\varepsilon = 1, 31, 61, 91 \ldots\ldots$ mit $k = 3$ heissen also 0, 9, 8, 7, 6 ..... Eben so heissen die *vorletzten* Ziffern der Producte der $\varepsilon = 7, 37, 67, 97 \ldots\ldots$ mit $k = 3$: 2, 1, 0, 9, 8 ..... und so weiter. Aehnlich verhält es sich für $k = 7$ und $k = 9$. Für $k = 7$ nehmen die Producte $k\varepsilon$ um $7.30 = 210$, also ihre *vorletzten* Ziffern um 1 zu, und es heissen folglich diejenigen der Producte von $= \varepsilon$ 1, 31, 61, 91 .....mit $k = 7$: 0, 1, 2, 3, 4.....; diejenigen der Producte von $\varepsilon = 7, 37, 67, 97 \ldots\ldots$ mit $k = 7$ heissen 4, 5, 6, 7, 8..... u. s. w. Für $k = 9$ nehmen die Producte $k\varepsilon$ um $9.30 = 270$, also ihre *vorletzten* Ziffern wiederholt um 7 zu, und es heissen folglich die *vorletzten* Ziffern der Producte von $\varepsilon = 1, 31, 61, 91 \ldots\ldots$ mit $k = 9$: 0, 7, 4, 1, 8 ....., diejenigen der Producte von $\varepsilon = 7, 37, 67, 97 \ldots\ldots$ mit $k = 9$ heissen 6, 3, 0, 7, 4 ..... u. s. w. Wo wiederholt 9 und 7 zu addiren sind, nemlich für $k = 3$ und $k = 9$, kann man, da es nur auf die *vorletzten Ziffern* ankommt, statt dessen auch $10 - 9 = 1$ und $10 - 7 = 3$ wiederholt *abziehen*.

So also werden, *zunächst für die drei ersten* $k = 3, 7, 9$, die *vorletzten* Ziffern ihrer Producte mit den 80 verschiedenen ε durch blosses *Abzählen* gefunden.

E; Wenn nun weiter z. B. die gegen 1, 3, 7, 9 um 10 grösseren $k = 11, 13, 17, 19$ mit $\varepsilon = 7$ multiplicirt werden, so sind die Producte um $7.10 = 70$, also ihre *vorletzten* Ziffern um 7 grösser, als die von 7 mal 1, 3, 7, 9; sie sind also $7 + 0, 2, 4, 6 = 7, 9, 1, 3$. Gleicherweise verhält es sich für alle ε, deren

letzte Ziffer 7 ist, denn die *vorletzte* Ziffer von ε vergrössert die Producte mit den k, welche um 10 grösser sind, schon um *Hunderte*, welche nicht in Betracht kommen. Sind die ε um neue 10 grösser, so nimmt die *vorletzte* Ziffer der Producte $k\varepsilon$ von Neuem um 7 zu u. s. w. Man findet demnach die *vorletzten* Ziffern der Producte in allen den wagerechten Reihen, welche zu den ε gehören, deren *letzte* Ziffer 7 ist, wenn man die *vorletzten* Ziffern von ε selbst, *fortwährend* um 7 erhöht, oder auch (da es immer nur auf die *vorletzten* Ziffern ankommt, ohne Rücksicht auf die weiter vorhergehenden), wenn man sie um $10 - 7 = 3$ *erniedrigt*. So heissen also z. B. die *vorletzten* Ziffern der Producte von $\varepsilon = 17$ mit den verschiedenen k : 1, 5, 1, 5 (+ 7) = 8, 2, 8, 2 (+ 7) = 5, 9, 5, 9 (+ 7) = 2, 6, 2, 6 u. s. w.; diejenigen von $\varepsilon = 37$ mit den verschiedenen k heissen 3, 1, 5, 3 (+ 7) = 0, 8, 2, 0 (+ 7) = 7, 5, 9, 7 (+ 7) = 4, 2, 6, 4 u. s. w.

Aus ganz ähnlichen Gründen nehmen die *vorletzten* Ziffern der Producte aller ε deren *letzte* Ziffer 1 ist, mit den wiederholt um 10 steigenden k, um 1 zu, weil die Producte selbst um $1.10 = 10$ zunehmen. Die *vorletzten* Ziffern der Producte aller ε, deren *letzte* Ziffer 3 ist, mit den wiederholt um 10 steigenden k, nehmen um 3 zu, weil die Producte selbst um $3.10 = 30$ zunehmen. Endlich, die *vorletzten* Ziffern der Producte aller ε, deren *letzte* Ziffer 9 ist, mit den wiederholt um 10 steigenden k, nehmen um 9 zu, weil die Producte selbst um $9.10 = 90$ zunehmen.

Man findet demnach die *vorletzten* Ziffern der Producte $k\varepsilon$ auch noch für alle $k > 10$ ganz einfach, wenn man die *vorletzten* Ziffern der Producte aller ε mit den *ersten vier* $k = 1, 3, 7, 9$, die sich nach (D) ergaben, quer durch die ganze Tafel,

(12.) {
Für alle ε, deren *letzte* Ziffer 1 ist, um 1,
Für alle ε, deren *letzte* Ziffer 3 ist, um 3,
Für alle ε, deren *letzte* Ziffer 7 ist, um 7 erhöht, oder auch um 3 erniedrigt u.
Für alle ε, deren *letzte* Ziffer 9 ist, um 9 sie erhöht, oder auch um 1 erniedrigt;

also überhaupt: *wenn man, jedesmal quer durch die ganze Tafel, die vorletzten Ziffern der Producte aller* ε *mit den vier ersten* $k = 1, 3, 7, 9$, *in den vier ersten senkrechten Spalten, wiederholt um die letzte Ziffer der nemlichen* ε *erhöht, oder auch, wenn diese letzte Ziffer* 7 *oder* 9 *ist, um* 3 *oder* 1 *sie erniedrigt.*

So ist die Tafel (II.) durch blosses *Abzählen* der *vorletzten* und durch bloss wiederholtes *Schreiben* der *letzten* Ziffern der Producte aufgestellt; und ganz eben so ist der *Probedruck* der Tafel (ohne Rücksicht auf die Handschrift) geprüft und berichtigt worden.

10.

Es kann jetzt die Beschreibung der weiteren Vollendung der Productentafel folgen. Sie mag durch *drei Beispiele* gegeben werden; nemlich für die kleinste in Betracht kommende Stammzahl $p = 7$, für den grösseren Stammfactor 83, und für den Stammfactor 1693, welcher für $B = 7$ Mill. schon fast zu den *grössten* gehört, und für welchen nicht einmal viel mehr als *eine* volle Seite der Productentafel nöthig ist.

I. Productentafel für die kleinste in Betracht kommende Stammzahl $p = 7$ (Taf. III.).

Ausser den E giebt die Tafel schon die *beiden letzten* Ziffern der Producte $P = p.E$, die für alle, je um 300 grössere E *dieselben* sind, in den Spalten η *gedruckt* an. Sie sind entweder, nach ihren 40 verschiedenen Arten, *zugleich* mit den ε oder E gedruckt worden, oder sie sind aus der Tafel (II) entnommen, indem man die, je zu den *beiden letzten Ziffern k von p* passenden senkrechten *Streifen* aus 10 Exemplaren von (Taf. II) abgeschnitten und auf die alsdann noch leeren 10 Streifen η der (Tafel III) aufgeheftet hat. Es kommt daher noch auf die *übrigen*, den beiden letzten vorhergehenden Ziffern der P an; die aber zufolge (§. 8) nicht ganz ausgeschrieben, sondern durch die *Nummer μ derjenigen Seite* der fertigen Factorentafel (I), auf welcher das P vorkommt, und durch die Zahl c, η oder z, welche sie *auf dieser Seite trifft*, und die immer kleiner als 3000 ist, ausgedrückt werden sollen.

Zum Beispiel für $p = 7$ und $E = 144\,179$ ist $P = p.E = 1\,009\,253$. Die beiden letzten Ziffern $\eta = 53$ dieses P findet man schon *gedruckt* neben $E = 144\,179$; wie es in (Taf. III) zu sehen ist. Aber statt die vordern Ziffern 10 092, selbst, von P, vor 53 zu schreiben, kann, wegen $1\,009\,200 = 336.3000 + 1200$, wie in (Taf. III), bloss $c = 12$ vor 53 geschrieben und dann die *Nummer* $\mu = 336$ der *Seite* von (Taf. I), auf welcher 1 009 253 vorkommt, auf irgend eine Weise (von welcher weiter unten Näheres) angegeben werden. Dann zeigt die Productentafel (III) an, dass die Zahl $P = p.E = 1\,009\,253$, welche die *Stelle* $1253 = z$ auf *Seite* $336 = \mu$ der Factorentafel einnimmt, *die beiden Factoren* $p = 7.E = 144\,179$ hat.

Es fragt sich also, wie die den beiden letzten vorhergehenden *zwei Ziffern* c von P, die nie über 30 steigen, also die *Hunderte* der *Tausende* von P, bis zu 3000, nebst den Nummern μ der Seiten der Factorentafel zu finden sind.

Für $p = 7$, wie für die folgenden *kleinen* Stammfactoren, ist Dies überaus leicht.

So lange nemlich, von $E = 1$ anfangend, $p.E = P$ nicht 100 übersteigt, also so lange die beiden letzten Ziffern von P, die in den Spalten η stehen, *zunehmen*, sind die *Hunderte* c Null; mithin ist vor den beiden letzten Ziffern $\eta = 0, 7, 49, 77$ und 91 von P, *Null* zu setzen. Sobald darauf die beiden letzten Ziffern η *abnehmen*, ist in der Spalte c, 1 zu setzen; und Dies so lange, als wieder die beiden letzten Ziffern η von P *steigen*; also vor $\eta = 19, 33, 61$. Vor die weiter folgenden letzten Ziffern $\eta = 0, 3, 17, 59, 87$ ist 2 zu setzen. Und so weiter, bis mit den Ziffern η die Zahl 30 erreicht ist; welches in (Taf. III), da geschieht, wo in der Spalte ε, 431 steht. Dann wird statt 30 wieder 0 gesetzt, wogegen die Seitenzahl μ der Factorentafel um 1 zunimmt. Erreichen die Hunderte c von P wieder 30, was in (Taf. III) neben $\varepsilon = 859$ geschieht, so nimmt die Seitenzahl μ der Factorentafel von Neuem um 1 zu. Und so weiter, bis zu Ende des Blatts der Productentafel.

So findet man für die *kleineren* Stammfactoren p *alles* noch Nöthige *ohne alle eigentliche Rechnung*, durch blosses *Abzählen*, und folglich zugleich mit grosser *Sicherheit*.

II. Productentafel für die grössere Stammzahl $p = 83$ (Taf. IV.).

Hier ist einige Rechnung nöthig; nemlich folgende.

Zunächst findet man 7, 11, 13, 17, 19, 23 und 29 *mal* 83, wenn man der Reihe nach 6, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2 *mal* 83 zu 83 addirt. Dies giebt, da $2.83 = 166$, $4.83 = 332$ und $6.83 = 498$ ist, Folgendes,

$$
(13.)\quad \left\{
\begin{array}{rcr}
1.83 & = & 83 \\
+\ 6.83 & = & 498 \\
\hline
=\ 7.83 & = & 581 \\
+\ 4.83 & = & 332 \\
\hline
=\ 11.83 & = & 913 \\
+\ 2.83 & = & 166 \\
\hline
=\ 13.83 & = & 1079 \\
+\ 4.83 & = & 332 \\
\hline
=\ 17.83 & = & 1411 \\
+\ 2.83 & = & 166 \\
\hline
=\ 19.83 & = & 1577 \\
+\ 4.83 & = & 332 \\
\hline
=\ 23.83 & = & 1909 \\
+\ 6.83 & = & 498 \\
\hline
=\ 29.83 & = & 2407 \\
+\ 2.83 & = & 166 \\
\hline
=\ 31.83 & = & 2573
\end{array}
\right.
$$

Die Zahlen c der *Hunderte* von

$$P = 83 \times (7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31) = p.E$$

sind also 5, 9, 10, 14, 15, 19, 24 und 25, die man in (Taf. IV) oben links in der Spalte c sieht.

Weiter finden sich die $P = 83.E$ für die übrigen $E < 300$, wenn man zu $83 \times (1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29)$, also zu 83, 581, 913, 1079, 1411, 1577, 1909 und 2407, wiederholt $30.83 = 2490$ addirt; wobei zu beachten ist, dass, sobald die Summen über 3000 steigen, die Seitennummer μ der Factorentafel um 1 steigt. Das wiederholte Addiren von $30.83 = 2490$ geschieht am leichtesten und sichersten, wenn man die Zahl 2490 auf den untern Rand eines Papiers schreibt, dasselbe, allmählig es weiter hinunterrückend, über Das, wozu 2490 zu addiren ist, hält und dann die Summen nimmt. Nemlich:

(14)

E	c,η	μ	E	c,η	μ	E	c,η	μ	E	c,η	μ
1	83	0	7	581	0	11	913	0	13	1079	0
31	2573	0	37	71	1	41	403	1	43	569	1
61	2063	1	67	2561	1	71	2893	1	73	59	2
91	1553	2	97	2051	2	101	2383	2	103	2549	2
121	1043	3	127	1541	3	131	1873	3	133	2039	3
151	533	4	157	1031	4	161	1363	4	163	1529	4
181	23	5	187	521	5	191	853	5	193	1019	5
211	2513	5	217	11	6	221	343	6	223	509	6
241	2003	6	247	2501	6	251	2833	6	253	2999	6
271	1493	7	277	1991	7	281	2323	7	283	2489	7
301	983	8	307	1481	8	311	1813	8	313	1979	8
17	1411	0	19	1577	0	23	1909	0	29	2407	0
47	901	1	49	1067	1	53	1399	1	59	1897	1
77	391	2	79	557	2	83	889	2	89	1387	2
107	2881	2	109	47	3	113	379	3	119	877	3
137	2371	3	139	2537	3	143	2869	3	149	367	4
167	1861	4	169	2027	4	173	2359	4	179	2857	4
197	1351	5	199	1517	5	203	1849	5	209	2347	5
227	841	6	229	1007	6	233	1339	6	239	1837	6
257	331	7	259	497	7	263	829	7	269	1327	7
287	2821	7	289	2987	7	293	319	8	299	817	8
317	2311	8	319	2477	8	323	2809	8	329	307	9

Die *beiden ersten Ziffern* dieser Summen sind die, welche in der *vordern Spalte c* von (Taf. IV) stehen. Es lassen sich hier die Summen auch *noch* leichter und ohne Hülfspapier finden, wenn man, statt 2490 zu *addiren*, fortgesetzt $3000 - 2490 = 510$ *subtrahirt* und μ um 1 erhöht, wenn c, η *abnimmt*.

Um für die *übrigen* Spalten die c der Tafel (die Hunderte der P) zu finden, nebst den μ, darf man nur zu den c und μ der *ersten* Spalte wiederholt $300.83 = 24900 = 8.3000 + 900$ addiren, also 8 zu der Seitenzahl μ der Factorentafel, und 9 zu den Hunderten c; was keines besondern Blattes zur Rechnung bedarf, und wobei nur wieder zu beobachten ist, dass, sobald die Zahl c der Hunderte 30 übersteigt, die Seitenzahl μ der Factorentafel um 1 *mehr* zunimmt. *Proben* geben die $E = 301, 307, 311$ etc. in (14). Wie leicht zu sehen, ergiebt sich für die erste wagerechte

(15ª.)		μ c	μ c	μ c	μ c	μ c	μ c	μ c	μ c	μ c	μ c
	Zeile der Tafel	0,0;	8,9;	16,18;	24,27;	33,6;	41,15;	49,24;	58,3;	66,12;	74,21;
	Für d. zweite Zeile	0,5;	8,14;	16,23;	25,2;	33,11;	41,20;	49,29;	58,8:	66,17;	74,26.

Statt der μ selbst sollen nur ihre *Zunahmen* vermerkt werden. Wie diese Zunahmen zu finden sind, ohne die μ *selbst* zu berechnen, wird sich deutlicher zeigen, bei der folgenden

III. Productentafel für die bedeutend grosse Stammzahl $p = 1693$ (Taf. V.).

A. Das Verfahren für $p = 1693$ ist dasselbe wie vorhin für $p = 83$. Da hier

$2.1693 = 3386 = N.1 + 386, 4.1693 = 6772 = N.2 + 772$ u. $6.1693 = 10158 = N.3 + 1158$

ist, so ist die Rechnung folgende:

(15.)

		c, η	μ
	1.1693 =	1693	0
+	6.1693 =	1158	3
=	7.1693 =	2851	3
+	4.1693 =	772	2
=	11.1693 =	623	6
+	2.1693 =	386	1
=	13.1693 =	1009	7
+	4.1693 =	772	2
=	17.1693 =	1781	9
+	2.1693 =	386	1
=	19.1693 =	2167	10
+	4.1693 =	772	2
=	23.1693 =	2939	12
+	6.1693 =	1158	3
=	29.1693 =	1097	16
+	2.1693 =	386	1
=	31.1693 =	1483	17

Also sind die ersten c links, oben, in der ersten Hauptspalte von (Taf. V.) = 16, 28, 6, 10, 17, 21, 29, 10. Die μ sind 0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, 16.

B. Die fernern c für die *erste* Hauptspalte findet man, nebst den μ, wenn man zu den ersten acht c und μ, $30.1693 = 50790 = 16.3000 + 2790$, also 2790 zu den c, η und 16 zu den μ wiederholt *addirt*, oder auch, was hier leichter ist, $3000 - 2790 = 210$ von den c wiederholt *abzieht* und dann μ *um* 1 *mehr*, also um 17 steigen lässt, falls c abnimmt.

Dies giebt:

(16.)

E	c, η	μ	E	c, η	μ	E	c, η	μ	E	c, η	μ
1	1693	0	7	2851	3	11	623	6	13	1009	7
31	1483	17	37	2641	20	41	413	23	43	799	24
61	1273	34	67	2431	37	71	203	40	73	589	41
91	1063	51	97	2221	54	101	2993	56	103	379	58
121	853	68	127	2011	71	131	2783	73	133	169	75
151	643	85	157	1801	88	161	2573	90	163	2959	91
181	433	102	187	1591	105	191	2363	107	193	2749	108
211	223	119	217	1381	122	221	2153	124	223	2539	125
241	13	136	347	1171	139	251	1943	141	253	2329	142
271	2803	152	277	961	156	281	1733	158	283	2119	159
301	2593	169	300	751	173	311	1523	175	313	1909	176

(16.)

E	c, η	μ	E	c, η	μ	E	c, η	μ	E	c, η	μ
17	1781	9	19	2167	10	23	2939	12	29	1097	16
47	1571	26	49	1957	27	53	2729	29	59	887	33
77	1361	43	79	1747	44	83	2519	46	89	677	50
107	1151	60	109	1537	61	113	2309	63	119	467	67
137	941	77	139	1327	78	143	2099	80	149	257	84
167	731	94	169	1117	95	173	1889	97	179	47	101
197	521	111	199	907	112	203	1679	114	209	2837	117
227	311	128	229	697	129	233	1469	131	239	2627	134
257	101	145	259	487	146	263	1259	148	269	2417	151
287	2891	161	289	277	163	293	1049	165	299	2207	168
317	2681	178	319	67	180	323	839	182	329	1997	185

Die beiden ersten Ziffern dieser Summen, $c = 14, 26, 4, 7, 15 \ldots$, in den auf die erste folgenden wagerechten Zeilen von (16), sind die übrigen 72 verschiedenen c in der *ersten* senkrechten Hauptspalte von (Taf. V).

C; Um die c in den *weitern* Hauptspalten zu finden, hat man wiederholt $300\,p = 300.1693 = 507900 = 160.3000 + 900$ zu P, also überall wiederholt 9 (900) zu den *vordern* c zu addiren; wobei wieder zu beobachten ist, dass, sobald die Summe 30 übersteigt, *statt ihrer der Ueberschuss über* 30 angegeben werden muss. Dies giebt also, z. B. für die erste wagerechte Zeile in (Taf.V.): $c = 16, 25, 4, 13, 22, 1, 10, 19, 28, 7$, für die zweite wagerechte Zeile: $c = 28, 7, 16, 25, 4, 13, 22, 1, 10, 19$ u. s. w.

D; Es kommt nun auch *auf die* μ an; und zwar *auf ihre Zunahmen*, die statt ihrer in die Tafel eingetragen werden sollen.

Für die *vordere* Hauptspalte giebt die Rechnung (16) alle μ selbst an, aus welchen also ihre *Zunahmen* unmittelbar *entnommen* werden können. Sie sind folgende:

(17.)

Für $\varepsilon =$	1	7	11	13	17	19	23	29	31	37 .....
$\mu =$	0	3	6	7	9	10	12	16	17	20 .....
Zunahmen von $\mu =$		3	3	1	2	1	2	4	1	3 .....

E; Aus diesen Zunahmen von μ und den zugehörigen c können die Zunahmen von μ in den *weitern* Hauptspalten, nachdem in dieselben alle c nach (C) eingetragen worden, nach einer sehr einfachen Regel gefunden werden, die auf folgender Erwägung beruht

Es sei für irgend ein E und p:

$$(18.) \qquad E.p = 300\,\mu + \lambda,$$

wo also λ die Zahl ist, welche in den Spalten c, η steht. Für das *nächst grössere*, unmittelbar *unter E* stehende E_1 sei das zu $E.p$ *hinzukommende*

$$(19.) \qquad (E_1 - E)p = 3000\varkappa + \tau;$$

wo also $\varkappa$ die *Zunahme von* μ bezeichnet. Dies giebt, wenn man (18 u. 19) addirt,

$$(20.) \qquad E_1 p = 3000(\mu + \varkappa) + \lambda + \tau.$$

Für das *um* 300 *grössere* $E + 300$, *wagerecht* neben E in der *nächsten* senkrechten Hauptspalte, sei

$$(21.) \qquad (E + 300)p = 3000\nu + \zeta,$$

wo wiederum ζ die Zahl ist, welche in den *nächsten* Spalten c, η steht. Um von diesem $(E+300)p$ zu dem wieder unmittelbar *darunter* stehenden $(E_1 + 300)p$ überzugehen, welches *zunächst grösser* als $(E + 300)p$ ist, muss man zu demselben das *nemliche* $(E_1 - E)p = 3000\varkappa + \tau(19)$, welches zu $Ep(18)$ addirt wurde, hinzuthun, denn es kommt zu $E.p$ und $E(p + 300)$ *das Gleiche* hinzu, weil E in beiden um *gleichviel* wächst. Also ist aus der Summe von (21 u. 19):

$$(22.) \qquad (E_1 + 300)p = 3000(\nu + \varkappa) + \zeta + \tau;$$

wo nun jetzt ν die *Zunahme von* μ bezeichnet.

Zusammen ist also

$$(23.) \begin{cases} 1.\ Ep = 3000\mu + \lambda\ (18) & 3.\ (E+300)p = 3000\nu + 3(21) \\ 2.\ E_1 p = 3000(\mu + \varkappa) + \lambda + \tau\ (20) & 4.\ (E_1 + 300)p = 3000(\nu + \varkappa) + \zeta + \tau (22) \\ & 5.\ (E_1 - E)p = 3000\varkappa + \tau \quad (19). \end{cases}$$

Die Zahlen λ, ζ und τ in (23, 1, 3, 5) sind *immer* kleiner als **3000**; **aber** $\lambda + \tau$ und $\zeta + \tau$ in (23, 2 u. 4) *können grösser* als 3000 sein. In diesem Fall müssen statt $\lambda + \tau$ und $\zeta + \tau$ *andere* Zahlen

$$(24.) \begin{cases} 1.\quad \lambda_1 = \lambda + \tau - 3000 \quad \text{und} \\ 2.\quad \zeta_1 = \zeta + \tau - 3000 \end{cases}$$

gesetzt werden, während zugleich $\mu + \varkappa$ und $\nu + \varkappa$, oder auch $\varkappa$, *um* 1 *erhöht wird*, so dass also dann, statt wie in (23, 2 u. 4):

$$(25.) \begin{cases} 1.\quad E_1 p = 3000(\mu + \varkappa + 1) + \lambda_1 \quad \text{und} \\ 2.\quad E_1 + 300) = (\nu + \varkappa + 1) + \zeta_1 \end{cases}$$

ist. Dann stehen die Zahlen λ_1 und ζ_1 in den Spalten c, η. Aber es ist noth-

wendig $\lambda_1 < \lambda$ und $\zeta_1 < \zeta$, weil in (24, 1 u. 2) $\tau - 3000$ *negativ* ist. Mithin: wenn von den beiden, in den Spalten c, η zunächst *unter einander* stehenden nemlich zu $E.p$ und $E_1.p$ gehörigen Zahlen λ und λ_1, oder auch von den beiden, in den Spalten c, η zunächst *unter einander* stehenden, zu $(E+300)p$ und $(E_1+300)p$ gehörigen Zahlen ζ und ζ_1 die *zweite kleiner ist, als die erste,* muss die *Zunahme* $\varkappa$ *von* μ *um* **1** *grösser* angenommen werden, als wenn, umgekehrt die zweite *grösser* ist, als die erste.

Daraus folgt nachstehende sehr einfache Regel für die Angabe der *Zunahmen* von μ:

F. „Nehmen die in den Spalten c, η irgend einer der Hauptspalten zunächst „*unter einander* stehenden Zahlen λ und λ_1 *zu*, oder *ab*, und die in der „nächsten Hauptspalte in c, η, wagerecht daneben, also gleichfalls zunächst „*unter einander* stehenden Zahlen ζ und ζ_0 *gleichfalls zu*, oder *ab*, so „nimmt in beiden Hauptspalten μ um *gleichviel* zu; denn entweder muss „in *beiden zugleich*, $\varkappa$ um 1 *erhöht*, oder *nicht* erhöht werden. Nimmt „*dagegen* λ in der einen Hauptspalte bis zu λ_1 *zu*, oder *ab*, während in der „nächsten Hauptspalte neben jener, ζ bis zu ζ_1 *ab-* oder *zu*nimmt, so nimmt „μ in derjenigen Hauptspalte, in welcher die in c, η stehenden Zahlen *ab-* „*nehmen*, um 1 *mehr zu*, als in der andern.

G. Nach dieser Regel lässt sich aus den in zwei aufeinander folgenden Hauptspalten in c, η unmittelbar unter einander stehenden Zahlen, und aus den in der *einen* Hauptspalte dazu gehörenden *Zunahmen von* μ, die Zunahme der μ in der *andern* Hauptspalte unmittelbar und *ohne alle Rechnung* finden. Und da nun die Zahlen der Spalten c, η schon sämmtlich eingetragen sind (die η gedruckt, die c nach (C), desgleichen die *Zunahmen der* μ in der *ersten* Hauptspalte nach (D)): so lassen sich die *Zunahmen der* μ für *alle übrigen* Hauptspalten nach der Regel (F) *unmittelbar hinschreiben.*

So z. B. sind die Zunahmen der μ, nebst den zugehörigen c, in den beiden zu 83 und 89 gehörigen wagerechten Reihen:

	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(25ª.)	2,25 ;	3,4 ;	2,13 ;	2,22 ;	3,1 ;	2,10 ;	2,19 ;	2,28 :	3,7 ;	2,16
	4,6 ;	3,15 ;	3,24 ;	4,3 ;	3,12 ;	3,21 ;	4,0 ;	4,9 ;	3,8 ;	3,27

Hier nimmt c in No. 1 *ab*, hingegen in No. 2 *zu*, also folgt daraus, dass die Zunahme von μ in No. 2 um 1 *kleiner* ist, als in No. 1. In No. 1, 4, 7 u. 8 nehmen die c *ab*, also sind die Zunahmen von μ in No. 1, 4, 7, 8 gleich 4; in No. 2, 3

5, 6, 9 u. 10 dagegen nehmen die *c zu*, also sind die Zunahmen von μ in No. 2, 3, 5, 6, 9, 10 gleich 3.

Die *Productentafeln* lassen sich demnach, wie man sieht, auf diese Weise für alle möglichen p, mit Hülfe von geringen Rechnungen, denen in (13, 14, 15, 16) ähnlich, sehr leicht und vollständig aufstellen; denn was ausser den bezeichneten Rechnungen dazu gehört, ist blosses *Abzählen* und *Schreiben*.

Die in (Taf. III, IV u. V) *über* die Spalten μ gesetzten Zahlen sind die einzelnen Summen der Zunahmen der μ, *also die* μ *selbst*. Warum diese Zahlen nicht von der ersten Seitennummer $\mu = 1$ der Factorentafel anfangen, wird sich weiter unten ergeben.

11.

Sind die *Productentafeln* für alle in Betracht kommenden p vollständig aufgestellt, so kann man nun von denselben für die *Factorentafel* folgenden Gebrauch machen.

Gesetzt es sei eine Tafel der mit 2, 3, 5 nicht aufgehenden Zahlen $Z=P = p.E$, bis zu der Grenze $Z = A$ *vollständig vorhanden*, so lässt sich dieselbe mittels der Productentafeln für die p, von $p = 7$ an bis $p < \sqrt{(7A)}$, unmittelbar und *ohne alle weitere Rechnung* auf folgende Weise *fortsetzen*.

Die Productentafeln geben nemlich alle $P = p.E$ für $p = 7,\ 11,\ 13 \ldots\ldots \sqrt{(7A)}$, *über A hinaus*, bis zu jeder beliebigen Höhe an, also auch die $P = Z$, welche in der *Fortsetzung* der vorhanden vorausgesetzten Factorentafel zwischen A und $7A$ liegen, folglich die *zwei Factoren* p und E aller dieser $P = Z$. Es lassen sich daher aus den Productentafeln in die Fortsetzung der Factorentafel nicht allein die p an allen den *Stellen* bis zu $7A$ eintragen, welche in den Productentafeln von den $P = p.E$ *getroffen* werden, sondern auch jedesmal der *andere* der beiden Factoren, $E = \frac{P}{p}$, ebenfalls aus den Productentafeln. Diese $E = \frac{P}{p}$ sind *nie grösser* als $\frac{7A}{7} = A$, weil kein p kleiner als 7 ist. Aber von allen diesen $E = \frac{P}{p} < A$ selbst, findet man auch in der, bis zu A reichenden Factorentafel alle *ihnen eigenen* Factoren: also kann man in die Fortsetzung der Tafel bis zu $7A$, *ohne weitere Rechnung*, einerseits aus den Productentafeln, andrerseits aus der bis A vorhandenen Factorentafel, unmittelbar, nicht bloss etwa die *beiden* Factoren p und E, sondern, nächst dem Factor p, auch noch sogleich alle die Factoren, *welche E selbst hat*, statt E, mithin *alle* Factoren der

Z eintragen. Mithin lässt sich so die Factorentafel von A bis $7A$ *vollständig fortsetzen.*

Nachdem jetzt die *Factorentafel* bis zu $7A$ erlangt ist, stelle man die *Productentafeln* weiter von $p = \sqrt{(7A)}$ bis zu $p = \sqrt{(7^2A)}$ auf. Dann lässt sich, aus denselben und aus der bis zu $7A$ erlangten Factorentafel, die letztere wieder ganz auf dieselbe Weise, wie es bis $7A$ geschahe, bis 7^2A fortführen.

Eben so ferner bis zu 7^3A, wenn man die Productentafeln von $p=\sqrt{(7^2A)}$ bis zu $p = \sqrt{(7^3A)}$ weiter berechnet. Und so fort, so weit man will.

12.

Wäre noch *gar keine* vollständige Factorentafel vorhanden, so müsste man wie so eben beschrieben verfahren.

Man könnte dann z. B. $A = 60$ setzen. Bis zu dieser Grenze ist die *vollständige Factorentafel* folgende:

(26.)

Z	E	p	Z	E	p
7	7	1	31	31	1
11	11	1	37	37	1
13	13	1	41	41	1
17	17	1	43	43	1
19	19	1	47	47	1
23	23	1	49	7	7
29	29	1	53	53	1
			59	59	1

Man stelle nun die *Productentafeln* für die $p = 7$ bis zu $p = 19$, welches zunächst kleiner als $\sqrt{(7A)} = \sqrt{420}$ ist, also für die $p = 7, 11, 13, 17, 19$ auf. Dieselben geben Folgendes:

(27.)

Für $p=7$ und $E=$	7,	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	49	53	59
ist $P = E.p =$	49,	77	91	119	133	161	203	217	259	287	301	329	343	371	413
Für $p=11$ u. $E=$	7	11	13	17	19	23	29	31	37						
ist $P = E.p =$	77	121	43	187	209	253	319	341	407						
Für $p=13$ u. $E=$	7	11	13	17	19	23	29	31							
ist $P = E.p =$	91	143	169	221	247	299	377	403							
Für $p=17$ u. $E=$	7	11	13	17	19	23									
ist $P = E.p =$	119	187	221	289	323	391									
Für $p=19$ u. $E=$	7	11	13	17	19										
ist $P = E.p =$	133	209	247	323	361										

Alle E in (27), mit Ausnahme des einzigen $E = 49$, sind zufolge (26) *Stammzahlen*; also haben alle P in (27), mit Ausnahme von $P = 343$, nur *zwei* Factoren. Bloss $E = 49$ in (27) hat in (26) die zwei Factoren 7 und 7, also hat $P = 343$ die *drei* Factoren 7, 7 und 7.

Die $P > 60 < 420$ in (27) treffen keinesweges *alle* die Zahlen Z in der Fortsetzung der Factorentafel. Es bleiben folgende Zahlen *unberührt*:

(28.) $Z =$ 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139
149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229 233
239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 337
347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419;

und daraus folgt, *dass alle diese Zahlen Stammzahlen* sind.

Die

(29.) $P =$ 77 91 119 133 143 187 209 221 247 und 323

kommen in (27) *zweimal* vor; was für jede eine *Probe* der Rechnung giebt.

So wäre nun die *Fortsetzung* der Factorentafel von 60 bis 420 *vollständig* erlangt, sobald aus (26 u. 27) die Factoren derjenigen $P = Z$, welche in (26 u. 27) getroffen werden, in dieselbe eingetragen sind. Diejenigen Z der Factorentafel, welche von den P in (26 u. 27) *nicht* getroffen werden, sind *Stammzahlen.*

Jetzt setze man die *Productentafeln* weiter für die p von 19 ab bis zu demjenigen $p = 53$ fort, welches zunächst kleiner als $\sqrt{(7^2 A)} = \sqrt{2940}$ ist, stelle sie also für $p = 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$ u. 53 auf. Dann lässt sich die Factorentafel aus denselben und aus der vorhin bis zu 420 vollendeten Factorentafel, ganz wie vorhin, weiter bis 2490 vollständig mit *allen* Factoren fortsetzen; wo sich dann schon öfter mehr als zwei Factoren für die P oder Z finden werden. Die unberührt bleibenden Z sind wieder *Stammzahlen.*

Ferner setze man die *Productentafeln* für die 18 verschiedenen p, von $p = 53$ ab bis zu demjenigen $p = 139$ fort, welches zunächst kleiner als $\sqrt{(7^3 A)} = \sqrt{20580}$ ist, und verfahre wie vorhin. Darauf für die 41 verschiedenen p, von $p = 139$ bis zu demjenigen $p = 379$, welches zunächst kleiner als $\sqrt{(7^4 A)} = \sqrt{144060}$ ist, und verfahre abermals wie vorhin. Endlich setze man die Productentafeln für die 93 verschiedenen p, von $p = 379$ ab bis zu demjenigen $p = 997$ fort, welches zunächst kleiner als $\sqrt{(7^5 A)} = \sqrt{1008420}$ ist, und verfahre von Neuem, wie vorhin.

Auf diese Weise würde man mit der vollständigen Factorentafel bis über 1 Million gelangen. Man setze nun ferner die Productentafeln für die 214 ver-

schiedenenen p von $p = 997$ bis zu demjenigen $p = 2633$ fort, welches zunächst kleiner als $\sqrt{(7 \text{ Mill.})}$ ist, so gelangt man, durch dieselben Mittel wie vorhin, mit der vollständigen Factorentafel bis zu 7 Mill. Und so ähnlich weiter, wenn man will, bis zu 49 Mill., 343 Mill. etc.

13.

So müsste man verfahren, wenn noch gar keine einigermassen ausgedehnte Factorentafel vorhanden wäre. Aber die Tafel von *Chernac*, die bis zu 1 Mill. und 20 Tausend reicht, *ist vorhanden*, und viel geprüft. Wäre sie aber auch nicht geprüft, so würde sie durch ihre Fortsetzung selbst zahlreiche und sehr scharfe Proben erfahren. Z.B. die Zahl $3\,236\,233 = 7.11.13.53.61$ wird von den 5 verschiedenen Productentafeln zu 7, 11, 13, 57, 61 *gleichmässig*, also 5 *mal* getroffen; es ist für $P = p.E = 3\,236\,233$:

$$(30.)\begin{cases} \text{Für } p = 7,\ E = 462\,319, \text{ welches } E \text{ also} = 11.\ 13.\ 53.\ 61 \text{ sein muss,} \\ \text{Für } p = 11,\ E = 294\,203, \text{ welches } E \text{ also} = 7.\ 13.\ 53.\ 61 \text{ sein muss,} \\ \text{Für } p = 13,\ E = 248\,941, \text{ welches } E \text{ also} = 7.\ 11.\ 53.\ 61 \text{ sein muss,} \\ \text{Für } p = 53,\ E = 61\,063, \text{ welches } E \text{ also} = 7.\ 11.\ 13.\ 61 \text{ sein muss,} \\ \text{Für } p = 61,\ E = 53\,035, \text{ welches } E \text{ also} = 7.\ 11.\ 13.\ 53 \text{ sein muss.} \end{cases}$$

Diese 5 *verschiedenen* E sind nun in der *Chernac*schen Tafel aufzusuchen; und in der That findet man, dass sie die nach (30) für die E nothwendigen Factoren angiebt. *Jedes* Z, welches *mehr als einen* verschiedenen Factor $p < 2633$ hat, wird von den Productentafeln *mehr als einmal* berührt; die zugehörigen E sind in der *Chernac*schen Tafel aufzusuchen, und geben also eben so viele *Proben*. Bloss diejenigen Z, welche *nur einen* Factor $p < 2633$ haben, werden von den Productentafeln *nur einmal* berührt. Der zweite Factor E soll dann eine *Stammzahl* sein. Aber auch Dies giebt eine Probe der *Chernac*schen Tafel. Dieselbe muss nemlich für E *wirklich* eine Stammzahl anzeigen; und ob diese richtig gedruckt sei, findet sich daraus, dass sie *in die Reihe* der nicht mit 2, 3, 5 aufgehenden Zahlen E, welche alle ohne Ausnahme in der Tafel vorkommen, passen muss.

Die *Chernac*sche Tafel wird also *durch ihre Fortsetzung selbst* (vorausgesetzt natürlich, dass in den Productentafeln kein Fehler blieb) *durchweg* und *vielfältig* geprüft. Auch werden, umgekehrt, durch die *Chernac*sche Tafel etwaige Fehler in den *Productentafeln* entdeckt. Denn giebt eine Productentafel ein unrichtiges $P = pE$ an (die p und E können nicht unrichtig sein, weil sie *gedruckt* sind und also, wenn sie für eine Stelle unrichtig wären, es *überall* sein

müssten): so wird das unrichtige P von den Factoren, welche die *Chernac*sche Tafel für das zugehörige E giebt, nicht wie es sein müsste, getroffen werden.

Es ist daher durchaus nicht nöthig, die *Chernac*sche Tafel nach (§. 13) *von Neuem* aufzustellen. Dies würde nur dann nöthig sein, wenn sich darin *zahlreiche* Fehler fänden; worauf man aber bisher nicht gestossen ist. Man darf also ohne Bedenken die *Chernac*sche Tafel *bloss fortsetzen.*

Dass *jede* Fortsetzung einer Factorentafel durch das beschriebene Verfahren, zufolge (§. 13.) immer nur bis zum *7fachen* Umfang gehen kann, ist der Grund, weshalb in (§. 4.) angenommen wurde, dass man die *Chernac*sche Tafel zunächst grade bis zu 7 *Millionen* fortzusetzen haben dürfte; worauf man dann, wenn man will, bis zu **49**, **343** u. s. w. Millionen gehen kann.

14.

Für die *Fortsetzung der Chernac*schen *Tafel* ist nun Folgendes zu bemerken.

A. Angenommen, dass man die Tafel *ganz so weit sie reicht*, also bis zu

$$(31.) \qquad A = 1020000$$

benutzen wolle, so ist die erste Seite der Fortsetzung *die* 341 *te* von Anfang, die aber aus den Gründen in (§. 8.), nemlich damit die *Seitenzahl* der Factorentafel unmittelbar *die Zahl* μ in $P = p.E = 3000\,\mu + Z$ (8) ausdrücke, nicht die Nummer 341, sondern die *Nummer* 340 erhält. Die *Chernac*sche Tafel, so wie (Taf. I.) gedruckt, würde $\frac{1020000}{3000} = 340$ Seiten füllen.

B. Da nun die Productentafeln dazu bestimmt sind, für bestimmte p und E die *Stellen* anzugeben, an welchen die $pE = P$ oder Z in der *Factorentafel* stehen, um dann an diese Stellen p, nebst den aus der *Chernac*schen Tafel zu nehmenden Factoren von E setzen zu können, so kommt es zunächst auf *die Stelle der ersten Seite der Fortsetzung der Factorentafel* an, in welche p *zum erstenmal* zu setzen ist; so wie auf das zugehörige E.

C. Da die E in den *Productentafeln*, auf jeder Seite derselben, für jedes p um 3000 fortschreiten, so darf man an die Spitze der C nur eine Zahl λ setzen, welche *mit* 3000 *aufgeht* und für welche dann zugleich $p\lambda < A$, hingegen $p(\lambda + 3000) > A$ ist, damit das $P = p.E$ oder Z, welches *zunächst* grösser als A ist, auf der vorliegenden Seite *vorkomme.*

Diese Zahl λ ist für $p = 7$, also für (Taf. III), $= 144000$, denn $p\lambda = 7.144000 = 1008000$ ist kleiner, hingegen $7.(144000 + 3000) = 1029000$ grösser als $A = 1020000$. Deshalb ist in (Taf. III)

(32.) $\lambda = 144\,000$

an die Spitze der E gestellt.

Für $p=83$ ist $\lambda = 12\,000$; denn $p\lambda = 83.12000 = 996\,000$ ist kleiner, hingegen $83(12\,000+3000) = 1\,245\,000$ grösser als A. Deshalb steht in (Taf. IV)

(33.) $\lambda = 12\,000$

an der Spitze der E.

Für $p = 1693$ ist $\lambda = 0$, denn $p\lambda = 169.30 = 0$ ist kleiner, hingegen $1693(0+3000) = 5\,079\,000$ grösser als A, und deshalb steht in (Taf. V)

(34.) $\lambda = 0$

an der Spitze der E.

Die λ, mit den in den Spalten ε stehenden Zahlen *zusammengezählt*, drücken nun *alle* E auf der vorliegenden Seite der Productentafel aus. Reicht die vorliegende Seite nicht aus, so muss man λ für jede folgende Seite um **3000** vergrössern.

D. Da jetzt das *erste* $E = \lambda + 1$ auf der *vorliegenden* Seite der Productentafel *bestimmt* ist, so ist es auch das zugehörige $P = p.E = p(\lambda + 1)$; und dieses P oder Z steht, wenn man

(35.) $p(\lambda+1) = 3000\mu + z$

setzt, auf der μ^{ten} Seite der Factorentafel, für deren erste Seite, nach (A u. §. 8), $\mu = 0$ ist.

Für $p = 7$ ist $p(\lambda+1) = 7.144\,001\,(32) = 1\,008\,007 = 3000.336+7$, also ist nach (35) $\mu = 336$, und demnach steht in (Taf. III)

(36) $\mu = 336$

über der ersten der Spalten μ, welche die *Zunahme* der μ angeben; für die erste *Zunahme* von μ aber steht 0.

Für $p = 83$ ist $p(\lambda+1) = 83.(12000+1)\ (33) = 996001$, also ist nach (35), $\mu = 332$, und daher steht in (Taf. IV)

(37.) $\mu = 332$

über der ersten der Spalten μ, und für die erste *Zunahme* von μ steht wieder 0.

Für $P = 1693$ ist $P\ (\lambda+1) = 1693\ (0+1)\ (34) = 1693$; also ist nach (35) $\mu = 0$ und daher steht in (Taf. V)

(38.) $\mu = 0$

über der ersten der Spalten μ, und für die erste *Zunahme* von μ steht wieder 0.

E. Nachdem so das *erste* μ der Fortsetzung der *Chernac*schen Tafel bestimmt worden ist, ergeben sich, wenn man fortwährend die in den Spalten μ angegebenen *Zunahmen* von μ *hinzuthut*, die μ für *alle E*. Dies giebt die (Taf. III, IV, V) über *jedem Hundert* vermerkten μ; und eine Probe ist, dass das μ am Ende des letzten, 29 ten Hundert, nebst der für den Uebergang von 2999 zu 3001 noch hinzukommenden Zunahme von μ, (nach §. 8, 9) ein μ geben muss, welches *um P grösser ist* als das erste anfängliche.

In Taf. III.) beträgt μ für das 29te Hundert 342, und die Zunahme von 2999 bis 3001 noch 1, weil grade dort die Zahl η *abnimmt*; demnach ist μ für die nächste Seite der Productentafel = 343; und Dies ist um $p=7$ grösser als 336.

In (Taf. IV.) beträgt μ für das Ende des 29 ten Hunderts 414, und es wäre also, da noch 1 hinzukommt, indem die Zahlen c, η von 2999 bis 3001 *abnehmen*, für die nächste Seite der Productentafel $\mu = 415$; was um 83 grösser ist als 332.

In (Taf. V.) beträgt μ am Ende des 29 ten Hunderts 1692, und von 2999 bis 3001 kommt (eben wie von 299 zu 301) nach (16 §. 10) noch 1 hinzu; also wäre μ für die nächste Seite der Productentafel = 1693; was, wie gehörig, um $p = 1693$ grösser ist als 0.

F. Aus den jetzt für alle *E* der Productentafeln angegebenen μ findet sich nunmehr von selbst die *Stelle der ersten Seite der Fortsetzung der Chernacschen Factorentafel, an welcher zum erstenmale p als Factor zu setzen ist*; *nebst dem zugehörigen E*. Sie ist diejenige, wo in der Productentafel μ die Nummer 340 der *ersten* Seite der Fortsetzung der Factorentafel *erreicht* (nach der von 0 statt 1 anfangenden Nummerirung, gemäss *A*) oder auch zuerst sie *überschreitet*, und das zugehörige *E* steht daneben.

In (Taf. III.) *erreicht* μ die Zahl 340 für $E = 145\,716$ und c, η ist $= 19$, also steht $p = 7$ auf Seite 340 der Factorentafel *zuerst* in dem Fach 19. In der That ist $7 . 145\,717 - 1\,020\,019 = 340 . 3000 = 19$,

In (Taf. IV) *erreicht* μ die Zahl 340 für $E = 12293$, und c, η ist $= 319$, also steht $p = 83$ auf Seite 340 der Factorentafeln *zuerst* in dem Fach 319. In der That ist $83 . 12293 = 1\,020\,319 = 340 . 3000 + 319$.

In (Taf. V.) *überschreitet* μ die Zahl 340 zuerst für $E = 607$, und zwar um 2, und c, η ist $= 1651$, also steht $p = 1693$ auf Seite $340 + 2 = 342$ der Factorentafel *zuerst* in dem Fach 1651. In der That ist $1693 . 607 = 1\,027\,651 = 342 . 3000 + 1651$.

15.

Nunmehr kann die Fortsetzung der *Chernac*schen Factorentafel, aus ihr selbst und aus den Productentafeln, *ohne alle weitere Rechnung*, bloss ***ausgeschrieben*** werden.

Die *Productentafel* nemlich giebt durch die μ und die c, η die Nummer der Factorentafel und das Fach an, in welchem auf derselben Z oder $P = p.E$ steht; die Factoren von E aber giebt die *Chernac*sche Tafel an, und es gelangen in derselben alle der Reihe nach auf einander folgenden E, von dem ersten an, welches in Betracht kommt, bis $\frac{B}{p} = \frac{7000000}{p}$ zur Anwendung; denn alle diese E folgen auch in der Productentafel *in derselben Ordnung unmittelbar auf einander.* Es ist daher nichts weiter nöthig, als p an die durch die c, η angegebenen Stellen der Factorentafel mit μ zu schreiben und aus der *Chernac*schen Tafel die Factoren der zugehörigen E dazu zu setzen.

So z. B. giebt die Productentafel für $p = 7$ und μ 340 der Reihe nach

(39.)							
	$E =$	145717	145721	145723	145727	145729	145733 .....
	$c, \eta =$	19	47	61	89	103	131 .....
	also $Z =$	1020019	1020047	1020061	1020089	1020103	1020131 .....
	Nach der *Chernac*schen Tafel ist $E =$	11.13.1019	145721	145723	43.3389	61.2389	7.109.191 .....
	also ist $Z =$	7.11.13.1019	7.145721	7.145723	7.43.3389	7.61.2389	7^2.109.191 .....

und so weiter.

16.

Bei den E und ihren Factoren lässt sich nicht leicht fehlen, da sie in der *Chernac*schen Tafel *alle ohne Ausnahme und der Reihe nach* genommen werden. Nur bei den Z ist Aufmerksamkeit nöthig, dass man aus der Productentafel die *Seitenzahl* μ der Factorentafel und die *Stelle* c, η auf derselben, zu den auf einander folgenden E richtig entnehme. Aber auch in der Seitenzahl μ der Factorentafel lässt sich, für diejenigen p, welche auf einer und derselben Seite noch *mehr als einmal* vorkommen (was noch bis zu $p < 300$ der Fall ist, da der *zweimalige* grösste Fortschritt der E, $6 + 4 = 0$ ist) nicht leicht irren, indem sich der Uebergang von einer Tafel zur nächsten aus dem *Abnehmen* der c, η von selbst ergiebt; bloss für die $p > 300$ ist eine besondere Aufmerksamkeit auf die Seitenzahl μ der Factorentafel nöthig.

Die Mühe des obigen *Eintragens* der p aus der Factorentafel der zugehörigen E nimmt, so wie p steigt, *schnell ab*. Und schon durch $p = 7$ *ganz allein* wird

ein *bedeutender* Theil der Felder der Factorentafel gefüllt. Ehe nemlich $7.E$ über 3000 steigt, muss E um 429 zugenommen haben, und in diesem Umfange liegen etwa 114 verschiedene E: also kommt 7 auf jeder Seite der Factorentafel an 114 mal als Factor vor. Da sich nun ausserdem in dem Umfange von 3000, selbst für die Zahlen über 1 Mill. hinaus, noch mehr als 200 *Stammzahlen* befinden, so bleiben, nachdem bloss erst das $p = 7$ eingetragen worden ist, von den 800 Feldern einer Factorentafelseite nur noch etwa 500 Felder durch *alle übrigen* p zu füllen übrig.

Je mehr aber p zunimmt, je seltener nicht allein kommt es vor (z. B. $p =$ 101 kommt nur noch etwa 8 mal auf einer Seite der Factorentafel vor), sondern je weniger ist auch sonst noch zu *schreiben* nöthig, weil schon vorher viele kleinere p *dieselben* Stellen der Factorentafel berührt und sie gefüllt *haben*; was eben die oben gedachten *Proben* giebt. Die Mühe des Eintragens der Ergebnisse der Productentafeln in die Factorentafel ist also nicht übermässig gross.

Die Productentafeln bleiben für jede noch so hohe Ausdehnung der Factorentafel *unverändert dieselben*. Sie sind immer nur bis $p = \sqrt{A}$ *fortzusetzen* nöthig, und auch jedes höhere p erfordert, wie man oben sahe, immer *nur eine einzige Seite*. Für $A = 7$ Mill. muss man nach (§. 4) mit p bis zu $\sqrt{7}$ Mill. $= 2633$ gehen, und es sind also dazu, wie in (§. 6) bemerkt, 379 Productentafeln nöthig. Für $A = 49$ Mill. muss man bis zu $p = \sqrt{49}$ Mill. $= 7000$ gehen; und in diesem Umfange befinden sich 897 Stammzahlen, so dass bis zu $A = 49$ Mill. 897 Productentafeln nöthig sein würden, mithin nur noch $897 - 379 = 518$ *neue* Tafeln, zu denen für $A = 7$ Mill.

Das Eintragen der p und der Factoren der zugehörigen E in die Factorentafel wird sehr erleichtert und gesichert werden, wenn sich *zwei* Personen in die Aufgabe theilen, deren eine aus den Productentafeln die E, die μ und die c, η angiebt, die andre die Factoren der E aus der *Chernac*schen Tafel nimmt und sie, nebst dem p, in die Fortsetzung der Factorentafel *einschreibt*. Das Werk wird dann um so zuverlässiger werden, und so *schnell* von Statten gehen, wie sich die Zahlen in der Fortsetzung der Factorentafel *schreiben* lassen.

17.

Das ganz ausgefüllte Blatt (Taf. I) ist bestimmt, das Beispiel einer der *fertigen* Seiten der *Factorentafel* zu geben. Hätte man die *Productentafeln* für alle, z. B. bis zu 7 Millionen in Betracht kommenden p hier aufgestellt vor sich, so hätte zu dem Beispiel irgend eine *beliebige* Seite der *Fortsetzung* der

Factorentafel genommen werden können; z. B. grade die *erste* Seite der Fortsetzung, von welcher insbesondere in (§. 15) die Rede war. Da indessen hier nur erst die Productentafeln für die drei $p = 7$, 83 und 1693 in (Taf. III, IV und V) vorliegen, so ging Dies nicht an, und man konnte das Beispiel nur *ganz* aus der *Chernac*schen Tafel selbst nehmen. Von dieser stellt (Taf. I) diejenige Seite ($\mu = 339$) vor, welche der *ersten* Seite No. 1 ($\mu = 340$) der *Fortsetzung* der Tafel, von 1 020000 an, *unmittelbar vorangeht*, also von 1 017 000 bis zu 1 020000 sich erstreckt, mithin noch ganz im Umfange der *Chernac*schen Tafel liegt.

Die Productentafel für $p = 7$ (Tafel III) zeigt nun hier, dass $p = 7$ auf *dieser* Tafel um *eine* Seite der Factorentafel *früher* zum erstenmale vorkommen muss, als auf der ersten Seite der *Fortsetzung* der Tafel, also nicht wie auf dieser, für $E = 144000 + 1500 + 217 = 145\,717$ und für $Z = 3000.340 + 19 = 1020019$, sondern für $E = 144000 + 1200 + 89 = 145289$ und für $Z = 3000.339 + 23 = 1017023$. Darauf kommt $p = 7$ der Reihe nach für *alle* E der *Productentafel* und für alle, dieser gemäss ihnen zugehörigen Z der *Factorentafel* vor, also der Reihe nach für

(40.)						
	$E =$	145 289	145 291	145 297	145 301	145 303.....; und
	$Z =$	1 017 023	1 017 037	1 017 079	1 017 107	1 017 121.....;
	$=$	7.145 289	7.145 291	7.145297	7.145 301	7.145 303...., und, die
		die Factoren der E gesetzt,				
	$=$	7.145 289	7.23,6317	7.31.43.109	7.7.13.11177	7.145 503.....;

und so verhält es sich auf dem Blatt (Taf. I) wirklich.

Die Productentafel für $p = 83$ (Taf. IV) zeigt, dass $p = 83$, nicht wie auf der ersten Seite der *Fortsetzung* der Factorentafel, für $E = 12000 + 293 = 12293$ und $Z = 3000.340 + 319 = 1020319$, sondern um *eine Seite früher*, also für $E = 12000 + 257 = 12257$ und $Z = 3000.339 + 331 = 1020331$ zum erstenmal vorkommen muss. Darauf kommt $P = 83$ für *alle* E der *Productentafel* und für alle zugehörigen Z der *Factorentafel* vor, also der Reihe nach für

(41.)						
	$E =$	12 257	12 259	12 263	12 269	12 271..... und
	$Z =$	1 017 331	1 017 497	1 017 829	1 018 327	1 018 493.....
	$=$	83.12 257	83.12 259	83.12 263	83.12 269	83.12 271..... und die
		Factoren von E gesetzt.				
		83.7.17.103	83.13.23.41	83.12 263	83.12 269	83.7.1753.....

und so verhält es sich auch auf dem Blatt (Taf. I).

Die Productentafel für $p = 1693$ (Taf. V) zeigt, dass $p = 1693$ auf der ersten Seite ($\mu = 340$) der Fortsetzung der Factorentafel *gar nicht* vorkommt, sondern erst auf der folgenden Seite ($\mu=341=338+3$), für $Z=p.E=1693.607$, also für $E=607$. Das zunächst 607 vorhergehende E ist $= 601$ und 601.1693 ist der Productentafel zufolge $= 339.3000 + 493 = 1\,017\,493$. Also kommt $p = 1693$ in (Taf. I) ($\mu = 339$) für $Z = 1\,017\,493$ vor; wie es auch der *Chernac*schen Tafel gemäss ist; darauf zunächst erst auf der dritten, folgenden Seite ($\mu = 342$) für $Z = 607.1693 = 1\,027\,651$. Und so weiter.

Die *Stammzahlen* bezeichnet *Chernac* durch einen starken Strich ———. Es lässt sich aber der für die Stammzahlen leer bleibende Raum recht gut *benutzen*, um anzuzeigen, welche *der vier Formen* $8n + 1, 3, 5, 7$ die Stammzahl habe. Deshalb ist in (Taf. I) bei den Stammzahlen, statt eines Strichs, p_1, p_3, p_5 oder p_7 gesetzt worden; je nachdem die Stammzahl diese oder jene ihrer vier Formen hat.

18.

Vielen Lesern dieses Journals wird es vielleicht scheinen, die vorstehende Erörterung des an sich so sehr einfachen Gegenstandes sei zu ausführlich, und strebe allzusehr nach Deutlichkeit. Aber einestheils hat der Herausgeber dieses Journals die Ueberzeugung, dass es *Pflicht* jedes mathematischen Schriftstellers sei, Das was seinen Lesern nutzen kann, ihnen so deutlich zu machen, dass sie es mit der möglich-geringsten Mühe und Anstrengung zu verstehen vermögen, und er ist seinerseits, bei Allem was er veröffentlichte, nach dieser seiner Ueberzeugung zu verfahren bestrebt gewesen; anderntheils ist der obige Vortrag nicht bloss für wirkliche Mathematiker bestimmt, die sich schwerlich mit der Aufstellung einer Factorentafel beschäftigen werden, weil sie ihre Zeit wirksamer anwenden können, sondern auch für Personen, die nur insbesondere geübte und zuverlässige *Zahlenrechner* sind, und von welchen zu erwarten ist, dass sie sich mit einer Factorentafel beschäftigen dürften. Für diesen Zweck aber musste der Vortrag noch um so nothwendiger deutlich sein.

Niemand dürfte wohl geeigneter sein, eine Fortsetzung der Factorentafel zu unternehmen, als der allbekannte und berühmte Rechenkünstler Herr *Dase*, welcher Zahlenrechnungen zu seinem Lebensberuf gemacht hat. Und der Herausgeber hat wirklich hier, für die Factorentafel, an ihn vorzugsweise gedacht; um so mehr, da Herr *Dase*, wie er erklärt hat, beabsichtigt, eine Factorentafel der Zahlen bis zu 30 Millionen zu berechnen. Möchte er diesen Vorsatz ausführen; möchte aber auch zuvor, damit es ihm möglich sei, seine Zukunft durch ein

festes Einkommen ihm gesichert werden. Herr *Dase* verdient die Erfüllung dieses Wunsches ohne allen Zweifel; denn sein Talent für das Rechnen mit Zahlen ist, wie allbekannt, so überaus, ja selbst so unbegreiflich gross, dass sich dreist behaupten lässt, es sei in diesem Maasse vielleicht noch nie da gewesen, und werde vielleicht in Jahrhunderten nicht wiederkehren. Ein solches Talent aber kann nicht bloss für den obigen Gegenstand, sondern für gar mancherlei mathematische Dinge ungemein nutzbar werden. Schon aus dem Gesichtspuncte der *Nützlichkeit* wäre es daher wahrhaft *schmerzlich*, wenn ein solches Talent unbenutzt zu Grunde gehen sollte.

Uebrigens sieht man aus der obigen Auseinandersetzung, dass sie, obgleich der Gegenstand derselben an sich so sehr einfach ist, doch allerdings auch einige mathematische Ueberlegung erfordert, um nicht bloss die möglichste *Erleichterung*, sondern auch, und vorzüglich, die möglichste *Sicherheit* der Rechnungen zu erlangen. Es ist hier ein Fall, wo die Mathematik ihrer eigenen Sache dient; gleichsam die Theorie der Ausübung. Solche Anwendungen der Mathematik sind sicherer als die auf Gegenstände im Leben ausser ihr, wo sie meistens nur auf mehr oder weniger ungewisse Voraussetzungen (Hypothesen) sich beziehen kann.

19.

Es dürfte für den Fall, dass Aussicht zum *Zustandekommen* der Fortsetzung der Factorentafel bis zu 7- und bis zu 49 Millionen vorhanden sein sollte, nöthig sein, so gut es angeht, zu überschlagen, wieviel *Geld* und *Zeit* dazu erforderlich sein dürfte. Es soll Dies hier geschehen; und zwar zunächst in der Voraussetzung, dass die Aufstellung des *Manuscripts* der Tafel von Jemand unternommen werde, dessen Bestehen schon gesichert ist, so dass die Kosten der Berechnung nicht in Anschlag kommen, sondern nur die *baaren Auslagen*. Dann soll auch ein Ueberschlag der Kosten der *Veröffentlichung* der Tafel beigefügt werden, um zu sehen, ob dieselbe im Wege des Buchhandels *möglich* sei.

I. Aufstellung der Handschrift der Factorentafel.

Erstlich, von einer Fortsetzung der Factorentafel bis zu 7 Millionen.

A; *Die Tafel* (*II.*) der beiden letzten Ziffern der Producte der 40 ungeraden Zahlen k (5 §. 7) < 100 in die 80, nicht mit 2, 3 und 5 aufgehenden Zahlen E (1 §. 6) < 300 ist hier schon aufgestellt; und wäre das nicht, so würde es in *einem* Tage geschehen können. Von dieser Tafel sind nach (§. 7) so viele Exemplare zu drucken, dass daraus für jede der nach (§. 6) in Betracht kommenden

379 Stammzahlen 10 *gleiche* Streifen abgeschnitten werden können, um sie auf die 379 *Productentafeln* aufzuheften. Die meisten $p < \sqrt{7}$ Mill. haben, wie aus (6 §. 7) zu sehen, *die Zahl* 83 zu ihren beiden letzten Ziffern, nemlich ihrer 14 zu jeder *Productentafel*: also auch für jede mit 83 endigende Stammzahl sind 10 gleiche Streifen aus (Taf. II.) nöthig, also müssen zu den 14 verschiedenen auf 83 endigenden $p < \sqrt{7}$ Mill. 140 Exemplare von (Taf. II.) vorhanden sein. Diese liefern dann auch, mehr als hinreichend, die Streifen für alle übrigen p mit andern letzten Ziffern als 83, denn alle diese kommen weniger oft vor. Die 140 Exemplare von (Taf. II.) würden kosten:

Das Zeichnen der Tafel auf Stein	4 Thl.	—	Sgr.
140 Abdrücke davon, zu 20 Sgr. das Hundert	1 „	10	„
3 Buch Papier dazu (auf *einer* Seite zu bedrucken) zu 7½ Sgr.	– „	22½	„
Thut	6 Thl.	2½	Sgr.

B. Zu den 379 *Productentafeln*, die der Rechner *auszufüllen* hat, und auf welche vorher die Streifen aus (Taf. II.) von einem Buchbinder aufgeheftet werden, sind die Zahlen ε, nebst den Linien, die für alle *dieselben* bleiben, *nur einmal* auf Stein zu zeichnen nöthig, und dann sind 379, in runder Zahl 400 Abdrücke davon zu machen. Dies würde kosten:

Für das Zeichnen der Tafel auf Stein	3 Thl.	—	Sgr.
400 Abdrücke davon, zu 20 Sgr. das Hundert	2 „	20	„
9 Buch auf *einer* Seite zu bedruckendes Papier zu 7½ Sgr.	2 „	7½	„
Für d. Aufheften d. Streifen aus (Taf. II.) auf 379 Tafeln z. 2½ Sgr.	31 „	17½	„
Thut	39 Thl.	15	Sgr.

An *Zeit* wird der Rechner, nach dem Versuch welchen der Herausgeber an den Tafeln (III. IV. V.) gemacht hat, *im Durchschnitt* 2 Stunden zu jeder Tafel brauchen, also zu 379 Tafeln (10 Arbeitsstunden auf den Tag gerechnet) 76 Tage.

C. Zu der Fortsetzung der *Factorentafel selbst*, um 6 Mill., sind, da jede Tafelseite um 3000 fortschreitet, 2000 Seiten, also, da hier das Papier recht gut auf *beiden* Seiten bedruckt werden kann, 500 Bogen oder 22 Buch Papier nöthig. Auf Stein ist die Tafel mit den Zahlen E und den Linien *nur einmal* zu zeichnen nöthig. Indessen wird es hier besser sein, auf einen und denselben Stein die Tafel *zweimal*, neben einander gestellt, zu zeichnen, damit zwei Tafeln zugleich abgedruckt werden können. Die Kosten würden folgende sein:

Für das zweimalige Zeichnen der Tafel auf Stein	6 Thl.	—	Sgr.
Für 22 Buch Papier, zu 7½ Sgr.	5 „	15	„
1000 Abdrücke d. Steinzeichnung zu machen, z. 1 Thl. d. Hundert	10 „	—	„
Thut	21 Thl.	15	Sgr.

An *Zeit* hat der Herausgeber zum Ausschreiben von (Taf. V.) aus der *Chernac*schen Tafel und zum Hinzufügen der p, 2½ Stunden nöthig gehabt. Das Ausschreiben aus *zwei verschiedenen* Tafeln, der *Chernac*schen und der Productentafel, wird zwar etwas mehr Zeit erfordern, aber wegen der Uebung, und in Erwägung, dass der Herausgeber, wegen seiner gelähmten Hand, nur langsam schreiben konnte, werden *auch dazu* 2½ Stunden für eine Tafelseite hinreichen; und mit einem *Vorleser* noch weniger. Also werden wenigstens 4 *Tafelseiten* in einem Tage ausgefüllt werden können; mithin würden zu dem Schreiben der 2000 Tafelseiten 500 Tage nöthig sein.

Zusammen also würden die zur Fortsetzung der *Chernac*schen Tafel um 6 Mill. nöthigen *Kosten* und *Zeit* folgende sein:

Zu (*A*.)...............	6 Thl.	2½ Sgr.	und	1	Tag	Zeit;
Zu (*B*.)...............	39 „	15 „	„	76	„	„
Zu (*C*.)...............	21 „	15 „	„	500	„	„
Thut zusammen	67 Thl.	2½ Sgr.	und	577	Tage	oder höchstens 2 Jahre Zeit.

Beides, Kosten und Zeit sind, wie man sieht, nicht bedeutend.

Zweitens. Eine Fortsetzung der Factorentafel bis zu 49 *Millionen.*

D. Für (*A*) kommt von (Taf. II.) bloss Das in Anschlag, was zu den nach (§. 16) hier in Betracht kommenden 518 *mehreren* $p < \sqrt{49}$ Mill. nöthig ist. Dieses dürften 10.25 = 250 Exemplare von (Taf. II.) sein, und diese würden kosten:

Für 6 Buch Papier zu 7½ Sgr..........	1 Thl.	15 Sgr.
250 Abdrücke, zu 20 Sgr. das Hunder	2 „	— „
Thut	3 Thl.	15 Sgr.

E. Für (*B*) sind nöthig zu den 518 mehreren p:

12 Buch Papier, zu 7½ Sgr..................................	3 Thlr.	– Sgr.
518 Abdrücke, zu 20 Sgr. das Hundert...............	4 „	– „
Für das Aufheften d. Streifen auf 518 Tafeln, zu 2½ Sgr.	43 „	5 „
Thut	50 Thlr.	5 Sgr.

An *Zeit* zur Ausfüllung der 518 mehreren Productentafeln, zu 5 Seiten täglich, würden nöthig sein 104 Tage

F. Zur Fortsetzung der Factorentafel von 7 bis 49 Mill., also um 42 Mill., sind nöthig 14000 Seiten, also 3500 Bogen oder

150 Buch Papier zu 7½ Sgr...	37 Thlr.	15 Sgr.
7000 Abdrücke d. doppelt gezeichneten Tafel, zu 1 Thlr. d. Hund.	70 „	— „
Thut	107 Thlr.	15 Sgr.

An *Zeit* zur Ausfüllung von 14000 Seiten Tafeln, zu 4 Seiten täglich, 3500 Tage.

Zusammen also würde die *weitere* Fortsetzung der Factorentafel von 7 bis zu 49 Mill. erfordern:

Zu (*D*)	3 Thlr.	15 Sgr.			
Zu (*F*)	50 „	5 „	und	104	Tage Zeit;
Zu (*D*)	107 „	15 „	und	3500	Tage Zeit;
Thut	161 Thlr.	5 Sgr.	und	3604	Tage Zeit.
Hierzu kommen für die erste Fortsetzung der Tafel bis zu 7 Mill., die erst fertig sein muss, ehe die fernere Fortsetzung angefangen werden kann, die obig.	67 „	2½ „	und	577	Tage Zeit,
Thut	228 Thlr.	7½ Sgr.	und	4181	Tage Zeit.

Also würden zur Fortsetzung der *Chernac*schen Tafel bis zu 49 Mill., zusammen 228 Thlr. 7½ Sgr. baare Auslagen und 14, höchstens 16 Jahre Zeit (zu 300 Arbeitstagen gerechnet) nöthig sein.

Herr *Dase* meint, zur Aufstellung einer Factorentafel bis zu 30 *Mill.*, 30 *Jahre* Zeit nöthig zu haben, welche auch wohl gewiss, ohne die oben beschriebenen Mittel zu Hülfe zu nehmen, dazu nothwendig sein würden. Wie man sieht, kann aber die Factorentafel mit den obigen Hülfsmitteln bis zu 49 *Mill.*, in 14, höchstens 16 Jahren, also bis zu 30 *Mill.* in noch nicht 10 *Jahren* vollendet werden. Es würde also Herr *Dase*, schon bei den 30 *Mill.*, über 20 *Jahre Zeit* ersparen und, was die Hauptsache ist, etwas *viel Sichereres* zu Stande bringen, als ohne die beschriebenen Hülfsmittel.

II. Veröffentlichung der Factorentafel.

Erstlich bis zu 7 Millionen.

G. Erst durch die Veröffentlichung und Ausstellung zum Kauf würde natürlich das Werk seinen vollen Nutzen haben.

Zu wünschen wäre für die *Sicherheit* der Angaben der Tafel, aus den in (§. 5) bezeichneten Gründen, dass die ganze Factorentafel, statt sie mit beweglicher Schrift *zu drucken*, vom *Stein* gedruckt werden könnte. Aber Dies würde *bei weitem* mehr kosten, als das *Drucken* mit beweglicher Schrift.

Da die Seiten der Factorentafel, wie (Taf. I), so ziemlich immer *gleich viele* Zahlen enthalten, indem erst über 49 Mill. hinaus häufig eine Ziffer mehr vorkommt, so sind nur für *Eine Million* der Fortsetzung die Kosten zu berechnen nöthig; denn auch jedesmal nur *Eine Million* würde zu berechnen, zu drucken und zum Verkauf auszustellen sein.

Je zwei Seiten wie (Taf. I.) können, wie in (C) bemerkt, auf einem und demselben Stein neben einander gezeichnet und *zugleich* abgedruckt werden. Zu der Fortsetzung um 1 Mill. gehören 334 Seiten. Dieselben, mit den Linien und den bleibenden Zahlen *auf Stein zu zeichnen*, würde kosten, zu 4 Thl. die Seite, 1336 Thl. — Sgr.

Den Stein wieder abzuschleifen, 167 Steine, zu 20 Sgr. .... 111 „ 10 „

Zu 4 Seiten ist ein Bogen Papier nöthig (auf *beiden* Seiten bedruckt), also sind z. B. zu 500 Exemplaren $\frac{500.334}{480} = 348$, angenommen 350 Ries Papier nöthig, zu $3\frac{1}{2}$ Thl. thut .... 1225 „ — „

500 Abzüge von 167 Steinen, thut 835 Hundert Abzüge z. 1 Thl., 835 „ — „

Thut 3507 Thl. 10 Sgr.

Also würde die Herstellung des *Steindrucks* von 500 Exemplaren der Fortsetzung der Factorentafel um 1 *Mill.* $3507\frac{1}{3}$ Thl. mithin *Eines* Exemplars etwa *Sieben Thaler* kosten.

Die 1336 Thl. Kosten des Zeichnens der Tafeln auf Stein würden zwar fast ganz erspart werden, wenn der Rechner die Tafeln, statt mit gewöhnlicher, mit Steindruck-Dinte schreiben könnte, um sie dann durch *Umdruck* auf den Stein zu bringen. Aber Dies geht nicht an, weil nur Schrift die *nicht zu trocken* geworden ist, auf den Stein sich umdrucken lässt, der Rechner aber nicht Tafel um Tafel ganz vollendet, sondern die Factoren p einzeln durch die ganze Million einträgt; und dann auch, weil nicht zu vermeiden sein würde, dass Zahlen hie und da *verwischt* werden; was in Umzudruckendem nicht geschehen darf.

H. Der Druck mit *beweglicher Schrift* würde nach der Angabe eines erfahrenen Sachkenners nur kosten:

Der Satz eines Bogens von 4 Seiten wie (Taf. I.) .... 10 Thl. — Sgr.
Der Abdruck von 500 Exemplaren .... 1 „ 10 „
500 Bogen Papier zu 500 Exemplaren eines Bogens 2 „ 20 „
Die Correcturen macht der Rechner.

Thut 14 Thl. — Sgr.,

höchstens 15 Thl.; also für 84 Bogen zu 1 Mill. Zahlen .... 1260 Thl. Mithin würde sich durch den *Druck* mit *beweglicher Schrift* ein Exemplar der Fortsetzung der Factorentafel um 1 Mill. schon für etwa $2\frac{1}{2}$ Thl. herstellen lassen.

I. Auch wenn man noch die obigen Kosten der baaren Auslagen bei der Aufstellung der *Handschrift*, und selbst die der *Berechnung* derselben hinzuthut, sind die Kosten nicht bedeutend höher.

Von den 228 Thl. 7½ Sgr. Kosten der Auslagen für 48 Mill. kommen nemlich auf 1 Mill. hinzu .... 4 Thl. 23 Sgr.
Von den 16 Jahren *Zeit* zu 48 Mill. kommen auf 1 Mill. ⅓ Jahr,
zu 600 Thl. .... 200 „ — „
Also erhöhen sich die obigen Kosten von .... 1260 „ — „
bis auf 1464 Thl. 23 Sgr.

und das Exemplar lässt sich dann immer noch für weniger als *drei Thaler* herstellen.

Im Buchhandel kostet das Exemplar freilich alsdann wenigstens *vier Thaler*. Aber auch dieser Preis ist verhältnissmässig, nemlich für einen Band von 84 Bogen in Folio, sehr gering. Denn die Tafel von *Chernac* für die *erste Million* kostet in *Paris* bei *Bachelier* 48 Fr, also beinahe 13 Thl.; von der *Burckhardt*schen Tafel, bis zu 3 Mill., kostet zwar jede Million nur 12 Fr. oder 3 Thl. 6 Sgr., aber diese Tafel giebt auch nur die *kleinsten*, *nicht alle* Factoren ihrer Zahlen an, und erfüllt, wie in (§. 1) bemerkt, nicht gut ihren Zweck.

K. Es käme also nur darauf an, dass man des *Absatzes* von 500 *Exemplaren*, oder doch des grössten Theils derselben im Voraus durch Unterzeichnung der Käufer versichert sei. Dann wäre die Veröffentlichung der Fortsetzung der Factorentafel *im gewöhnlichen Wege des Buchhandels* ganz gut möglich. Auf den Absatz von 500 Exemplaren zu rechnen, dürfte aber auch nicht allzu kühn sein; aus den beiden Gründen, dass, erstlich, das Werk in allen gesittigten Ländern der Erde völlig *ganz gleich* benutzbar ist, sobald ihm die nöthige Erläuterung in *lateinischer* Sprache beigefügt wird; und dann, dass, zweitens, die Erscheinung des Werks 16 Jahre Zeit erfordert, also jährlich nur 3 Bände zu 4 Thl. verkauft werden dürfen. Wenn die Regierungen der verschiedenen Länder, für jede öffentliche Bibliothek und für jede, wenigstens der vorzüglichsten Lehr-Anstalten, Ein Exemplar ankaufen lassen, dürfte schon eine sehr bedeutende Zahl von Exemplaren abgesetzt werden.

An *Zeit* sind nicht etwa mehr als die obigen 16 Jahre zur *Veröffentlichung* nöthig; sie könnte, *gleichzeitig* mit der Berechnung von Million zu Million geschehen.

C. Wäre die Veröffentlichung durchaus nicht möglich, so würde immer auch schon die Aufstellung der *Handschrift* der Fortsetzung der Factorentafel recht nützlich sein. Dieselbe müsste dann in der vorzüglichsten wissenschaftlichen Anstalt desjenigen Staats niedergelegt werden, welcher das Werk durch die baaren Auslagen für die Handschrift und durch die Besoldung des Rechners möglich gemacht hat, oder, im Fall Beides durch Unterzeichnung aufgebracht worden ist, in demjenigen Staat, welcher die meisten Unterzeichner geliefert hat.

20.

Kommt auch nur die *Handschrift* der Fortsetzung der Factorentafel zu Stande, so wäre ferner noch sehr zu wünschen, dass ein *Verzeichniss aller Stammzahlen* aus derselben ausgezogen und wo möglich veröffentlicht werden möchte.

Ein solches Verzeichniss dürfte, um möglichst Raum zu sparen, in folgender Form zu drucken sein. Zum Beispiel die Stammzahlen aus den *drei Tausenden* von 1 017 000 bis 1 020 000 wie folgt:

1 000 000

(42.)
17 007 11 31 41 3 61 77 97 | 119 31 9 57 73 9 93 9 | 209 27 77 93 9 |
301 7 11 9 23 9 47 53 61 71 7 83 91 | 437 9 49 73 9 81 | 539 51 3 9 |
607 13 7 23 47 9 73 83 | 703 13 9 21 49 81 7 99 | 817 27 47 51 7 9 81 9
923 53 9 97 || 18007 19 21 57 91 7 | 109 13 71 | 201 7 17 23 47 53 71 91 |
301 9 13 37 57 | 411 21 9 39 47 71 7 89 | 513 43 59 83 | 613 21 43 9 51 |
69 73 9 97 | 709 11 29 33 63 9 77 89 | 807 11 3 7 59 73 9 89 | 903 7 31 7
49 57 67 81 7 93 9 || 190 23 33 59 69 71 7 93 | 119 29 73 7 91 | 209 37 51
7 61 7 73 81 97 | 329 39 51 3 7 77 99 | 411 3 23 43 9 53 67 71 9 |
503 9 31 3 7 49 63 | 617 39 47 57 63 87 93 9 | 701 13 7 23 9 31 41 7
71 83 | 801 19 27 39 49 57 61 73 99 | 953 27 71 ||

Wie man sieht, können so die Stammzahlen aus *Einem Tausend* Zahlen, und da weiterhin der Stammzahlen *immer weniger* werden, auch wohl aus noch mehr als 1000 Zahlen, recht gut in *zwei Zeilen* gebracht werden; und da auf einer Folioseite 100 Zeilen unter einander Raum finden, so erfordern die Stammzahlen aus 50 Tausenden höchstens eine Seite, also aus Einer Million 20 Seiten, mithin aus 49 Millionen 980 Folioseiten, welches einen einzigen, gewöhnlichen Folioband von 245 Bogen giebt. Denselben in 500 Exemplaren zu drucken, würde nach (§. 19. *H.*), zu 15 Thlr. für den Bogen, 3675 Thlr. kosten, also Ein Exemplar etwa 7 Thlr. 10 Sgr., und im Buchhandel etwa *Zehn Thaler*; was noch nicht so viel ist, als die *Chernac*sche Factorentafel für *Eine Million* Zahlen kostet. Wegen des Absatzes wäre wieder eben so zu rechnen, wie in (§. 19. *K.*) für die Factorentafel.

Berlin, im Mai 1853.

3.

Einige Aufgaben.

(Vom *Herausgeber.*)

No. 1.

Es sei eine krumme Linie C in einer Ebene E gegeben, und in dieser Ebene ein Punct P von bestimmter Lage gegen C. Durch den Punct P gehe im Raume eine andere krumme Linie D, von einfacher, oder auch doppelter Krümmung. In dieser Linie bewege sich der Punct P mit der Ebene E und der Linie C stetig fort, und zwar so, dass die Ebene E entweder stets *parallel* mit sich selbst bleibt, oder auch so, dass sie mit den Tangenten an D stets denselben *Winkel* macht. Dann ist die Frage: von welcher Beschaffenheit die Fläche F sei, die von C im Raume beschrieben wird: welches ihre Gleichungen sind, welchen Flächen-Inhalt zwischen bestimmten Grenzen, welchen Raum zwischen auf einander senkrechten Ebenen sie einschliesse: von welcher Gestalt die krummen Linien sind, in welchen bestimmte Ebenen sie schneiden u.s.w.

Desgleichen ist die Frage, wie C beschaffen sein müsse, wenn D und F, und wie D, wenn C und F gegeben sind.

Wenn z. B. C eine Kreislinie, P deren Mittelpunct, D der *Punct* P ist, und E bewegt sich um P in stetig zunehmenden Winkeln gegen eine feste Linie, so ist F eine *Kugelfläche*. Wenn C eine Kreislinie, P ihr Mittelpunct, oder auch ein anderer in ihr gegebener Punct, D eine grade Linie ist, und E bewegt sich, stets senkrecht auf D stehend, also *parallel* mit sich selbst, mit dem Puncte P die Linie D entlang, so ist F eine *grade Cylinderfläche*. Steht E nicht senkrecht auf D, bewegt aber *parallel* mit sich selbst sich fort, so ist F eine *schiefe Cylinderfläche*, deren Querschnitte, senkrecht auf D, Ellipsen sind. Ist C eine Kreislinie, D ebenfalls, und E bewegt sich, stets senkrecht auf D stehend, mit dem Puncte P durch D fort, so ist F eine *Ringfläche*. U. s. w.

Die Lösungs-Ergebnisse der Frage finden eine nahe liegende nützliche Anwendung in der *Technik*; nemlich auf die Gestaltung von *Gewölben* über gegebenen Räumen. Bekanntlich ist *technisch* die vortheilhafteste Gestalt eines

Gewölbes über einen Raum, der ein *Rechteck* oder auch eine *Ellipse* zur Grundfläche hat, derjenige *Theil einer Kugelfläche*, welcher von den senkrechten Wiederlagen aus der *Kugelfläche* abgeschnitten wird; besonders dann, wenn die rechteckige Grundfläche eben so breit als lang, oder die elliptische Grundfläche ein Kreis ist; weniger aber schon, wenn die rechteckige Grundfläche länger als breit, oder auch eine wirkliche Ellipse ist. In solchem Fall aber würde für das Gewölbe diejenige Fläche F recht angemessen sein, welche entsteht, wenn C ein Stück einer *Kreislinie*, D ebenfalls ein Stück einer *Kreislinie*, aber von *anderem* Halbmesser ist, und E, stets *parallel* mit sich selbst, mit ihrem Puncte P durch D sich fortbewegt. Diese Gewölbeform würde fast eben so leicht ausführbar sein, als ein Kugelgewölbe. Und so finden sich mehrere Anwendungen in der Technik.

No. 2.

Eine stetig gleichartige, starre, schwere Masse von rechteckig parallelepipedischer Gestalt, a lang, b breit, c hoch, ruht mit den *Rändern* ihrer untern ebenen Fläche auf einer festen Unterstützung. Das *Gewicht* der Körper-Einheit der Masse ist m. Der Widerstand ihrer Theile gegen *Trennung* (die Cohäsion) beträgt z auf die Flächen-Einheit, der Widerstand der Massentheile gegen *Zusammenpressung* ist so stark, dass er als unbegrenzt angesehen werden kann. Die Frage ist: welches Gewicht P vermag die Masse noch ausser ihrem eigenen Gewicht zu *tragen*; sowohl in dem Fall, wenn P in einem einzelnen bestimmten Punct der Oberfläche *vereinigt*, als wenn es auf der Oberfläche, entweder gleichförmig, oder nach einer andern bestimmten Regel *ausgebreitet* ist?

Die Frage kommt wieder in der Technik vor; z. B. bei *Decken* über grossen rechteckigen Räumen, wenn dieselben, wie es geschehen könnte und sollte, aus *kreuzweis*, in angemessenen Entfernungen über einander gelegten und auf einander zusammengeschraubten Trägern oder Balken zusammengesetzt sind, so dass sie *näherungsweise* als eine stetig gleichartige, starre, schwere Masse angesehen werden können.

Wenn die Masse nur mit *zwei*, einander gegenüberliegenden Rändern auf festen Unterstützungen ruht, so findet der Fall Anwendung auf Brücken.

Wenn die mit einander parallelen obern und untern Flächen der Masse *nicht* Ebenen sind, wenigstens die *untere* Fläche keine Ebene ist, sondern die Gestalt eines Theils einer Cylinderfläche, oder zweier sich kreuzender Theile solcher Flächen, oder eines Theils einer Kugelfläche u. s. w. hat, so findet die Frage Anwendung auf diejenige nach der Tragkraft der *Gewölbe*; welche Tragkraft in der

Ausübung noch häufiger von Gewölben über bestimmten *Flächenräumen*, als von blossen, durch Wiederlagen unterstützten Bogen, zu schätzen nöthig ist.

Nr. 3.

Man nehme einen tafelförmigen Körper an, der von zwei parallelen, so wenig als möglich von einander entfernten Ebenen begrenzt ist. Der Körper sei *schwer*, und alle gleich grossen Theile der Tafel sollen gleich viel wiegen; auch sollen die Theile, zwar nicht dehnbar, aber *verschiebbar* sein, und zwar so, dass sich ihre Cohäsion nicht ändert.

Man beschreibe auf dieser Tafel zwei ähnliche und concentrische regelmässige Figuren A und B (B kleiner als A), nemlich von der Art, dass wenn durch den Mittelpunct von A eine grade Linie p senkrecht auf A errichtet wird, und aus irgend einem Puncte von p werden nach allen Puncten des Umfangs von A gerade Linien gezogen, B einen mit A parallelen ebenen Schnitt der entstehenden Pyramide abgiebt.

Nunmehr werde der Theil A der Tafel mit seinen verschiedenen *Eckpuncten* an die ähnlich liegenden Eckpuncte von B gehängt. Es fragt sich: welche Fläche F wird im Raume der Theil A der Tafel bilden.

Ist die Figur A, also auch B, ein *Kreis*, so ist die Fläche F offenbar nicht *ohne Falten* möglich; denn der Umfang von A ist grösser, als der von B, in welchen er gebracht werden soll. Aber *es scheint*, dass wenn A *nicht* ein Kreis, sondern irgend ein *regelmässiges Vieleck* ist, F *ohne Falten* möglich sei. Die einfachsten Fälle wären die, wenn A und B concentrische Quadrate oder concentrische gleichseitige Dreiecke sind.

Die Untersuchungen, welche die obige Frage anregt, und welche für *Flächen* Das ist, was die Kettenlinie für eine Linie, dürfte interessant sein. Sollte sich finden, dass die Fläche F *niemals ohne Falten möglich* sei, so lange man ihre Theile, wie oben, *undehnbar* annimmt; was allerdings zunächst untersucht werden müsste: so würde die Beantwortung der Frage allerdings *sehr* schwierig werden, weil dann die *Elasticität* der Theile Statt gegeben und in Rechnung gebracht werden müsste.

Nr. 4.

In einer gegebenen, von vier gradlinigen ebenen Dreiecken umschlossenen Pyramide denjenigen Punct zu finden, für welchen die Summe der aus ihm nach den vier Ecken der Pyramide gezogenen graden Linie so klein ist, als möglich.

Berlin, im November 1854.

Druckfehler im 48. Bande.

Seite 108 Zeile 14 soll stehen: $f'(x, a)$.
- - - 18 soll statt (1) stehen: (a).
- 111 - 1 soll stehen: $\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\}\, y_2$.
- 115 - 12 v. u., soll das erste Gleichheitszeichen durch $\mp$ ersetzt werden.
- - - 5 - soll es heissen: $C=(b-\beta)^2-r^2$.
- 118 - 2 und 3, soll rechterhand der Gleichheitszeichen noch der Factor v_2 stehen.
- - - 7, soll es heissen: der zweite Factor $v_2=0$ gesetzt.
- - - 13 - - - : der erste Factor gleich Null gesetzt.
- 122 - 3 von u. soll stehen: $\left(x-\frac{2pe}{1-e^2}\right)^2$.
- 124 - 14 - soll v durch v_1 ersetzt werden.
- - - 4 - es heissen $x' - \frac{1}{2}(\xi+\alpha)$.
- 125 - 2, soll , y durch x', y' ersetzt werden.
- - - 13 v. u, soll stehen: Fusspunctenlinie.
- 126 - 12 v. o. „als" ersetzt werden durch: wie auch
- - - 9 v. u., soll ξ, v durch ξ', v' ersetzt werden.
- 127 - 6 v. o., soll a durch α ersetzt werden.
- - - 16 soll es heissen: bestimmt ist, angenommen.
- - - 4 v. u., soll es am Schlusse heissen: $f^{(n)}(\xi, v)=0$
- 128 - 4 soll stehen: $f'(2\xi-\alpha, 2v-\beta)$.
- 129 - 6 v. u., soll es heissen: zu den Curven A, A'.
- 134 - 1 v. o. soll $\Gamma(p+1+vi)$ durch $\Gamma(p+1+qi)$ ersetzt werden.
- - - 7 — soll es heissen: $\int_0^\infty x^{a-1+bi} e^{-cx} dx$.
- - - 8 — soll „α oder a" durch a ersetzt werden.
- - - 11 — soll das zweite bestimmte Integral im Zähler durch $\int_0^\infty x^{k-p-1-qi} e^{-x} dx$ ersetzt werden.
- 136 - 1 v. o. soll im bestimmten Integral des Nenners stehen: y^{a-1+qi}.
- - - 7 — soll es heissen: p um eine endliche Grösse.
- 292 - 10 statt $\operatorname{sos}\gamma$ lies $\cos\gamma$.
- 293 - 2 - $\frac{1}{2}\varphi$ lies $\frac{1}{2}\pi$.
- 295 - 14 ist $f(\frac{1}{2}\pi-a, b, \frac{1}{2}\pi-c)$ zu lesen.
- 296 - unten; am Ende der Formel (10) ist die letzte Klammer zu tilgen.
- - - 13 statt „Form" lies „Formel".
- 297 - 12 lies $f(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.
- 299 unten ist die etwas entstellte Formel β so zu lesen:

$$f(\alpha, \tfrac{1}{2}\pi-\gamma, \gamma)=\int_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{1}{2}\pi} \log\frac{\sin(\varphi+\gamma)}{\sin(\varphi-\gamma)}\cdot d\varphi.$$

- 300 - 3 ist nach $\int \log\cos x . dx$ das Wort „bringt" einzuschalten.
- - - 10 u. 11 ist statt „schliesslich" „finit" zu lesen.
- 377 - 9 v. o. statt „Appolonius" lies „Apollonius".
- - - 17 statt „sont" lies „sont".
- - 22 - „solusion" lies „solution".

Seite 378 Formel (3) statt $\frac{a^2 - b^2}{b^2}$ lies $\frac{(a^2 - b^2)^2}{b^2}$.

- 379 Zeile 15 v. u. statt „fournit" lies „fournis."

- - - 7 statt taugente f' lies tangente en f'.

- 380 - 6 - p, q, r lies $p q, r$.

- 398 - 9 v. u. statt „ein Glied" lies „ein andres Glied."

- 409 - 7 v. o. - „mehr hat" lies „mehr oder weniger hat".

Druckfehler im 50. Bande.

Seite 1 Zeile 3 v. u. statt „ansschliesslich" lies „ausschliesslich."

- 3 - 9 v. o. - $\int_{\xi}^{\pi(\xi,\eta,t)}$ lies $\int_{\zeta}^{\pi(\xi,\eta,t)}$.

- 3 - 10 v. o. - $\int_{\xi}^{\pi(x,\eta,t)}$ lies $\int_{\zeta}^{\pi(x,\eta,t)}$.

- 14 - 9 v. u. - „einziigen" lies „einzigen von."

- 16 - 8 v. u. - $f(ax^2 + by^2 + cz)$ lies $f(ax^2 + by^2 + cz^2)$.

- 21 - 6 v. u. - $\int_0^\infty e^{-cx} \frac{dx}{x+c}$ lies $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{dx}{x+c}$.

- 34 - 8 v. u. - $180 - s$ lies $180 - s_1$.

Die Fig. 1. (Taf. I.) bezieht sich auf eine, im Text nicht mitgetheilte allgemeinere Formel.

Crelle, Journal d. Math. Bd. 51. Heft 1.

Fac-simile einer Handschrift von M. Pagani.

(Anfang der Abhandlung No. 17. S. 243 dieses Journals.)

Note sur une transformation générale de la formule fondamentale de la mécanique.

(par M. Pagani. à Louvain)

L'état dynamique d'un point matériel est défini par l'équation symbolique

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = \sum P\delta p$$

que l'on peut écrire simplement de cette manière

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + = \sum P\delta p.$$

Dans cette équation les lettres x, y, z, désignent les coordonnées rectangulaires du point matériel au bout du temps t, en supposant l'origine et la direction de ces lignes, fixes dans l'espace. La lettre P dénote une force accélératrice qui agit sur le point matériel dans le sens de la droite p menée de ce point au centre de la force.

4.

Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei, drei, vier und mehr Veränderlichen.

Mit neuen Hülfsmitteln bearbeitet.

(Von Herrn Dr. *August Weiler*, Lehrer der Math. an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.)

Vorwort.

Es ist bekannt, dass man unter den Differentialgleichungen den linearen am häufigsten begegnet, wenn man die Grundsätze der Physik, in Rücksicht auf ihre Folgerungen, einer analytischen Untersuchung unterwirft. Solche Folgerungen werden jedesmal durch die Integration der betreffenden Differentialgleichungen vermittelt. Die Integration der linearen Differentialgleichungen wurde desshalb auch von jeher mit besonderer Vorliebe bearbeitet.

Doch findet das Unternehmen, wenn die Differentialgleichung die erste Ordnung übersteigt, nicht unbedeutende Schwierigkeiten, und ungeachtet sorgfältiger Pflege war man bis dahin gerade in den wichtigsten Theilen zu verhältnissmässig nur dürftigen Resultaten gelangt; so dass selbst ausgezeichnete Analysten dies reiche Feld der Untersuchung als undankbar verkannt haben. Man hat aber guten Grund, die Unvollkommenheit dieser Resultate allein dem Umstande zuzuschreiben, dass man zu sehr versäumte, die bereits vorliegenden Lehren in ihrem inneren Zusammenhange zu erfassen. Denn wenn auch die Analysis ihren Ursprung und ihre erste Entwicklung immer nur der Lösung einzelner Aufgaben verdankt, wie sie gerade aus dem jedesmaligen Bedürfnisse entspringen, so ist es doch Thatsache, dass dieselbe, nachdem einmal ein gewisses Maass von einzelnen Erfahrungen zusammengetragen ist, eben wie jede andere Wissenschaft, nur durch eine von ihren Anwendungen unabhängige Behandlungsweise auf denjenigen Standpunct erhoben werden kann, welcher gestattet, den möglich-grössten Vortheil aus ihr zu ziehen. Durch eine solche Behandlungsweise ist es mir ge-

lungen, die Zahl der zur Integration der linearen Differentialgleichungen erforderlichen Hülfsmittel zu vervollständigen, oder auch aus den schon benutzten einen grösseren Gewinn zu ziehen, und deshalb die Lösung der Aufgabe, sowohl in Rücksicht auf Inhalt, als auf innere Gestaltung, ihrer Vollendung näher zu bringen. Ich glaube aber mit deren Darstellung zugleich die Verbindlichkeit zu übernehmen, vor Allem das Verhältniss meiner Leistung zu den früheren, dem Leser möglichst zu beleuchten. Deshalb werde ich jener Darstellung in diesem Vorwort einen Versuch vorausschicken, den allmähligen Fortgang der Gedanken zu verfolgen. Doch weit entfernt, hiermit eine vollständige Geschichte dieses Theils der Analysis geben zu wollen, darf ich mich wohl darauf beschränken, nur diejenigen Leistungen hervorzuheben, welche mit meinen Ergebnissen in unmittelbarem Zusammenhange stehen.

Durch die Integration einer linearen Differentialgleichung wird bekanntlich die eine Veränderliche z als Function der andern Veränderlichen y, x, w bestimmt. Diese Function kann zwar jedesmal ohne besondere Schwierigkeit in *Reihen* entwickelt werden; aber damit ist im Allgemeinen nur wenig gewonnen. Die grossen Vortheile, welche man aus der Integration einer Differentialgleichung zieht, sind unzertrennlich an die *geschlossene Form* des *allgemeinen* Integrals geknüpft.

Die Gleichungen mit *zwei* Veränderlichen hatten bis dahin verhältnissmässig die befriedigendsten Resultate geliefert. Zuerst war es gelungen, die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dy^2}+a\frac{dz}{dy}+bz=0$$

mittels *Exponentialfunctionen*, und die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{a}{y}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{bz}{y^2}=0$$

mittels *Potentialfunctionen* zu integriren, indem man die beiden hierzu jedesmal erforderlichen besondern Integrale durch die genannten Functionen ausdrückte. Für die Integration anderer linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei Veränderlichen, verdankt man *Euler* einen mächtigen Fortschritt; welcher jetzt auch die Grundlage zur Integration aller linearen Differentialgleichungen mit *drei* und *mehr* Veränderlichen ausmacht. *Euler* hat nämlich zuerst gezeigt (*Lacroix*, Tom. III, pag. 529), dass die beiden *besondern* Integrale der Gleichung

$$(ay+b)y^2\frac{d^2z}{dy^2}+(cy+e)y\frac{dz}{dy}+(fy+g)z=0$$

durch *bestimmte* Integrale von der Form $z=\int_{v_1}^{v_2} f(y,v)\,dv$ sich darstellen lassen, wo f eine bestimmte Function ist, und die Integrationsgrenzen v_1 *und* v_2 von y unabhängig angenommen sind. Um zu diesen *bestimmten* Integralen zu gelangen, giebt es im Allgemeinen zwei verschiedene Wege. Man bildet entweder erst eine nach Potenzen von y geordnete Reihe, welche der Differentialgleichung an der Stelle von z Genüge thut, und drückt alsdann die Summe dieser Reihe durch ein *bestimmtes* Integral von der angegebenen Form aus: oder man leitet das bestimmte Integral unmittelbar aus der Differentialgleichung selbst ab. Wenn auch *Euler* schon den letzteren Weg eingeschlagen hat, so stützt sich seine Rechnung doch auf allzuviele willkührliche Voraussetzungen, und *Euler* selbst trägt deshalb kein Bedenken, jener ersteren Ableitung aus der Reihen-Entwicklung den Vorzug zu geben.

Der Gedanke *Eulers*, lineare Differentialgleichungen durch *bestimmte* Integrale zu integriren, wurde vielfach aufgefasst. Für die Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen verfolgte man die beiden so eben bezeichneten Wege, mit mancherlei Abänderungen der dazu nöthigen Rechnungen, und diese gemeinsamen Bemühungen hatten zur Folge, dass man sich immer mehr damit befreundete, die Entwickelung der bestimmten Integrale aus der Differentialgleichung selber zu unternehmen. Da schon an und für sich deren Ableitung aus der zuerst gebildeten Reihen-Entwicklung als Umweg angesehen werden muss, so lag am Ende kein Grund mehr vor, diesen Weg einzuschlagen, nachdem man dahin gelangt war, neben einem viel geringeren Aufwande von Rechnung, zugleich mit einfacheren Voraussetzungen auf dem andern Wege auszureichen.

Um die beiden *besondern* Integrale der Gleichung

$$y^2\frac{d^2z}{dy^2}+(cy+e)y\frac{dz}{dy}+(fy+g)z=0$$

zu finden, bedient man sich allgemein eines Verfahrens, welches zuerst für die darauf zurückführbare, aber weniger allgemeine *Riccati*sche Gleichung $y^2\frac{d^2z}{dy^2}+ay^m.z=0$ gegeben wurde. Man setzt nämlich $z=y^n\int_{v_1}^{v_2} e^{yv}.V\,dv$, und bestimmt alsdann den Exponenten n als Beständige, und V als Function von v dergestalt, dass dies bestimmte Integral der Differentialgleichung Genüge leistet.

Ich meinestheils werde in dieser Schrift von einer andern Voraussetzung ausgehen, welche aber ausreicht, um die besondern Integrale der allgemeinern, schon von *Euler* behandelten Differentialgleichung

$$(ay+b)y^2\frac{d^2z}{dy^2}+(cy+e)y\frac{dz}{dy}+(fy+g)z=0$$

zu entwickeln. Ich setze nämlich $z=y^n.\int_{v_1}^{v_2}V(v-y)^p dv$, wo n und p beständige Grössen sind, und V, wie vorhin, eine Function von v ist, zu deren Bestimmung man auf eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung geführt wird.

Ein *bestimmtes* Integral $\int_{v_1}^{v_2}f(y,v)\,dv$, dessen Grenzwerthe v_1 und v_2 von y abhängig sind, kann bekanntlich durch Einführung einer neuen Veränderlichen u, an die Stelle von v, jedesmal so umgewandelt werden, dass die neuen Grenzwerthe u_1 und u_2 von y unabhängig sind. Hierin liegt der Grund, weshalb man unter der Voraussetzung von nur *beständigen* oder von y unabhängigen Grenzwerthen v, allerdings das Nemliche erreichen kann, was die Annahme *veränderlicher* Grenzen giebt. Indem ich aber dennoch solche *veränderliche* Grenzwerthe aufnehme, erlange ich einen andern Vortheil. Ich reiche dann nämlich mit der Entwicklung *eines einzigen* bestimmten Integrals $\int_{v_1}^{v_2}f(y,v)\,dv$ aus, und erhalte, indem ich diesem nach einander verschiedene Grenzwerthe gebe, jedesmal die *beiden* besondern Integrale, welche unter der bisherigen Annahme von nur *beständigen* Grenzwerthen einzeln entwickelt werden mussten.

Bis dahin schien übrigens das bestimmte Integral $\int_{v_1}^{v_2}f(y,v)\,dv$ nicht für alle Fälle zur Darstellung des allgemeinen Integrals der vorher angeführten, zuerst von *Euler* behandelten Differentialgleichung geeignet zu sein. *Euler* beschränkt sich in der That darauf, mit dessen Hülfe zwei besondere Integrale der Differentialgleichung, und deshalb auch deren allgemeines Integral, nur unter gewissen Beschränkungen derjenigen Zahlenwerthe darzustellen, welche den in der Differentialgleichung vorkommenden Beständigen a, b, c ..... zukommen; und an derselben Unvollkommenheit leiden auch alle späteren Resultate. Ueber die Art dieser Beschränkungen, und wie sich dennoch in allen Fällen mit Hülfe des bestimmten Integrals $\int_{v_1}^{v_2}f(y,v)\,dv$ zu dem allgemeinen Integral jener Differentialgleichung gelangen lasse, werde ich weiter unten im Vorworte noch Aufschluss

geben, nachdem ich auch den bisherigen Stand der Integration linearer Differentialgleichungen mit drei und mehr Veränderlichen in den wesentlichen Puncten auseinandergesetzt haben werde.

Man benutzte bald die bestimmten Integrale auch bei der Integration der linearen Differentialgleichungen mit *drei* und *mehr* Veränderlichen. *Laplace*, welcher zuerst den Gedanken *Eulers* auf diesem neuen Felde verfolgte, gab ein Verfahren an, (*Lacroix*, Tome III. p. 550), die beiden Reihen, welche man für die Gleichung mit drei Veränderlichen,

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + X\cdot\frac{dz}{dx} + Y\cdot\frac{dz}{dy} + Zz = 0$$

entwickelt, wenn X, Y und Z irgend Functionen von x und y sind, durch *bestimmte* Integrale darzustellen. Die eine Reihen-Entwicklung $z = A.\varphi(x) + B.\int\varphi(x)dx + C.\int\int\varphi(x)dx^2 + \ldots\ldots$, wo φ eine willkürliche Function ist und die Coefficienten A, B, $C \ldots\ldots$ bestimmte Functionen von x und y sind, giebt hiernach jedesmal ein bestimmtes Integral von der Form $z = \int_0^x f(y,x,v)\varphi(v)dv$. Darin ist φ, wie vorher, eine willkührliche Function, die Grösse $f(y, x, v)$ aber stellt ein besonderes Integral jener Differentialgleichung vor, welches zugleich eine willkürliche Beständige v einschliesst. Auf gleiche Weise giebt die andre Reihen-Entwicklung $z = A,\psi(y) + B,.\int\psi(y)\,dy + C,\int\int\psi(y)\,dy^2 + \ldots\ldots$ ein bestimmtes Integral $z = \int_0^y f,(y, x, v).\psi(v)\,dv$. Das allgemeine Integral der obigen Differentialgleichung zeigt sich demnach als die Summe zweier bestimmten Integrale mit veränderlichen Grenzwerthen. *Laplace* verfolgt die hierzu führenden Rechnungen für die beiden einfacheren Differentialgleichungen

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} + cz = 0$$

und

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{a}{x+y}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{b}{x+y}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{cz}{(x+y)^2} = 0,$$

wo a, b und c *beständige* Grössen sind. Es gelingt ihm, aus den entsprechenden Reihen-Entwicklungen die beiden besondern Integrale f und $f,$ jedesmal herzuleiten, und damit das allgemeine Integral der beiden angeführten Differentialgleichungen aufzustellen. Aber, abgesehen von der Weitläufitigkeit der Rechnungen, ergiebt sich dies allgemeine Integral in einer sehr verwickelten Form. Denn die beiden besondern Integrale f und $f,$ ergaben sich aus den Reihen nicht

als einfache Functionen, sondern nahmen selbst wieder die Gestalt bestimmter Integrale an.

Anstatt diese Entwicklungen von *Laplace* nach und nach zu vervollkommnen, wurden überhaupt nur wenige weitere Versuche dieser Art gemacht; und zwar nicht mit glücklicherem Erfolge. Es lassen sich übrigens für die linearen Differentialgleichungen mit drei Veränderlichen gar manche besondere Integrale $f(y, x, v)$ angeben; und jedes dieser besondern Integrale hat die Eigenschaft, auch das bestimmte Integral $\int_{\nu_1}^{\nu_2} f(y, x, v).\varphi(v)dv$ der Differentialgleichung genügen zu lassen, so lange man sich auf beständige, oder von y und x unabhängige Grenzwerthe v beschränkt. Man erlangt also auf diese Weise aus irgend besondern Integralen $f(y, x, v)$, wegen des willkührlichen φ, eine sehr grosse Zahl anderer; doch niemals das *allgemeine* Integral. Jene Versuche von *Laplace*, besondere Integrale $f(y, x, v)$ von solcher Beschaffenheit anzugeben, dass sie in dem bestimmten Integrale $\int_{\nu_1}^{\nu_2} f(y, x, v)\, c(v)dv$ anch *veränderliche* Grenzwerthe v zulassen und desshalb auf das allgemeine Integral der Differentialgleichung hinführen, haben Resultate zum Vorschein gebracht, welche in der Anwendung sehr unbequem waren und nur geringe Hülfe versprachen. Dagegen konnte man diese andern besondern Integrale, welche nur beständige Grenzwerthe v zulassen, wegen ihrer vortheilhafteren Form in einzelnen Fällen immerhin mit gutem Erfolg benutzen, sobald es nämlich gelungen war, sie so anzugeben, wie sich das allgemeine Integral gestaltet, nachdem man dessen willkührliche Functionen nach den einer besonderen Aufgabe zum Grunde liegenden Bedingungen bestimmt hat. Hierin liegt der Grund, dass seit jener Zeit alle weitern Leistungen sich auf die Herleitung solcher besondern Integrale beschränken. Es ist mir geglückt, auch das allgemeine Integral der grösseren Anzahl linearer Differentialgleichungen mit drei Veränderlichen in einer Form darzustellen, welche, mit den früheren Resultaten verglichen, überraschend einfach ist. Dieselbe einfache Form würde schon *Laplace* für die oben angeführten Differentialgleichungen aus seinen eingenen Entwicklungen erzielt haben, wenn ihm nicht eine willkührliche Beständige entgangen wäre, welche sich in diese Entwicklungen einführen und zu der erwähnten Vereinfachung verwenden lässt. Ich leite aus der Differentialgleichung mit *drei* Veränderlichen unmittelbar eine andere Differentialgleichung mit nur *zwei* Veränderlichen ab; und daraus ergeben sich jedesmal zwei besondere Integrale $f(y,x,v)$, welche vor andern

die bemerkenswerthe Eigenschaft haben, das bestimmte Integral $\int_{v_1}^{v_2} f(y, x, v) \varphi(v)\, dv$ auch unter gewissen veränderlichen Grenzwerthen v der Differentialgleichung genügen zu lassen, und welche dennoch jenen übrigen besondern Integralen, deren man sich nur neben beständigen Grenzwerthen v bedienen darf, an Einfachheit der Form keineswegs nachstehen.

Mit nicht geringerem Erfolge lassen sich die linearen Differentialgleichungen mit *vier* und *mehr* Veränderlichen integriren. Das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung mit *vier* Veränderlichen z, y, x, w z. B. schliesst zwei willkührliche Functionen zweier veränderlichen oder von y, x, w abhängigen Grössen ein. Ich bediene mich deshalb bestimmter Integrale von der Form $z = \int_{v_1}^{v_2} f(y, x, w, v)\, dv$, wo die Grösse $f(y, x, w, v)$ ein besonderes Integral der Differentialgleichung ist, welches, ausser einer willkührlichen Beständigen v, zugleich eine willkührliche Function irgend einer veränderlichen Grösse und desshalb auch der Beständigen v einschliesst; wo aber die eine Integrationsgrenze v_2 selbst, von y, x, w abhängig angenommen ist. Aus der Differentialgleichung mit *vier* Veränderlichen unmittelbar lässt sich eine andre Differentialgleichung mit nur *drei*, oder auch mit nur *zwei* Veränderlichen bilden; woraus dann die verlangten besondern Integrale $f(y, x, w, v)$ sich herleiten lassen.

Doch blieb noch ein bedeutendes Hinderniss, welches der Integration aller linearen Differentialgleichungen im Wege stand. Schon oben war Veranlassung, einer Unvollkommenheit der Resultate zu gedenken, als es sich darum handelte, die bisherigen Leistungen in der Integration der linearen Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen zu würdigen. Die Gültigkeit der bestimmten Integrale $z = \int_{v_1}^{v_2} f(y, x, w \cdots\cdots v)\, dv$, wodurch man das allgemeine Integral irgend einer linearen Differentialgleichung ausdrückt, knüpft sich nämlich in den meisten Fällen an gewisse Beschränkungen, welche auf die in der Differentialgleichung vorkommenden Beständigen $a, b, c \cdots\cdots$ Bezug haben. Wenn die Zahlenwerthe dieser Beständigen ausserhalb gewisser Grenzen liegen, so führt die bestimmte Integration auf eine Function von $y, x, w \cdots\cdots$, welche nicht mehr das Integral der Differentialgleichung vorstellt. Und zwar sind im Allgemeinen den Beständigen verschiedene Grenzwerthe vorgeschrieben, damit die Reihen-Entwicklungen zweier verschiedener besondern Integrale aus der bestimmten Integration hervorgehen.

Diejenigen Werthe, innerhalb welcher zwei besondere Integrale gleichzeitig auf diesem Wege erzielt werden, liegen deshalb in der Regel noch näher beisammen, als die jedes einzelnen besondern Integrals. Es kann sich auch treffen, dass sich die Fälle, in welchen das eine und das andere bestimmte Integral auf ein besonderes Integral der Differentialgleichung führt gegenseitig ausschliessen, dass also diese beiden bestimmten Integrale stets unbrauchbar sich zeigen. Man war zwar diesem Uebelstande nur erst bei der Integration der linearen Differentialgleichungen mit *zwei* Veränderlichen begegnet; allein man bemühte sich jedesmal in solchen Fällen, verschiedene Formen der Function f herzuleiten, von denen jede für sich den Beständigen a, b, c ..... andere Beschränkungen auflegt. Obgleich es nun auch so für manche einfachere Differentialgleichung gelungen ist, für alle Fälle zwei bestimmte Integrale $\int_{v_1}^{v_2} f(y,v)dv$ anzugeben, so musste man doch dieser Rücksicht die Einheit der Form des allgemeinen Integrals aufopfern, oder selbst zu einer sehr verwickelten und unbequemen Form Zuflucht nehmen. Ich reiche dagegen, bei einer eigenthümlichen Auffassungsweise des bestimmten Integrals, hier, und eben so für *drei* und *mehr* Veränderliche, mit einer einzigen Form der Function f aus, wenn dieselbe die Grenzwerthe, innerhalb welcher die Beständigen a, b, c angenommen werden sollen, auch noch so sehr zusammenzieht. Es ist nemlich leicht zu zeigen, dass diejenige Function von y, x, w, ..., welche durch die bestimmte Integration $\int_{v_1}^{v_2} f(y,\ x,\ w \ldots\ldots v)\,dv$ unter jener eingeschränkten Bedeutung der Beständigen a, b, c ..... erzielt worden ist, auch dann noch der Differentialgleichung Genüge leistet, wenn alle die Einschränkungen der Beständigen a, b, c ..... ausser Acht gelassen werden. Auf diese Weise giebt eine einzige Form der Function f für alle Fälle ein besonderes Integral; und die erwähnten Bedingungen beschränken keinesweges die Brauchbarkeit des gefundenen bestimmten Integrals selbst, sondern beziehen sich nur auf die Bedeutung der Beständigen a, b, c ..... bei der bestimmten Integration, deren Ausführung, gleichviel unter welcher Gestalt, nichts weiter im Wege steht.

In allen hierher gehörigen Untersuchungen ist das bestimmte Integral $\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,dv$ gleichbedeutend mit dem Unterschiede $F(v_2) - F(v_1)$, wenn $F(v)$ das unbestimmte Integral $\int f(v)\,dv$ ausdrückt. Bekanntlich wird aber das bestimmte Integral $z = \int_{v_1}^{v_2} f(v)\,dv$ noch auf eine andere Weise ausgelegt. Man stellt sich dasselbe nämlich auch als die Summe der Aenderungen dz vor, welche aus $dz = f(v)\,dv$ hervorgehen, während die entsprechenden Aenderungen dv zu

dem einen Grenzwerthe v_1 nach und nach addirt werden müssen, um diesen in den andern Grenzwerth v_2 hinüberzuführen. Beide Arten der Betrachtung geben das nämliche Resultat, wenn kein Werth von v zwischen den beiden Integrationsgrenzen v_1 und v_2 liegt, für welchen die Function $f(v)$ ihre *Stetigkeit* verliert. Unter dieser Einschränkung könnte also auch die letztere Bedeutung des bestimmten Integrals $\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,dv$ dazu dienen, einen dem Integral einer Differentialgleichung zukommenden Zahlenwerth auszumitteln. Wenn aber den in dem bestimmten Integrale vorkommenden Beständigen $a, b, c \ldots\ldots$ Zahlenwerthe zukommen, die ausserhalb der bei der Ausführung der bestimmten Integration vorgeschriebenen Grenzen liegen, so versteht es sich, dass diese letztere Bedeutung des bestimmten Integrals jedenfalls verloren geht.

Hierdurch sind nun die neuen Hülfsmittel bei der Integration der linearen Differentialgleichungen, und deren Verhältniss zu den bekannten, ihrem Inhalte nach angedeutet. Die innere Nothwendigkeit und die gegenseitige Vervollständigung dieser Hülfsmittel aber lassen sich nur aus den Einzelnheiten und aus dem ununterbrochenen Zusammenhange der Entwicklungen erkennen. Ich begnüge mich, diese Entwicklungen in der vorliegenden Schrift nur für die linearen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung auszuführen. Die Gleichungen mit *zwei* Veränderlichen, welche ich allgemein integrire, können in folgenden drei Formen dargestellt werden:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \dfrac{d^2z}{dy^2} + \dfrac{{}^2by+c}{1}\cdot\dfrac{dz}{dy} + \dfrac{fy^2+gy+h}{1}\cdot z = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dy^2} + \dfrac{by+c}{y}\cdot\dfrac{dz}{dy} + \dfrac{fy^2+gy+h}{y^2}\cdot z = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dy^2} + \dfrac{by+c}{(y+a)y}\cdot\dfrac{dz}{dy} + \dfrac{fy^2+gy+h}{(y+a)^2y^2}\cdot z = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen mit *drei* Veränderlichen aber, deren allgemeines Integral ich im Folgenden entwicklen werde, umfassen alle Fälle der beiden nachstehenden Formen:

$$\text{II.}\quad \left\{ \begin{aligned} & a\frac{d^2z}{du^2} + a_1\frac{d^2z}{du\,dv} + a_2\frac{d^2z}{dv^2} + a_3\frac{d^2z}{du\,dw} + a_4\frac{d^2z}{dv\,dw} + a_5\frac{d^2z}{dw^2} + \ldots\ldots \\ & + b\frac{dz}{du} + b_1\frac{dz}{dv} + b_2\frac{dz}{dw} + \ldots\ldots + cz = 0, \end{aligned} \right.$$

$$\text{III.}\left\{\begin{array}{l} a\frac{d^2z}{du^2}+a_1\frac{d^2z}{dudv}+a_2\frac{d^2z}{dv^2}+a_3\frac{d^2z}{dudw}+a_4\frac{d^2z}{dvdw}+a_5\frac{d^2z}{dw^2}+\cdots\\ +\frac{b\frac{dz}{du}+b_1\frac{dz}{dv}+b_2\frac{dz}{dw}+\cdots}{eu+e_1v+e_2w+\cdots}+\frac{cz}{(eu+e_1v+e_2w+\cdots)^2}=0.\end{array}\right.$$

Wenn gleich diese einleitenden Zeilen mehr für den ganz Sachkundigen bestimmt sind, so hatte ich doch keineswegs die Absicht, das Verständniss der nachfolgenden Schrift von der genauen Kenntniss aller derjenigen Einzelnheiten abhängig zu machen, welche vorhin berührt wurden. Ich darf vielmehr mit Zuversicht sagen, dass es mir gelungen sein wird, auch diejenigen Leser, welche mit der Integration der linearen Differentialgleichungen überhaupt nicht ganz vertraut sind, diesen so wichtigen Theil der Analysis im Zusammenhange vorzuführen. Dies glaubte ich am besten durch folgende Anordnung des Stoffs zu erreichen.

In einem *ersten* Abschnitte ist die Integration der linearen Differentialgleichungen, in ihrem Verhältniss zur Integration der gesammten Differentialgleichungen, betrachtet worden. Der *zweite* Abschnitt beschäftigt sich mit der Integration der allgemeinsten linearen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung mit zwei Veränderlichen:

$$\frac{d^2z}{dy^2}+Y\frac{dz}{dy}+Y_1z=Z.$$

Nachdem dort gezeigt worden, inwiefern aller Erfolg bei der Integration dieser Gleichung davon abhangt, dass die beiden Coefficienten Y und Y_1 als bestimmte Functionen von y vorliegen, wende ich mich zu den drei, vorhin unter (I.) angeführten Differentialgleichungen. Der *dritte* Abschnitt stellt sich die Aufgabe, diese drei Differentialgleichungen durch Transformation auf gewisse einfachere Formen zurückzuführen, deren allgemeines Integral dann im *vierten* Abschnitte entwickelt wird. Der *fünfte* Abschnitt beschäftigt sich mit der Integration der allgemeinsten linearen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung mit drei Veränderlichen:

$$X\frac{d^2z}{dx^2}+2Y\frac{d^2z}{dxdy}+Y\frac{d^2z}{dy^2}+X_1\frac{dz}{dx}+Y_1\frac{dz}{dy}+Zz=Z_1.$$

In dem *sechsten* Abschnitte werden die beiden vorher unter (II. u. III.) angeführten Differentialgleichungen für drei Veränderliche auf ihre einfachsten Formen gebracht; und diese letzteren werden dann in dem *siebenten* Abschnitte integrirt. Der *achte* Abschnitt transformirt die beiden Differentialgleichungen (II. und III.) für *vier* Veränderliche, und der *neunte* Abschnitt bestimmt deren allgemeines Integral. Ein *zehnter* Abschnitt endlich enthält die Transformation und zugleich die Integration der Differentialgleichung (II.) für *fünf* und *sechs* Veränderliche.

Mannheim, im November 1854.

I. Analytische Begrenzung der vorliegenden Aufgabe.

Jede Gleichung, welche eine Beziehung zwischen mehreren Grössen z, y, x, w ..... und deren Differentialen ausdrückt, heisst *Differentialgleichung.* Im Gegensatze spricht man von einer *endlichen* Gleichung, wenn sie von Differentialen frei ist. Die höchste Ordnung der vorkommenden Differentiale bestimmt die *Ordnung* der Differentialgleichung. Diejenigen Grössen, deren Differentiale in der Gleichung vorkommen, heissen die *Veränderlichen;* jede andere Grösse dagegen wird *Beständige* genannt.

Jeder Differentialgleichung entspricht ein *endliches* Verhalten zwischen den Veränderlichen; oder deutlicher: für jede Differentialgleichung giebt es ein endliches Verhalten, welches, in geeigneter Weise nach den Veränderlichen differentiirt, zu Gleichungen führt, mit deren Hülfe alle Differentiale aus der vorliegenden Differentialgleichung zu eliminiren sind, um derselben zu genügen. Das allgemeinste endliche Verhalten, welches einer Differentialgleichung entspricht, heisst deren *allgemeines Integral.* Dieses nimmt jedesmal gewisse *willkürliche* Grössen in sich auf, von denen die Differentialgleichung selbst, frei ist. Wenn man aber den allgemeinen Charakter dieses endlichen Verhaltens durch gewisse besondere Annahmen des Willkürlichen aufhebt, so bleibt ein *besonderes* Integral zurück. Die Lösung jener inhaltreichen Aufgabe, womit sich die Integration der Differentialgleichungen beschäftigt, besteht lediglich in der Herleitung des *allgemeinen Integrals.*

Wie auch immer die Differentiale in einer Differentialgleichung vorkommen mögen, so führt doch deren Integration jedesmal auf die Integration solcher Differentialgleichungen zurück, in welchen ausser den Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dw} \cdots\cdots \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dx^2} \cdots\cdots$ keine Differentiale weiter vorkommen. Eine solche Differentialgleichung aber heisst *partiell.* Man stellt sich daraus z als Function von y, x, w ..... hervorgehend vor, und nennt deshalb z die *abhängige Veränderliche,* während man von y, x, w ..... als von *unabhängigen* Veränderlichen spricht. Eine partielle Differentialgleichung heisst insbesondere *linear,* wenn sie in Rücksicht auf die abhängige Veränderliche und deren Differentialquotient vom *ersten* Grade ist.

Die Integration irgend einer Differentialgleichung erfordert vor Allem, dass man sich mit der Beschaffenheit der in dem allgemeinen Integrale vorkommenden

willkürlichen Grössen, und mit der Art, wie diese willkürlichen Grössen in dem allgemeinen Integrale sich zeigen, bekannt mache. Es lassen sich in dieser Rücksicht allgemeine Gesetze aufstellen, welche auf sehr ausgedehnte Gruppen von Differentialgleichungen Anwendung finden. Solche Gesetze über die Natur und das Vorkommen der willkürlichen Grössen im allgemeinen Integrale müssen aber überall, da wo sie einer hinreichenden Begründung fähig sind, an die Spitze gestellt werden, weil sie allen weitern Untersuchungen zum gemeinsamen Ausgangspuncte dienen. Da ich nun die Absicht habe, die vorliegende Schrift den *linearen* Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung zu widmen, so darf ich mich auf die Begründung jener Gesetze, insofern sie auf viel allgemeinere Differentialgleichungen Bezug haben, als ausserhalb der Grenzen der Aufgabe liegend, nicht einlassen. Ich werde mich deshalb begnügen, solche am geeigneten Orte nur geradezu anzuführen. Wohl aber verlangen derartige Gesetze hier eine weitere Besprechung, insofern sie nur gerade auf die vorliegende Classe der linearen Differentialgleichungen Bezug haben. Die linearen Differentialgleichungen gestatten es, Gesetze dieser Art aufzustellen, welche höchst bemerkenswerth sind, weil sie tiefer in den Bau des allgemeinen Integrals eindringen, als es für irgend andere Differentialgleichungen geschehen kann.

II. Allgemeines Integral der Gleichung

$$\frac{d^2z}{dy^2} + Y \cdot \frac{dz}{dy} + Y_1 z = Z.$$

Das *allgemeine* Integral irgend einer Differentialgleichung *zweiter* Ordnung mit *zwei* Veränderlichen schliesst zwei willkührliche *Beständige* ein, über deren Vorkommen aber im Allgemeinen nichts Bestimmtes sich aussagen lässt.

Dies allgemeine Integral lässt sich jedesmal dadurch erzielen, dass man die Differentialgleichung *zweiter* Ordnung vorerst auf eine Differentialgleichung *erster* Ordnung mit *einer* willkürlichen Beständigen c_1, oder auf ein erstes Integral zurückführt. Das erste Integral führt dann auf das endliche Verhalten, oder auf das zweite Integral; wobei die zweite willkürliche Beständige c_2 zum Vorschein kommt. Wenn man auf diesem Wege zu dem allgemeinen Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung übergeht, so hat man den Vortheil, dass dann das Vorkommen der willkürlichen Beständigen in dem jedesmal zu erzielenden Integrale keiner Unbestimmtheit unterliegt. Stellt man sich nämlich das erste Integral in Bezug auf die willkürliche Beständige c_1 entwickelt vor, so zeigt sich

dasselbe in der Form $\alpha_1 = c_1$, wo α_1 eine bestimmte Function von $\frac{dz}{dy}, z, y$ und der schon in der Differentialgleichung zweiter Ordnung auftretenden beständigen Grössen ist. Wenn man nun aber die Gleichung $\alpha_1 = c_1$ der zweiten Integration unterwirft, so nimmt c_1 mit den übrigen in α_1 vorkommenden beständigen Grössen gleichen Rang ein, und bedarf als solche keiner besondern Beachtung. Stellt man sich das zweite Integral in Bezug auf die willkürliche Beständige c_2 entwickelt vor, so zeigt sich dasselbe in der Form $\alpha_2 = c_2$, wo α_2 eine bestimmte Function von z und y, und der schon im ersten Integral vorkommenden beständigen Grössen ist.

Will man aber sogleich das zweite Integral bestimmen, so muss vor Allem das Vorkommen der beiden willkürlichen Beständigen c_1 und c_2 festgesetzt sein. Stellt man sich nun das zweite Integral in Bezug auf die eine c_2 aufgelöset vor, so hat man die Form $\alpha_2 = c_2$; allein das Vorkommen der andern willkürlichen Beständigen c_1 in α_2 bleibt dann im Allgemeinen unbestimmt, und wird sich je nach dem besondern Bau der Differentialgleichung zweiter Ordnung auf verschiedene Weise gestalten.

Die allgemeinste lineare Differentialgleichung *zweiter* Ordnung mit *zwei* Veränderlichen kann in der Form

$$\frac{d^2z}{dy^2} + Y\cdot\frac{dz}{dy} + Y_1 z = Z.$$

dargestellt werden, wo Y, Y_1 und Z irgend Functionen von y bezeichnen. Um diese Gleichung auf ein erstes Integral zurückzuführen, nehme man vor Allem eine Transformation vor. Man führe an die Stelle von z eine andere Veränderliche u ein, indem man $z = z_2 . u$ setzt, wo z_2 eine noch zu bestimmende Function von y ist. Die Differentialgleichung geht dadurch in

$$z_2\frac{d^2u}{dy^2} + 2\frac{dz_2}{dy}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{d^2z_2}{dy^2}\cdot u + Y\left(z_2\frac{du}{dy} + \frac{dz_2}{dy}u\right) + Y_1 z_2 u = Z,$$

über, oder, wenn man nach Differentialquotienten von u ordnet, in:

$$z_2\frac{d^2u}{dy^2} + \left(2\frac{dz_2}{dy} + Y z_2\right)\frac{du}{dy} + \left(\frac{d^2z_2}{dy^2} + Y\cdot\frac{dz_2}{dy} + Y_1 z_2\right)u = Z.$$

Zur Bestimmung von z_2 bedienen wir uns der Gleichung

$$\frac{d^2z_2}{dy^2} + Y\cdot\frac{dz_2}{dy} + Y_1 z_2 = 0.$$

Man setze irgend ein besonderes Integral dieser Gleichung in die vorige an die Stelle von z_2; dann bleibt:

$$z_2\frac{d^2u}{dy^2}+\left(2\frac{dz_2}{dy}+Yz_2\right)\frac{du}{dy}=Z.$$

Wenn man nun aber, abkürzend, die Bezeichnung

$$\frac{1}{u_1}=z_2^2\,.\,e^{\int Ydy}$$

annimmt, so erhält man, nach bekannten Regeln, das verlangte erste Integral jener Differentialgleichung in der Form

$$\frac{du}{dy}=u_,\int\frac{Zdy}{z_2u_,}+c_,u_,.$$

Die zweite Integration giebt daraus das endliche Verhalten

$$u=\int u_,\int\frac{Zdy^2}{z_2u_,}+c_,\int u_,dy+c_2,$$

oder auch, wenn man statt u die ursprüngliche Veränderliche z zurück einführt:

$$Z=z_2\int u_,\int\frac{Zdy^2}{z_2\cdot u_,}+c_,z_2\int u_,dy+c_2z_2.$$

Es zeigt sich hieraus, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dy^2}+Y\cdot\frac{dz}{dy}+Y_,z=Z$$

in allen Fällen die Form

$$z+z_0+c_,z_,+c_2z_2$$

annimmt, wo z_0, $z_,$ und z_2 Functionen von y sind, welche von den Coefficienten der Differentialgleichung abhangen. Die Entwicklung des allgemeinen Integrals auf diesem Wege ist aber davon abhängig, dass man ein *besonderes* Integral der Gleichung

$$(\alpha)\qquad \frac{d^2z}{dy^2}+Y\cdot\frac{dz}{dy}+Y_,z=0$$

anzugeben im Stande sei; denn ein solches besonderes Integral vertritt die Stelle jener Function z_2. Wenn z_2 bekannt ist, so bilde man die Function $z_,$ nach der Formel

$$(\beta)\qquad z_,=z_2.\int u_,dy=z_2.\int\frac{e^{-\int Ydy}}{z_2^2}dy.$$

Aus dieser Formel zeigt sich zugleich ein bemerkenswerthes Verhalten zwischen den beiden Functionen $z_,$ und z_2 des allgemeinen Integrals. Dieselben sind

nämlich jedesmal so beschaffen, dass keine von beiden durch einen beständigen oder einen von y unabhängigen Factor aus der andern abgeleitet werden kann. Denn Dies könnte nur dann geschehen, wenn $u_{,} = 0$ wäre; was aber in Folge des vorher angenommenen Werths von $u_{,}$ niemals zutrifft. Die dritte Function z^0 endlich erhält man aus der Formel

$$(\gamma) \qquad z_0 = z_2 . \int u_{,} . \int \frac{Z dy^2}{z_2 . u_{,}} = z_2 \cdot \int \frac{e^{-\int Y dy}}{z_2^2} \cdot \int z_2 Z e^{\int Y dy} dy^2.$$

Dies z_0 ist zugleich ein besonderes Integral der vorliegenden Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + Y \cdot \frac{dz}{dy} + Y_{,} z = Z.$$

Denn deren allgemeines Integral $Z = z_0 + c_{,} z_{,} + c_2 z_2$ geht in die Function z_0 über, wenn man den beiden Beständigen $c_{,}$ und c_2 den besondern Werth Null giebt. Für $Z = 0$ kann auch diese Function z_0 jedesmal gleich Null gesetzt werden.

Nachdem so das erste Integral, und aus diesem dann das zweite Integral entwickelt ist, beantwortet sich die weitere Frage, wie man zu jenen drei Functionen z_0, $z_{,}$ und z_2 gelange, wenn man, sogleich von der jetzt bekannten Form des allgemeinen Integrals $z = z_0 + c_{,} z_{,} + c_2 z_2$ ausgehend, verlangt, dass dieselbe die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + Y \cdot \frac{dz}{dy} + Y_{,} z = Z$$

befriedigen solle. Man setze deshalb jene Function an die Stelle von z. Dann erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2 z_0}{dy^2} + c_{,} \frac{d^2 z_{,}}{dy^2} + c_2 \frac{d^2 z_2}{dy^2} + Y\left(\frac{dz_0}{dy} + c_{,} \frac{dz_{,}}{dy} + c_2 \frac{dz_2}{dy}\right) + Y_{,}(z_0 + c_{,} z_{,} + c_2 z_2) = Z.$$

Da aber dieser Gleichung für alle möglichen Werthe von $c_{,}$ und c_2, genügt werden soll, so müssen eben sowohl die gemeinsamen Factoren von $c_{,}$ und c_2, als auch der Rest der Gleichung, für sich verschwinden. Man hat also:

$$\frac{d^2 z_0}{dy^2} + Y \cdot \frac{dz_0}{dy} + Y_{,} z_0 = Z,$$

$$\frac{d^2 z_{,}}{dy^2} + Y \cdot \frac{dz_{,}}{dy} + Y_{,} z_{,} = 0,$$

$$\frac{d^2 z_2}{dy^2} + Y \cdot \frac{dz_2}{dy} + Y_{,} z_2 = 0.$$

Zwei besondere Integrale der Gleichung (α) vertreten demnach die Stelle der beiden Functionen $z_{,}$ und z_2. Die Function z_0 aber giebt sich als besonderes Integral der vorliegenden Differentialgleichung zu erkennen.

Wenn nun auch diese zweite Herleitung des allgemeinen Integrals von der Kenntniss der drei besondern Integrale z_0, $z_{,}$ und z_2 abhängt, während man vorher nur des einen besondern Integrals z_2 bedurfte, so bringt sie dennoch einen erheblichen Gewinn. Denn in den allermeisten Fällen, wenn einmal ein besonderes Integral z_2 der Gleichung (α) gefunden ist, erhält man ein zweites ohne weitere Schwierigkeit; und dieses zeigt sich dann sogleich in einer Gestalt, welche einfacher ist als dasjenige, welches die Formel (β) aus dem zuerst gefundenen z_2 berechnet. Man wird demnach nur in solchen Fällen zur Formel (β) seine Zuflucht nehmen, wenn es keinen Weg giebt, der unmittelbar zu einer einfacheren Gestalt des zweiten besondern Integrals $z_{,}$ führt. Bei der Bestimmung der beiden besondern Integrale $z_{,}$ und z_2 aus der Gleichung (α), ist aber zu beachten, dass diese beiden Functionen auch in der That nicht durch einen beständigen Factor in einander übergeführt werden können. Die erste Entwicklungs-Art des allgemeinen Integrals lässt keinen Zweifel, dass jedesmal zwei besondere Integrale von solcher Beschaffenheit möglich sind.

Es kann übrigens auch kommen, dass man zu *drei* und *mehr* besondern Integralen der Gleichung (α) gelangt, die jedesmal die Eigenschaft haben, dass keines von ihnen durch einen beständigen Factor in ein anderes übergeht. Wenn aber irgend drei derartige besondere Integrale z_3, z_2 und $z_{,}$ vorliegen, so findet jedesmal das Verhalten $z_3 = c_{,} z_{,} + c_2 z_2$ Statt, wo $c_{,}$ und c_2 irgend beständige Grössen sind. Denn die Form $z = c_{,} z_{,} + c_2 z_2$ muss stets als allgemeines Integral der Gleichung (α) angesehen werden, und jedes besondere Integral z_3 wird aus dem allgemeinen dadurch abgeleitet, dass man den willkürlichen Beständigen $c_{,}$ und c_2 gewisse besondere Werthe giebt. Auf diese Weise kann also das dritte besondere Integral z_3 jedesmal aus den beiden andern hergeleitet werden. Es lassen sich demnach auch, wenn nur zwei besondere Integrale $z_{,}$ und z_2 da sind, eine grosse Zahl anderer bilden, indem man jedes der beiden bekannten mit einem beständigen Factor verbindet, und dann beide Producte addirt. Diese Bemerkung leistet gute Dienste, wenn es darauf ankommt, gewisse Formen der besondern Integrale, welche aus irgend einem Grunde nicht zusagen, in andere brauchbare überzuführen.

Zur Bestimmung der Function z_0 behält man die oben gefundene Formel (γ) bei, wenn sich nicht etwa vortheilhafter auf andere Weise ein besonderes In-

tegral der vorliegenden Differentialgleichung ermitteln lässt. Da Grund vorhanden ist, die Bestimmung eines zweiten besondern Integrals z_1 aus der Gleichung (α) dem Gebrauche der Formel (β) vorzuziehen, so gestattet übrigens auch die Formel (γ) eine wesentliche Vereinfachung. Aus der Formel (β) folgt nämlich, dass, wenn z_2 ein besonderes Integral der Gleichung (α) ist, dann auch

$$z_2.\int\frac{e^{-\int Ydy}}{z_2^2}\,dy$$

ein solches vorstellt. Nachdem aber die beiden besondern Integrale z_2 und z_1 aus der Gleichung (α) erlangt sind, findet die Beziehung

$$z_2.\int\frac{e^{-\int Ydy}}{z_2^2}\,dy = c_0 z_1 + c z_2,$$

Statt, wo c_0 und c irgend zwei beständige Grössen sind. Man theile durch z_2, differentire alsdann, und es bleibt:

$$\frac{e^{-\int Ydy}}{z_2^2} = c_0\left(\frac{z_1}{z_2}\right)_y,$$

wenn man abkürzend die Bezeichnung $\frac{d(z_1:z_2)}{dy} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)_y$ einführt. Es verwandelt sich dadurch die frühere Formel (γ) in die neue:

$$z_0 = c_0 z_1.\int\left(\frac{z_1}{z_2}\right)_y.\int z_2 Z e^{\int Ydy}\,dy^2,$$

oder auch, indem man theilweise integrirt, in:

$$z_0 = c_0 z_1.\int z_2 Z e^{\int Ydy}\,dy - c_0 z_2.\int z_1 Z e^{\int Ydy}\,dy.$$

Der beständige Factor c_0 dieses Ausdrucks ergiebt sich ohne Anstand, wenn man in dem obigen Ausdruck

$$e^{-\int Ydy} = c_0\left(z_2\frac{dz_1}{dy} - z_1\frac{dz_2}{dy}\right),$$

an die Stelle von y irgend einen beständigen Werth einführt.

Um das Bisherige an einigen Beispielen zu erläutern, setze man

1. Die Gleichung $\frac{d^2z}{dy^2} - zb\frac{dz}{dy} + (b^2 - c)z = 0.$

Hier ist $Z = 0$, also auch $z_0 = 0$. Zwei besondere Integrale der Gleichung (α) ergeben sich in der Form $z = e^{my}$. Denn setzt man dies z hinein, so erhält

man, weil $\frac{dz}{dy} = ne$ und $\frac{d^2z}{dy^2} = n^2e^{ny}$ ist, zur Bestimmung von n die quadratische Gleichung $n_2 - 2bn + b^2 = c$. Daraus folgen die beiden Werthe $n = b \pm \sqrt{c}$, und jene besondern Integrale sind:

$$z = e^{(b+\sqrt{c})y} \text{ und } z = e^{(b-\sqrt{c})y}.$$

Demnach ist das *allgemeine* Integral:

$$z = e^{by}(c_1 e^{\sqrt{c}y} + c_2 e^{-\sqrt{c-y}})$$

Wenn c negativ ist, nehmen jene besondern Integrale die *imaginäre* Gestalt an. Durch deren Addition und Subtraction aber ergeben sich die neuen Integrale

$$z = e^{by}.(e^{+\sqrt{cy}} + e^{-\sqrt{cy}}) \text{ und } z = e^{by}.(e^{+\sqrt{cy}} - e^{-\sqrt{cy}}),$$

oder auch, wegen des Zusammenhanges zwischen Exponential- und trigonometrischen Functionen, die beiden:

$$z = e^{by}\cos(\sqrt{-cy}) \text{ und } z = e^{by}.\sin(\sqrt{-cy}),$$

welche vom Imaginären frei sind. Das allgemeine Integral geht demnach in

$$z = e^{by}(c_1\cos(\sqrt{-cy}) + c_2\sin(\sqrt{-cy})).$$

über. Für den Fall $c = 0$ endlich bleibt nur das eine besondere Integral $z = e^{by}$; die Formel (β) aber giebt für das andere:

$$z = e^{by}\int e^{-2by}.e^{\int 2bdy}dy = e^{by}.\int dy = e^{by}.y,$$

und das *allgemeine* Integral der Gleichung $\frac{d^2z}{dy^2} - bz\frac{dz}{dy} + b^2z = 0$ ist:

$$z = e^{by}(c_1y + c_2).$$

2. Es sei $\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{1-2b}{y}\frac{dz}{dy} + \frac{b^2-c}{y^2}.z = 0.$

Auch hier ist $z_0 = 0$. Die Gleichung (α) giebt zwei besondere Integrale von der Form $z = y^n$. Denn, setzt man dies z hinein, so erhält man, weil $\frac{dz}{dy} = ny^{n-1}$ und $\frac{d^2z}{dy^2} = n(n-1)y^{n-2}$ ist, zur Bestimmung von n die quadratische Gleichung $n^2 - 2bn + b^2 = c$. Daraus ergeben sich die beiden Werthe $n = b \pm \sqrt{c}$, und die erwähnten besondern Integrale sind:

$$z = y^{b+\sqrt{c}} \text{ und } z = y^{b-\sqrt{c}}.$$

Man hat demnach für das *allgemeine* Integral:

$$z = y^b(c_1 y^{+\sqrt{c}} + c_2 y^{-\sqrt{c}}).$$

Für irgend ein negatives c gestalten sich jene besondern Integrale wieder imaginär. Wie vorher bilde man dann durch Addition und Subtraction zwei andre, welche vom Imaginären frei sind. Denn man erhält so:

$$z = y^b(e^{+\sqrt{c}.ly} + e^{-\sqrt{c}.ly}) \quad \text{und} \quad z = y^b(e^{+\sqrt{c}.ly} - e^{-\sqrt{c}.ly}),$$

oder, wegen des Zusammenhanges zwischen Exponential- und trigonometrischen Functionen, die beiden:

$$z = y^b.\cos(\sqrt{-c}.ly) \quad \text{und} \quad z = y^b.\sin(\sqrt{-c}.ly).$$

Das *allgemeine* Integral geht demnach in

$$z = y^b(c_1\cos(\sqrt{-c}.ly) + c_2.\sin(\sqrt{-c}.ly))$$

über. Für den Fall $c = 0$ endlich bleibt nur das eine besondere Integral $z = y^b$. Das zweite ergiebt sich aus der Formel (β). Demnach ist:

$$z = y^b.\int y^{-2b} e^{-\int\frac{1-2b}{y}dy} = y^b.\int\frac{dy}{y} = y^b.ly;$$

und der Gleichung $\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{1-2b}{y}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{b^2 z}{y^2} = 0$ entspricht das *allgemeine* Integral

$$z = y^b.(c_1.ly + c_2).$$

III. *Transformation der Gleichungen*

$$\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{by+c}{1}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{fy^2+gy+h}{1}\cdot z = 0,$$
$$\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{b+c}{y}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{fy^2+gy+h}{y^2}\cdot z = 0,$$
$$\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{by+c}{(y+a)y}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{fy^2+gy+h}{(y+a)^2y^2}\cdot z = 0.$$

Ein besonderes Integral der Differentialgleichung

$$Y\cdot\frac{d^2z}{dy^2} + Y_1\cdot\frac{dy}{dz} + Y_2 z = 0$$

kann immer erst dann gefunden werden, wenn die Coefficienten Y, Y_1 und Y_2 *bestimmte* Functionen von y sind. Man gehe dann von gewissen Voraussetzungen in Bezug auf die Beschaffenheit des besondern Integrals aus, und untersuche,

ob solche zum Ziele führen. Auf diesem Wege sollen im Folgenden die *besondern* Integrale der drei obigen Differentialgleichungen hergeleitet werden. Welche aber immer die dazu führenden Voraussetzungen sein mögen: die betreffenden Untersuchungen werden sich, als von der besondern Form der Functionen Y, Y_1 und Y_2 abhängig, jedesmal wesentlich vereinfachen, nachdem man die Differentialgleichungen den geeigneten Transformationen unterworfen hat. Die Aufmerksamkeit richtet sich deshalb zunächst auf diese *Transformationen.*

Im Allgemeinen lassen sich zu dem Zweck zwei verschiedenartige Transformationen anwenden. Die erstere besteht darin, dass man an die Stelle der unabhängigen Veränderlichen y eine neue y_1 einführt, welche als Function der ersteren angenommen wird. Die andere besteht in der Vertauschung der abhängigen Veränderlichen z gegen eine neue uz_1, wo u eine bestimmte Function von y ist.

Stellt man sich z vorerst als Function von y_1 vor, so hat man:

$$(a.)\quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dy_1}\cdot\frac{dy_1}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^2z}{dy_1^2}\cdot\left(\frac{dy_1}{dy}\right)^2 + \frac{dz}{dy_1}\cdot\frac{d^2y_1}{dy^2};$$

und die allgemeine Differentialgleichung geht in

$$Y\cdot\left(\frac{dy_1}{dy}\right)^2\cdot\frac{d^2z}{dy_1^2} + \left(Y\cdot\frac{d^2y_1}{dy^2} + Y_1\cdot\frac{dy_1}{dy}\right)\cdot\frac{dz}{dy_1} + Y_2 z = 0$$

über, wo die weitere Elimination von y mittels y_1 auszuführen bleibt. Auf eine bemerkenswerthe Umwandlung dieser Art führt die Beziehung $y_1 = my^n$, wo m und n beständige Grössen sind. Denn da dann $\frac{dy_1}{dy} = mny^{n-1}$ und $\frac{d^2y_1}{dy^2} = mn(n-1)y^{n-2}$ ist, so erhält man:

$$(a.)'\quad y\cdot\frac{dz}{dy} = ny_1\cdot\frac{dz}{dy_1} \quad \text{und} \quad y^2\cdot\frac{d^2z}{dy^2} = n^2y_1^2\cdot\frac{d^2z}{dy_1^2} + n(n-1)y_1\cdot\frac{dz}{dy_1}.$$

Setzt man aber $z = uz_1$, so geht die allgemeinere Differentialgleichung in

$$Y\cdot\left(u\cdot\frac{d^2z}{dy^2} + 2\cdot\frac{du}{dy}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{d^2u}{dy^2}\cdot z_1\right) + Y_1\left(u\cdot\frac{dz_1}{dy} + \frac{du}{dy}\cdot z_1\right) + Y_2 u z_1 = 0$$

über. Wenn man nach Differentialquotienten von z_1 ordnet, hierauf durch u theilt, und zugleich die abkürzenden Bezeichnungen $u_y = \frac{du}{dy}$ und $u_y^2 \frac{d^2u}{dy^2}$ annimmt, so bleibt:

$$(\beta.) \qquad Y\cdot\frac{d^2z_1}{dy^2} + \left(2Y\cdot\frac{u_y}{u} + Y_1\right)\frac{dz_1}{dy} + \left(Y\cdot\frac{u_y^2}{u} + Y_1\cdot\frac{u_y}{u} + Y_2\right)z_1 = 0.$$

Sobald nun die Coefficienten Y, Y_1 und Y_2 als bestimmte Functionen von y vorliegen, besteht die weitere Aufgabe darin, die Grössen y_1 und n so anzugeben, dass die neue Gleichung in der That einfacher sich gestaltet.

1. Es sei $(y+a)^2y^2\cdot\frac{d^2z}{dy^2} + (by+c)(y+a)y\cdot\frac{dz}{dy} + (fy^2+gy+h)z = 0.$

Man nehme vor Allem $y_1 = -\frac{y}{a}$ an. Dadurch erhält man:

$$(y_1-1)^2y_1^2\frac{d^2z}{dy_1^2} + \left(by_1-\frac{c}{a}\right)(y_1-1)y_1\frac{dz}{dy_1} + \left(fy_1^2-\frac{g}{a}y_1+\frac{h}{a^2}\right)z = 0.$$

Man lasse das letzte Glied $\frac{h}{a^2}$ verschwinden, und streiche dann den gemeinsamen Factor y_1. Dies wird durch Einführen von $z = y_1^n z_1$ erreicht. Denn die Annahme $u = y_1^n$ verwandelt die Gleichung in:

$$(\beta.) \left\{ \begin{aligned} &(y_1-1)^2y_1^2\frac{d^2z}{dy^2} + \left(2n(y_1-1)+by_1-\frac{c}{a}\right)(y_1-1)y_1\frac{dz_1}{dy_1} \\ &+ \left[n(n-1)(y_1-1)^2 + \left(by_1-\frac{c}{a}\right)n(y_1-1) + fy_1^2 - \frac{g}{a}y_1 + \frac{h}{a^2}\right]z_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Den Exponenten n bestimme man aus $n(n-1)+\frac{c}{a}n+\frac{h}{a^2} = 0$; dann bleibt die erwähnte einfachere Gleichung

$$(y_1-1)^2y_1\frac{d^2z_1}{dy_1^2} + (by_1+c)(y_1-1)\frac{dz_1}{dy_1} + (fy_1+g)z_1 = 0.$$

Man setze weiter $y_2 = 1-y_1$, was

$$(y_2-1)y_2^2\frac{d^2z_1}{dy_2^2} + (by_2-b-c)y_2\frac{dz_1}{dy_2} + (fy_2-f-g)z_1 = 0$$

giebt. Auch hier lasse man das letzte Glied verschwinden, um dann den gemeinsamen Factor y_2 zu streichen. Man setze deshalb $z_1 = y_2^n z_2$; so erhält man, weil $u = y_2^n$ ist, die Gleichung

$$(\beta.) \left\{ \begin{aligned} &(y_2-1)y_2^2\cdot\frac{d^2z_2}{dy_2^2} + (2n(y_2-1)+by_2-b-c)y_2\cdot\frac{dz_2}{dy_2} \\ &+ [n(n-1)(y_2-1) + (by_2-b-c)n + fy_2 - f - g]z_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Den Exponenten n bestimme man aus $n(n-1)+bn+cn+f+g=0$; dann bleibt die erwähnte einfachere Gleichung

$$(\alpha.) \qquad (y_2-1)y_2\cdot\frac{d^2z_2}{dy_2^2}+(by_2+c)\cdot\frac{dz_2}{dy_2}+fz_2=0.$$

Man gewinnt damit zugleich die einfachste Form, unter welcher die Gleichung (1.) im Allgemeinen dargestellt werden kann.

Für den Fall $\alpha=0$ geht deren ursprüngliche Form in

$$y^4\cdot\frac{d^2z}{dy^2}+(by+c)y^2\cdot\frac{dz}{dy}+(fy^2+gy+h)z=0$$

über. Man setze hier $y_1=\frac{1}{y}$, woraus

$$(\alpha.)' \qquad y\cdot\frac{dz}{dy}=-y_1\frac{dz}{dy_1} \quad \text{und} \quad y^2\cdot\frac{d^2z}{dy^2}=y_1^2\cdot\frac{d^2z}{dy_1^2}+2y_1\frac{dz}{dy_1},$$

folgt. Dann erhält man die Gleichung

$$(2.) \qquad y_1^2\cdot\frac{d^2z}{dy_1^2}+(-cy_1+z-b)y_1\frac{dz}{dy_1}+(hy_1^2+gy_1+f)z=0.$$

Hierin tilge man wieder das letzte Glied, und streiche dann den gemeinsamen Factor y_1. Man setze desshalb $z=y_1^n z_1$ wonach sich die Gleichung (2.), weil dann $u=y_1^n$ ist, in

$$(\beta.)\ y_1^2\cdot\frac{d^2z_1}{dy_1^2}+(2n-cy_1+2-b)y_1\frac{dz_1}{dy_1}+[n(n-1)+(-cy_1+2-b)n+hy_1^2+gy_1+f]z_1=0.$$

verwandelt. Bestimmt man n aus $n(n-1)+(2-b)n+f=0$, so erhält man die erwähnte einfachere Gleichung

$$y_1\frac{d^2z_1}{dy_1^2}+(by_1+c)\cdot\frac{dz_1}{dy_1}+(fy_1+g)z_1=0.$$

Um hier das vorletzte Glied verschwinden zu machen, setze man weiter $z_1=e^{ny_1}.z_2$. Wegen $u=e^{ny_1}$ ergiebt sich dann:

$$(\alpha.) \qquad y_1\cdot\frac{d^2z^2}{dy_1^2}+(zny_1+by_1+c)\cdot\frac{dz^2}{dy_1}+[n^2y_1+(by_1+c)n+fy_1+g].z_2=0.$$

Den Exponenten n bestimme man aus $n^2+bn+f=0$; was die einfachere Gleichung

$$(2.)' \qquad y_1\cdot\frac{d^2z^2}{dy_1^2}+(by_1+c).\frac{dz^2}{dy_1}+gz_2=0$$

giebt. Endlich setze man $y_2 = by_1$, und führe dadurch die Gleichung (2.) auf ihre einfachste Form

$$(b.) \qquad y_2 \cdot \frac{d^2 z_2}{dy_2^2} + (y_2 + c) \cdot \frac{dz_2}{dy_2} + \frac{gz_2}{b} = 0$$

zurück, in welcher nur zwei unbestimmte Beständige vorkommen.

Die letzte Substitution $y_2 = by_1$ fällt weg, wenn $b = 0$ ist. In diesem Falle zeigt sich die Gleichung (2') in der Form

$$y_1 \cdot \frac{d^2 z_2}{dy_1^2} + c_1 \cdot \frac{dz_2}{dy_1} + gz_2 = 0.$$

Auch diese Gleichung lässt sich auf die Form (b) zurückführen. Man setze deshalb $y_2 = 4\sqrt{(-gy_1)}$. Daraus ergeben sich die Ausdrücke

$$(\alpha.)' \qquad y_1 \cdot \frac{dz^2}{dy_1} = \frac{y_2}{2} \cdot \frac{dz_2}{dy_2} \quad \text{und} \quad y_1^2 \cdot \frac{d^2 z_2}{dy_1^2} = \frac{y_2^2}{4} \cdot \frac{d^2 z_2}{dy_2^2} - \frac{y_2}{4} \cdot \frac{dz_2}{dy_2},$$

und die Gleichung geht zunächst in

$$y_2 \cdot \frac{d^2 z_2}{dy_2^2} + (2c - 1) \cdot \frac{dz_2}{dy_2} - \frac{y_2 z_2}{4} = 0$$

über. Man setze aber weiter $z_2 = e^{\frac{1}{2}Y_2} . z_3$, so bleibt:

$$y_2 \cdot \frac{d^2 z_3}{dy_2^2} + (y_2 + 2c - 1) \cdot \frac{dz_3}{dy_2} + (c - \tfrac{1}{2}) \cdot z_3 = 0\,;$$

was in der That mit der Form (b) übereinstimmt.

(3.) Es sei nun:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + (by + c) \cdot \frac{dz}{dy} + (fy^2 + gy + h) \cdot z = 0\,.$$

Wir bringen hier zuerst den Coefficienten f zum Verschwinden, indem wir $z = e^{ny^2} \cdot z_1$ setzen. Die Annahme $u = e^{ny^2}$ giebt die Gleichung

$$(\beta.) \; \frac{d^2 z_1}{dy^2} + (4ny + by + c) \cdot \frac{dz_1}{dy} + (4n^2 y^2 + 2n + (by + c) \cdot 2ny + (fy^2 + gy + h) z_1 = 0\,.$$

Wenn man aber n aus $4n^2 + 2bn + f = 0$ hervorgehen lässt, so bleibt die verlangte einfachere Gleichung

$$(3.)' \qquad \frac{d^2 z_1}{dy^2} + (by + c) \cdot \frac{dz_1}{dg} + (gy + h) \cdot z_1 = 0\,.$$

Aus dieser lässt sich der Coefficient g tilgen, wenn man $z_1 = e^{ny} \cdot z_2$ setzt; denn die Annahme $u = e^{ny}$ führt auf die Gleichung

$$(\beta.)\quad \frac{d^2 z_2}{dy^2} + (2n + by + c) \cdot \frac{dz_2}{dy} + (n^2 + (by + c) \cdot n + gy + h) \cdot z_2 = 0.$$

Das Verhalten $bn + g = 0$ aber giebt die erwähnte Form

$$\frac{d^2 z_2}{dy^2} + (by + c) \cdot \frac{dz_2}{dy} + hz_2 = 0.$$

Nimmt man noch $by_1 = by + c$ an, so bleibt die einfachere Gleichung

$$\frac{d^2 z_2}{dy_1^2} + by_1 \cdot \frac{dz_2}{dy_1} + hz_2 = 0.$$

Auch diese Gleichung kann auf die Form (b) zurückgeführt werden. Denn setzt man $2y_2 = by_1^2$, so ergeben sich die Beziehungen

$$(\alpha.)'\qquad y_1 \frac{dz^2}{dy_1} = 2y_2 \cdot \frac{dz_2}{dy_2} \quad \text{und} \quad y_1^2 \cdot \frac{d^2 z_2}{dy_1^2} = 4y_2^2 \cdot \frac{d^2 z_2}{dy_2^2} = 2y_2 \frac{dz_2}{dy_2},$$

und die obige Gleichung verwandelt sich in:

$$y_2 \cdot \frac{d^2 z_2}{dy_2^2} + (y_2 + \tfrac{1}{2}) \cdot \frac{dz_2}{dy_2} + \frac{hz_2}{2b} = 0;$$

was in der That der obigen Form (b) sich unterordnet.

Durch die Vertauschung $z_1 = e^{ny} . z_2$ kann aber der Coefficient g der Gleichung (3.') nicht mehr zum Verschwinden gebracht werden, wenn dort $b = 0$ ist. Man lasse dann den Coefficienten c verschwinden, indem man $2n + c = 0$ setzt. Dadurch ergiebt sich

$$\frac{d^2 z_2}{dy^2} + (gy + h) . z_2 = 0.$$

Man setze weiter $gy_1 = gy + h$, so bleibt die einfachere Gleichung

$$\frac{d^2 z_2}{dy_1^2} + gy_1 \cdot z_2 = 0,$$

welche auch wieder auf die Form (b) zurückführt. Man setze deshalb vorerst $3y_2 = 4\sqrt{(-g)} \cdot y_1^{\frac{3}{2}}$. Daraus folgt:

$$(\alpha.)'\qquad y_1^2 \cdot \frac{d^2 z_2}{dy_1^2} = \tfrac{9}{4} y_2^2 \cdot \frac{d^2 z_2}{dy_2^2} + \tfrac{3}{4} y_2 \cdot \frac{dz_2}{dy_2},$$

und die transformirte Gleichung ist:

$$y_2 \cdot \frac{d^2 z_2}{dy_2^2} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{dz_2}{dy^2} - \frac{y_2 z_2}{4} = 0.$$

Endlich setze man noch $z_2 = e^{\frac{1}{2}y_2} . z_3$; was zu der Gleichung

$$y_2 \cdot \frac{d^2 z_3}{dy_2^2} + (y_2 + \tfrac{1}{3}) \cdot \frac{dz_3}{dy_2} + \frac{z_3}{6} = 0$$

führt; welche in der That mit der Form (b) übereinstimmt.

Auch die beiden in (II.) integrirten Gleichungen

$$\frac{d^2 z}{dy^2} - 2b \cdot \frac{dz}{dy} + (b_2 - c).z = 0 \text{ und}$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{1-2b}{y} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{b^2 - c}{y^2} \cdot z = 0$$

ordnen sich beziehlich den Gleichungen (3. und 2.) unter, und lassen sich als besondere Fälle auf eigenthümliche Weise in einander überführen. Setzt man nämlich $y_1 = ly$, so hat man, weil $\frac{dy_1}{dy} = \frac{1}{y}$ und $\frac{d^2 y_1}{dy^2} = -\frac{1}{y^2}$ ist, die beiden Beziehungen

$$(\alpha.) \qquad y \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dy_1} \quad \text{und} \quad y_2 \cdot \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d^2 z}{dy_1^2} - \frac{dz}{dy_1},$$

welche die letztere Gleichung auf die erstere zurückführen. In der That erhält man auch das allgemeine Integral der ersten Gleiehung aus dem der letzten, wenn man in diesem y an die Stelle von ly treten lässt.

IV. Allgemeines Integral der drei in (III.) transformirten Differentialgleichungen.

Das *besondere* Integral der vorher transformirten Differentialgleichungen lässt sich nur in einzelnen Fällen, wenn die beständigen Coefficienten dieser Gleichungen gewisse besondere Werthe annehmen, durch die gewöhnlichen Functionen, nemlich durch *Potential*-, *Exponential*- und *logarithmische* Functionen darstellen. , Genügt keine gewöhnliche Function, so ist offenbar die zunächst einfache Annahme die, dass das besondere Integral durch eine derjenigen Functionen dargestellt werden könne, welche aus der Integration der gewöhnlichen Functionen hervorgehen. Es wird sich zeigen, dass Dies in der That jedesmal für die genannten Differentialgleichungen zutrifft. Die besondern Integrale dieser Differentialgleichungen erscheinen demnach *unter einem Integralzeichen.* Sie können

aber im Allgemeinen nur *bestimmte* Integrale sein. Ein *unbestimmtes* Integral $z_2 . \int u dy$, worin z_2 und u_1 gewöhnliche Functionen von y sind, kann immer nur dann Geltung bekommen, wenn zugleich z_2 ein *besonderes* Integral ist. Denn jedes *unbestimmte* Integral zieht eine willkürliche Beständige c nach sich; so dass das besondere Integral $z = z_2 \int u_1 dy$ zugleich ein zweites $z = z_2 . (\int u_1 dy + c_1)$, oder auch $z = z_2$ voraussetzt. Jene besondern Integrale erscheinen demnach in der Form $z = \int_{v_1}^{v_2} s dv$, wo s eine gewöhnliche Function von y und v ist, die Integrationsgrenzen v_2 und v_1 aber entweder von y unabhängige Grössen sind, oder auch selbst als Functionen von y angenommen werden.

Wegen der weitern Beschaffenheit der Function s ist, wenigstens für den Fall zweier beständigen Grenzwerthe von v_2 und v_1, auf der Stelle zu sehen, dass durch Abscheiden eines Factors u, welcher nur y enthält und deshalb vor dem Integralzeichen in $z = \int_{v_1}^{v_2} s dv$ gesetzt werden könnte, die Veränderliche y unter diesem Integralzeichen nicht zum Verschwinden gebracht werden kann. Denn wenn Dies möglich wäre, also das besondere Integral auch unter der Form $z = u . \int_{v_1}^{v_2} s_1 dv$ dargestellt werden könnte, wo s_1 die Veränderliche y nicht mehr enthält, so wäre $\int_{v_1}^{v_2} s_1 dv$ nichts weiter als eine *Beständige*, das besondere Integral selbst aber wäre $z = u$, also eine gewöhnliche Function von y; was der Voraussetzung zuwider ist.

Das *unbestimmte* Integral $\int s dv$, in welchem s irgend eine Function von y und v ist, hat offenbar die Bedeutung $f(y, v) + c$, wo man sich f als *bestimmte* Function vorstellen kann, während c eine durch die Integration nach v herbeigeführte willkürliche Beständige, oder eine willkürliche Function von y und jeder andern von v unabhängigen Grösse ist. Setzt man aber $z = \int s dv$, so erhält man durch Differentiation:

$$\frac{dz}{dy} = \int \frac{ds}{dy} dv \quad \text{und} \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \int \frac{d^2 s}{dy^2} dv,$$

so lange man sich v von y unabhängig vorstellt. Das unbestimmte Integral $z = \int s dv$ führt demnach die Seite links in der allgemeineren Differentialgleichung

$$Y \cdot \frac{d^2 z}{dy^2} + Y_1 \cdot \frac{dz}{dy} + Y_1 z = 0,$$

unter der Voraussetzung eines von y unabhängigen v_1 in

$$\int\left(Y\cdot\frac{d^2s}{dy^2}+Y_1\cdot\frac{ds}{dy}+Y_2 s\right)\cdot dv = t+C,$$

über; wo t als eine von $f(y, v)$ und den Coefficienten Y, Y_1 und Y_2 der Differentialgleichung abhängige Function von y und v anzusehen ist, während C wieder eine willkürliche Function von y und jeder andern von v unabhängigen Grösse bedeutet, hervorgerufen durch das willkürliche c. Das bestimmte Integral $z=\int_{v_1}^{v_2} s\,dv$, dessen Grenzen v_2 und v_1 unabhängig sind, verwandelt demnach die Seite links in der Differentialgleichung, in t_2-t_1, wenn t_2 und t_1 die Function t dann bezeichnen, nachdem man darin statt v beziehlich die beiden Grenzwerthe v_2 und v_1 eingeführt hat. Wenn nun aber diese beiden Grenzwerthe v_2 und v_1 so beschaffen sind, dass $v-v_2$ und $v-v_1$ gleichzeitig Factoren von t sind, so hat man gleichzeitig $t_2=0$ und $t_1=0$, und deshalb auch $t_2-t_1=0$. Alsdann genügt das bestimmte Integral $z=\int_{v_1}^{v_2} s\,dv$ der Differentialgleichung, und muss deshalb als deren *besonderes* Integral angesehen werden. Zur Bestimmung der beiden Unbekannten s und t hat man die obige Gleichung

$$\int\left(Y\cdot\frac{d^2s}{dy^2}+Y_1\cdot\frac{ds}{dy}+Y_2 s\right)\cdot dv = t+C,$$

oder auch, wenn man beiderseits nach v differentiirt:

$$(\alpha.)\qquad Y\cdot\frac{d^2s}{dy^2}+Y_2\cdot\frac{ds}{dy}+Y_2 s=\frac{dt}{dv}.$$

Ausserdem aber wird noch die Anforderung an die Function t gestellt, dass sie zwei von y unabhängige Werthe v gebe, für welche t verschwindet. Denn zur Bestimmung der Grenzwerthe v_2 und v_1 hat man die Gleichung

$$(\beta.)\qquad t=0.$$

Um zu den Functionen s und t zu gelangen, gebe man, sobald die Coefficienten Y, Y_1 und Y_2 als bestimmte Functionen von y vorliegen, von einer bestimmten Voraussetzung aus, in Bezug auf das Vorkommen der Veränderlichen y. Wenn man die so specialisirten Werthe s und t in die Gleichung (a) einführt, so zerfällt dieselbe, durch Ordnen nach y, in mehrere andere; woraus das Vorkommen von v in s und t durch Rechnung hervorgeht. Die in (III) angeführten Differen-

tialgleichungen sind dort in allen Fällen auf eine der beiden einfacheren Gleichungen (a) und (b) zurückgeführt worden. Wir gehen aber bei der Bestimmung von s und t für diese beiden Gleichungen von einer und derselben Voraussetzung aus, in Bezug auf das Vorkommen der Veränderlichen y. Deshalb betrachten wir die Gleichung

$$(ay+b)y\cdot\frac{d^2z}{dy^2}+(cy+e)\cdot\frac{dz}{dy}+fz=0$$

welche jene beiden Gleichungen (a) und (b) gleichzeitig einschliesst. Man hat hier zur Bestimmung von s und t:

$$(\alpha.)\qquad (ay+b)y\cdot\frac{s_{y^2}}{s}+(cy+e)\cdot\frac{s_y}{s}+f=\frac{1}{s}\cdot\frac{dt}{dv}.$$

Man kommt aber zum Ziele, wenn man

$$s=V(v-y)^p \quad \text{und} \quad t=V_1(v-y)^{p-1}$$

setzt, wo p ein noch unbekannter Exponent ist, V und V_1 aber bestimmte Functionen von v sind. Denn diese Annahmen geben nach einander:

$$\frac{s_y}{s}=\frac{-p}{v-y}\quad,\quad\frac{s_{y^2}}{s}=\frac{p(p-1)}{(v-y)^2},$$

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{dt}{dv}=\frac{V_1}{V}\cdot\frac{p-1}{(v-y)^2}+\frac{V_{1v}}{V}\cdot\frac{1}{v-y};$$

und zur weitern Bestimmung von s und t dient die Gleichung

$$(\alpha.)\ (ay+b)yp(p-1)-(cy+e)p(v-y)+f(v-y)^2=\frac{V_1}{V}(p-1)+\frac{V_{1v}}{V}(v-y).$$

Um daraus die Gleichungen zur Bestimmung von p, V und V_1 abzuleiten, ordnet man vortheilhaft nach $v-y$. Man setze also $y=v-(v-y)$. Dies giebt zunächst:

$$ay^2+by=av^2+bv-(2av+b)(v-y)+a(v-y)^2$$
$$cy+e\ =cv+e-c(v-y).$$

Setzt man diese Werthe hinein, und dann den gemeinsamen Factor jeder einzelnen Potenz von $v-y$ gleich Null, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$(\alpha_1.)\qquad (av^2+bv)pV=V_1,$$

$$(\alpha_2.)\qquad [(2av+b)(p-1)+cv+e]pV+V_{1v}=0,$$

$$(\alpha_3.)\qquad ap(p-1)+cp+f=0.$$

Die letzte derselben giebt den Exponenten p, und aus der ersten ergiebt sich die Function V_1, wenn V bekannt ist. Um V zu finden, eliminire man V_1 aus (α_1) und (α_2). Man differentiire in dieser Absicht die Gleichung (α_1), welches

$$(av^2+bv)pV_v+(2av+b)pV-V_{1v}=0$$

giebt. Durch deren Addition zu (α_2) fällt V_1 weg, und es bleibt

$$(\alpha_2)' \qquad (av^2+bv)V_v+(2apv+bp+cv+e)V=0.$$

Zur Bestimmung von V hat man demnach:

$$\frac{V_v}{V}=-\frac{(2ap+c)v+bp+e}{av^2+bv}.$$

Die *Grenzen* des bestimmten Integrals $z=\int_{v_1}^{v_2} s\,dv$ ergeben sich, nachdem V bekannt ist, aus der Gleichung

$$(\beta.) \qquad t=V_1(v-y)^{p-1}=pV(av^2+bv)(v-y)^{p-1}=0.$$

Im Allgemeinen finden sich hieraus drei verschiedene Grenzwerthe; nämlich $v=-\frac{b}{a}$, $v=0$ und $v=\infty$. Jeder dieser Grenzwerthe gilt übrigens, weil die Factoren $av+b$ und v auch in V unter irgend einem Exponenten vorkommen, nur unter gewissen Bedingungen; welche weiter unten aus der Gleichung (β) abgeleitet werden sollen.

Dasselbe bestimmte Integral $z=\int_{v_1}^{v_2} V(v-y)^p\,dv$ giebt auch dann noch ein *besonderes* Integral der obigen Differentialgleichung, wenn man $v=y$ als Grenzwerth benutzt. Diejenigen Bedingungen, unter welchen dieser Grenzwerth $v=y$ Geltung erhält, können aber nicht mehr aus der Gleichung (β) geschlossen werden. Denn die Seite links der Differentialgleichung

$$Y\cdot\frac{d^2z}{dy^2}+Y_1\cdot\frac{dz}{dy}+Y_2z=0$$

wird durch das unbestimmte Integral $z=\int s\,dv=f(y,v)+c$ nur dann in jenen Ausdruck $t+C$ übergeführt, wenn man v von y unabhängig annimmt.

Nimmt man v als Function von y an, so führt das unbestimmte Integral auf einen andern Ausdruck $T+C$. Die Bedingungen, unter welchen dem bestimmten Integrale $z=\int_{v_1}^{v_2} s\,dv$ irgend ein veränderlicher Grenzwerth gegeben wer-

den darf, damit dasselbe ein besonderes Integral der Differentialgleichung vorstelle, müssen demnach aus der Gleichung

$$(\beta.)' \qquad T = 0$$

abgeleitet werden. Um aber T für den vorliegenden Werth $v = y$ zu finden, erwäge man, dass aus $z = f(y, v)$, wenn darin $v = y$ angenommen wird, durch Differentiiren das Verhalten $\frac{dz}{dy} = \frac{dt}{dy} + \frac{dt}{dv}$ sich ergiebt. Unter derselben Voraussetzung entstehen durch Differentiation von $z = \int s dv$ die Ausdrücke

$$\frac{dz}{dy} = \int \frac{ds}{dy} \cdot dv + s, \quad \text{und} \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \int \frac{d^2 s}{dy^2} \cdot dv + 2 \cdot \frac{ds}{dy} + \frac{ds}{dv}.$$

Man erhält demnach, wenn man, abkürzend, sogleich das vorhin gefundene t einführt, den Ausdruck

$$T = t + Y \cdot \left(2 \cdot \frac{ds}{dy} + \frac{ds}{dv}\right) + Y_1 s.$$

Für die Differentialgleichung

$$(ay + b) y \cdot \frac{d^2 z}{dy^2} + (cy + e) \cdot \frac{dz}{dy} + fz = 0$$

wurde vorhin, unter der Annahme eines beständigen v,

$$t = pV(av^2 + bv)(v - y)^{p-1}$$

gefunden. Lässt man nun aber die Grenze $v = y$ gelten, so erhält man, weil $s = V(v - y)^p$ ist, den Ausdruck

$$T = t + (ay^2 + by)[- pV(v - y)^{p-1} + V_v(v - y)^p] + (cy + e)V(v - y)^p.$$

Um diesen Ausdruck nach Potenzen von $v - y$ zu ordnen, setze man wieder $y = v - (v - y)$, welches

$$\begin{aligned} ay^2 + by &= av^2 + bv - (2av + b)(v - y) + a(v - y)^2 \\ cy + e &= cv + e - c(v - y) \end{aligned}$$

giebt. Wenn man Dies einführt, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} T = t - pV(av^2 + bv)(v - y)^{p-1} \\ + [V(2apv + bp + cv + e) + V_v(av^2 + bv)](v - y)^p \\ - [V(ap + c) + V_v(2av + b)](v - y)^{p+1} + aV_y(v - y)^{p+2}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf den Werth t endlich, und auf die Gleichung $(a_2)'$, bleibt der einfachere Ausdruck

$$T = -[V(ap+c) + V_v(2av+b)](v-y)^{p+1} + aV_v(v-y)^{p+2};$$

woraus zu schliessen ist, dass die Grenze $v=y$ Geltung bekomme, wenn $p+1>0$, oder wenn $p>-1$ ist.

Alle Bedingungen, unter welchen die vorhin erwähnten Grenzwerthe das *bestimmte* Integral $z=\int_{v_1}^{v_2} V(v-y)^p dv$ zu einem *besondern* Integral der obigen Differentialgleichung machen, beschränken sich auf die Anforderung, dass die vorkommenden Exponenten innerhalb gewisser Grenzen liegen. Diese Bedingungen beziehen sich aber immer nur auf die Operation des Integrirens. Die bestimmte Integration führt nämlich nicht mehr auf ein besonderes Integral, wenn die Exponenten ausserhalb jener Grenzen angenommen werden. Nachdem aber die bestimmte Integration unter der erwähnten Einschränkung ausgeführt ist (was jedesmal, wenn auch nur in Form einer unendlichen Reihe, geschehen kann) fallen jene Anforderungen weg, und die durch Integration erzielte Function von y genügt der Differentialgleichung auch für alle diejenigen Werthe der Exponenten, welche ausserhalb der vorhin festgestellten Grenzen liegen. Denn gesetzt, das Resultat der bestimmten Integration sei in einer Reihen-Entwickelung bekannt: die Reihe ist dann ohne Zweifel ein *besonderes* Integral der Differentialgleichung für alle möglichen Werthe der Exponenten, welche zwischen den durch die beiden Integrationsgrenzen $v=v_2$ und $v=v_1$ vorgeschriebenen Grenzen liegen; z. B. in Rücksicht auf die Integrationsgrenze $v=y_1$ für alle möglichen Werthe des Exponenten p, welche >-1 sind. Eine solche Grenze ist aber nur dadurch möglich, dass, nachdem man die Reihe an die Stelle von z in die Differentialgleichung eingeführt hat, in dem dadurch erlangten Resultate $A+Bp+Cp^2+\dots\dots=0$ der gemeinsame Factor jeder einzelnen Potenz von p für sich verschwindet; dass also $A=0$, $B=0$, $C=0$ ist. Wenn Dies zutrifft, so versteht es sich, dass die vorliegende Reihe auch für jeden andern Werth des Exponenten p, welcher <-1 ist, der Differentialgleichung Genüge leistet. Das bestimmte Integral $z=\int_{v_1}^{v} V(v-y)^p dv$ giebt also in allen Fällen ein *besonderes* Integral der Differentialgleichung, wenn nur bei der Integration die Exponenten innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen angenommen werden. Um das bestimmte Integral in diesem Sinne darzustellen, fügen wir die jedesmalige Bedin-

gung in Klammern bei. Wir schreiben also, z. B. in Rücksicht auf den Grenzwerth $v = y$:

$$z = \int_{v_1}^{y} V(v = y)^p dv (p + 1 > 0),$$

weil dieser Grenzwerth nur unter der Bedingung $p + 1 > 0$ zu einem besondern Integrale führt.

Zur Bestimmung von p hat man die *quadratische Gleichung* (α_3). Man gelangt demnach im Allgemeinen zu zwei verschiedenen Werthen von p, und so auch zu zwei verschiedenen Integralformen $z = \int_{v_1}^{v_2} V (v - y)^p dv$. Wir werden übrigens nur von der einen dieser beiden Formen Gebrauch machen, weil eine von beiden zur Darstellung der beiden besondern Integrale schon ausreicht, wenn man derselben nach einander verschiedene Grenzwerthe giebt.

Wir kehren jetzt zu jenen zwei mehr besondern Gleichungen (a) und (b) zurück, weil sich die weitere Rechnung für dieselben verschieden gestaltet.

1. Die Gleichung (b) schreibe man in der Form

$$(b.) \qquad y \cdot \frac{d^2z}{dy^2} + (y - a - b)\frac{dz}{dy} - az = 0.$$

Hier hat man $p = a$, nach (α_3); und dann zur Bestimmung von V die Gleichung

$$(\alpha_2'). \qquad \frac{V_v}{V} = - \frac{v - b}{v} = -1 + \frac{b}{v}, \text{ woraus}$$

$$V = e^{-v} v^b \text{ folgt.}$$

So gelangt man zu dem besondern Integrale

$$z = \int_{v_1}^{v_2} e^{-v} v^b (v - y)^a dv.$$

Die von y unabhängigen Grenzwerthe v ergeben sich aus der Gleichung

$$(\beta.) \qquad t = ae^{-v} v^{b+1} (v - y^{a-1} = 0.$$

In allen Fällen erhält man daraus $v = \infty$; dagegen $v = 0$ nur unter der Bedingung $b + 1 > 0$. Ausserdem gilt noch $v = y$, wenn $a + 1 > 0$ ist. Man erhält aber zwei besondere Integrale, wenn man zu irgend einem dieser drei Grenzwerthe v, nach einander jeden der beiden übrigen hinzunimmt.

Ein *besonderes* Integral erscheint als gewöhnliche Function in geschlossener

Form, wenn irgend eine der Reihen-Entwicklungen, auf welche die bestimmte Integration führt, mit einem ihrer Glieder abbricht. Es ist aber klar, dass in dieser Rücksicht entweder nur die steigend-, oder nur die fallend nach y geordneten Reihen zu untersuchen sind. Denn eine fallende Reihe, welche mit irgend einem ihrer Glieder abbricht, verwandelt sich in eine steigende Reihe, wenn man die einzelnen Glieder in der entgegengesetzten Ordnung auf einander folgen lässt. Wir benutzen hier die *fallenden* Reihen.

Um das besondere Integral in einer *fallenden* Reihe auszudrücken, gebrauche man vorerst das bestimmte Integral

$$z=\int_0^\infty e^{-v}v^b(v-y)^a\,dv \qquad (b+1>0).$$

Man entwickele $(v-y)^a$ nach *fallenden* Potenzen von y. Dies giebt

$$z=y^a\cdot\int_0^\infty e^{-v}\cdot\left(v^b-\frac{a}{1}\cdot\frac{v^{b+1}}{y}+\frac{a}{1}\cdot\frac{a-1}{2}\cdot\frac{v^{b+2}}{y^2}-\cdots\right)\cdot dv \qquad (b+1>0).$$

Durch Differentiation erhält man aber

$$de^{-v}v^{b+1}=-e^{-v}v^{b+1}\,dv+(b+1)e^{-v}v^b\,dv,$$

und daraus durch Integration den Ausdruck

$$\int_0^\infty e^{-v}v^{b+1}\,dv=(b+1)\cdot\int_0^\infty e^{-v}v^b\,dv \qquad (b+1>0)$$

Indem b nach und nach mit $b+1$, $b+2$ ..... verwechselt wird, giebt dieser Ausdruck, weil der gemeinsame von y unabhängige Factor $\int_0^\infty e^{-v}v^b\,dv$ ausser Acht gelassen werden kann, das *besondre* Integral

$$z=y^a\cdot\left(1-\frac{a(b+1)}{1}\cdot\frac{1}{y}+\frac{a(b+1)}{1}\cdot\frac{(a-1)(b+2)}{2}\cdot\frac{1}{y^2}\right.$$
$$\left.-\frac{a(b+1)}{1}\cdot\frac{(a-1)(b+2)}{2}\cdot\frac{(a-2)(b+3)}{3}\cdot\frac{1}{y^3}+\cdots\cdots\right).$$

Das obige *bestimmte* Integral geht demnach in eine *Potentialfunction* über, wenn $a+1$ eine *positive*, oder wenn b eine *negative ganze* Zahl ist.

Eine andere Reihe, nach *fallenden* Potenzen von y geordnet, lässt sich eben so aus dem bestimmten Integrale

$$z = \int_y^\infty e^{-v} v^b (v-y)^a dv \qquad (a+1>0)$$

ableiten. Man vertausche zu diesem Zweck $v-y$ mit u, welches

$$z = e^{-y}.\int_0^\infty e^{-u}(u+y)^b u^a du \qquad (a+1>0)$$

giebt. Die Reihen-Entwicklung dieser Form ergiebt sich aber noch scheller aus der obigen Reihen-Entwicklung, wenn man die entsprechenden bestimmten Integrale mit einander vergleicht. Das erstere geht nämlich in das andre über, wenn man dort a mit b, b mit a, $+y$ mit $-y$ vertauscht, und dann noch mit e^{-y} multiplicirt. Die verlangte Reihe ist demnach:

$$z = e^{-y} y^b \cdot \left(1 + \frac{b(a+1)}{1} \cdot \frac{1}{y} + \frac{b(a+1)}{1} \cdot \frac{(b-1)(a+2)}{2} \cdot \frac{1}{y^2} + \dots\dots\right),$$

und bricht ab, wenn $b+1$ eine *positive*, oder wenn a eine *negative ganze* Zahl ist.

2. Die Gleichung (a) lässt sich in der Form

$$(a). \quad (y-1)y \cdot \frac{d^2z}{dy^2} + [(1-a-b)y + c]\frac{dz}{dy} + abz = 0$$

schreiben. Zur Bestimmung von p hat man $p^2-(a+b)p+ab=0$; nach (a_3). Daraus folgen $p=a$ und $p=b$. Die Annahme des einen Werths a von p reicht hin, die beiden besondern Integrale aufzustellen. Es ist aber weiter:

$$\frac{V_v}{V} = -\frac{(2p+1-a-b)v-p+c}{(v-1)v}$$

$$= \frac{(b-a-1)v+a-c}{(v-1)v} = \frac{b-c-1}{v-1} + \frac{c-a}{v}, \quad (a_2)', \quad \text{und daraus:}$$

$$V = (v-1)^{b-c-1}.v^{c-a}.$$

So gelangt man zu dem besondern Integrale

$$z = \int_{v_1}^{v_2} (v-1)^{b-c-1}.v^{c-a}.(v-y)^a dv.$$

Die von y unabhängigen Grenzwerthe ergeben sich aus der Gleichung

$$(\beta.) \qquad t = a(v-1)^{b-c}.v^{c-a+1}.(v-y)^{a-1} = 0.$$

Man erbält also $v=1$, unter der Bedingung $b-c>0$, oder $c<b$, $v=0$, unter der Bedingung $c-a+1>0$ oder $c+1>a$, und $v=\infty$, so lange die Summe der drei Exponenten in dem Werthe von t, nämlich $b<0$ angenommen wird. Ausserdem aber hat man noch die Grenze $v=y$, so lange $a+1>0$ ist. Man

erhält aber zwei besondre Integrale, wenn man auf zweierlei Weise irgend zwei von den so eben angeführten vier Werthen von v als Grenzen des bestimmten Integrals zusammennimmt.

Die *bestimmte* Integration führt auf verschiedene *Potentialfunctionen*. Die Bedingungen, unter welchen Dies geschieht, sind aber eben so mannigfaltig, als zahlreich. Was die nach Potenzen von y geordneten Reihen geben, soll an den *steigenden* Reihen gezeigt werden.

Um ein *besondres* Integral in einer *steigenden* Reihe nach y zu entwickeln, bedienen wir uns des bestimmten Integrals

$$z = \int_1^\infty (v-1)^{b-c-1} . v^{c-a} . (v-y)^a dv \qquad (c < b \quad , \quad b < 0)$$

Man entwickle den Factor $(v-y)^a$ nach *steigenden* Potenzen von y; welches

$$z = \int_1^\infty (v-1)^{b-c-1} . (v^c - a v^{c-1} . \frac{y}{1} + a(a-1) v^{c-2} . \frac{y^2}{1.2} - \dots) dv \quad (c<b, b<0)$$

giebt. Durch Differentiation findet sich aber:

$$\begin{aligned} d(v-1)^{b-c} . v^c &= (b-c)(v-1)^{b-c-1} . v^c dv + c(v-1)^{b-c} . v^{c-1} dv \\ &= b(v-1)^{b-c-1} . v^c dv - c(v-1)^{b-c-1} . v^{c-1} dv, \end{aligned}$$

und daraus durch Integration die Beziehung

$$\int_1^\infty (v-1)^{b-c-1} . v^{c-1} dv = \frac{b}{c} . \int_1^\infty (v-1)^{b-c-1} . v^c dv \qquad (c < b) \quad , \quad b < 0).$$

Wenn man hierin c nach und nach gegen $c-1$, $c-2$ ....., und gleichzeitig b gegen $b-1$, $b-2$ ..... vertauscht, so verwandelt sich, weil man den gemeinsamen, von y unabhängigen Factor $\int_1^\infty (v-1)^{b-c-1} v^c dv$ ausser Acht lassen darf, obige Reihen-Entwicklung in:

$$z = 1 - \frac{ab}{c} . \frac{y}{1} + \frac{ab}{c} . \frac{(a-1)(b-1)}{c-1} . \frac{y^2}{1.2} - \frac{ab}{c} . \frac{(a-1)(b-1)}{c-1} . \frac{(a-2)(b-2)}{c-2} . \frac{y^3}{1.2.3} + .$$

Die Reihe bricht ab, wenn $a+1$, oder auch wenn $b+1$ eine *positive ganze* Zahl ist.

Durch dieselbe Rechnung gelangt man zu noch andern nach *steigenden* Potenzen von y geordneten Reihen. Denn es lassen sich einige der bestimmten Integrale

$$z = \int_{v_1}^{v_2} (v-1)^{b-c-1} . v^{c-a} (v-y)^a dv$$

durch Einführen einer neuen Veränderlichen u, an die Stelle von v, so umwandeln, dass die neue Form wieder die Grenzwerthe $u_1 = 1$ und $u_2 = \infty$ annimmt, während sie sich im Uebrigen nur durch die Exponenten von der ursprünglichen unterscheidet.

Zum Behuf dieser Transformation bedienen wir uns vorerst des Ansdrucks

$$v-1=\frac{1-y}{u-1} \quad \text{oder} \quad u-1=\frac{1-y}{v-1},$$

und erhalten dadurch die neue Form

$$z=\int_{u_1}^{u_2}\left(\frac{1-y}{u-1}\right)^{b-c}\cdot\left(\frac{1-y}{u-1}+1\right)^{c-a}\cdot\left(\frac{1-y}{u-1}+1-y\right)^{a}\cdot\frac{du}{u-1},$$

oder, wenn man die gemeinsamen Factoren ausscheidet:

$$z=(y-1)^{a+b-c}\int_{u_1}^{u_2}(u-1)^{-b-1}.(u-y)^{c-a}u^a.du.$$

Die zwischen u und v angenommene Abhängigkeit giebt aber, aus

$$v=1, \quad v=0, \quad v=\infty, \quad v=y,$$

beziehlich die neuen Grenzwerthe

$$u=\infty, \quad u=y, \quad u=1, \quad u=0.$$

So entsteht, wenn man die Grenzen $v=1$ und $v=\infty$, also dasselbe bestimmte Integral beibehält, welches auch die erste Reihe gegeben hat, die neue Form

$$z=(y-1)^{a+b-c}.\int_1^\infty(u-1)^{-b-1}(u-y)^{c-a}.u^a du \qquad (c<b \ , \ b<0).$$

Daraus geht eine *zweite steigende* Reihe hervor. Diese lässt sich schneller aus der ersten ableiten, wenn man die beiden Formen des bestimmten Integrals mit einander vergleicht. Die ursprüngliche Form geht nämlich in die neue über, wenn man dort a mit $c-a$, b mit $c-b$ vertauscht, und wenn man ausserdem mit $(y-1)^{a+b-c}$ multiplicirt. Die verlangte Reihe ist demnach:

$$z=(y-1)^{a+b-c}.\left(1-\frac{(c-a)(c-b)}{c}\cdot\frac{y}{1}+\frac{(c-a)(c-b)}{c}\cdot\frac{(c-a-1)(c-b-1)}{c-1}\cdot\frac{y^2}{1.2}-..\right).$$

Sie bricht ab, wenn $c-a+1$, oder wenn $c-b+1$ eine *positive ganze* Zahl ist.

Um eine *dritte* Reihe, geordnet nach *steigenden* Potenzen von y, zu finden, transformire man mittels der Beziehung

$$v=\frac{y}{u} \quad \text{oder} \quad u=\frac{y}{v}.$$

Man gelangt dadurch zu der neuen Form

$$z=\int_{u_1}^{u_2}\left(\frac{y}{u}-1\right)^{b-c-1}\left(\frac{y}{u}\right)^{c-a+1}\left(\frac{y}{u}-y\right)^{a}\cdot\frac{du}{u},$$

oder, wenn man die gemeinsamen Factoren ausscheidet, zu

$$z=y^{c+1}\cdot\int_{u_1}^{u_2}(u-y)^{b-c-1}\,.\,u^{-b-1}(u-1)^{a}du.$$

Jene Beziehung zwischen u und v giebt aber, aus

$$v=1\quad,\quad v=0\quad,\quad v=\infty\quad,\quad v=y,$$

beziehlich die neuen Grenzwerthe

$$u=y\quad,\quad u=\infty\quad,\quad u=0\quad,\quad u=1.$$

Desshalb findet sich, wenn man die Grenzwerthe $v=0$ und $v=y$ beibehält, die neue Form

$$z=y^{c+1}\cdot\int_1^{\infty}(u-y)^{b-c-1}\,.\,u^{-b-1}\,.\,(u-1)^{a}du\qquad(c+1>a\ ,\ a+1>0).$$

Die Reihe selbst aber lässt sich aus der ersten, durch Vergleichung der entsprechenden bestimmten Integrale ableiten. Man erhält das vorliegende bestimmte Integral aus dem ersten, wenn man in diesem c gegen $-c-2$, sodann b gegen $a-c-1$ und a gegen $b-c-1$ vertauscht, und wenn man endlich noch den Factor y^{c+1} hinzufügt. Die verlangte Reihe ist demnach:

$$z=y^{c+1}\cdot\left(1+\frac{(c-a+1)(c-b+1)}{c+2}\cdot\frac{y}{1}+\frac{(c-a+1)(c-b+1)}{c+2}\cdot\frac{(c-a+2)(c-b+2)}{c+3}\cdot\frac{y^2}{1,2}\right),$$

Sie bricht ab, wenn $c-a$, oder wenn $c-b$ eine *negative ganze* Zahl ist.

Eine *vierte* steigende Reihe endlich ergiebt sich durch die Transformation

$$v-y=\frac{y(y-1)}{u-y}\quad\text{oder}\quad u-y=\frac{y(y-1)}{v-y}.$$

Die Elimination von v liefert die neue Form

$$z=\int_{u_1}^{u_2}\left(\frac{y(y-1)}{u-y}+y-1\right)^{b-c-1}\cdot\left(\frac{y(y-1)}{u-y}+y\right)^{c-a}\cdot\left(\frac{y(y-1)}{u-y}\right)^{a+1}\cdot\frac{du}{u-y},$$

oder, wenn man die gemeinsamen Factoren ausscheidet, die Form

$$z=y^{c+1}(y-1)^{a+b-c}\cdot\int_{u_1}^{u_2}u^{b-c-1}\,.\,(u-1)^{c-a}\,.\,(u-y)^{-b-1}du.$$

Die zwischen u und v angenommene Abhängigkeit, berechnet aus

$$v = 1 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad v = \infty \quad , \quad v = y,$$

giebt beziehlich die neuen Grenzwerthe

$$u = 0 \quad , \quad u = 1 \quad , \quad u = y \quad , \quad u = \infty .$$

Bedient man sich also der Grenzen $v = 0$ und $v = y$, folglich desselben bestimmten Integrals, aus welchem schon die dritte Reihe abgeleitet wurde, so erhält man:

$$z = y^{c+1}.(y-1)^{a+b-c} \cdot \int_1^{\infty} u^{b-c-1}.(u-1)^{c-a}.(u-y)^{-b-1}.du \qquad (c+1 > a \;,\; a+1 > 0).$$

Die Reihen-Entwicklung geht aus der *ersten* Reihe hervor, wenn man dort vorerst c mit $-c-2$, sodann b mit $-a-1$ und a mit $-b-1$ vertauscht, und ausserdem noch den Factor $y^{c+1}(y-1)^{a+b-c}$ hinzufügt. Denn die nämlichen Vertauschungen führen auch die entsprechenden bestimmten Integrale in einander über. Es ergiebt sich:

$$z = y^{c+1}.(y-1)^{a+b-c} \cdot \left(1 + \frac{(a+1)(b+1)}{c+2} \cdot \frac{y}{1} + \frac{(a+1)(b+1)}{c+2} \cdot \frac{(a+2)(b+2)}{c+3} \cdot \frac{y^2}{1.2} + ..\right);$$

und diese Reihe bricht ab, wenn a, oder wenn b eine *negative ganze* Zahl ist.

Wenn eine der Bedingungen, unter welchen das erste der beiden bestimmten Integrale *Potentialfunction* ist, mit einer von denjenigen zusammentrifft, welche das zweite bestimmte Integral in eine solche Function verwandeln, so nimmt offenbar auch das *allgemeine* Integral die Potentialform an.

Es kann übrigens auch geschehen, dass eines der bestimmten Integrale allein schon zwei besondre Integrale giebt. Dies ist *dann* der Fall, wenn die Coefficienten der entsprechenden Reihe, von einer gewissen Stelle an, den Factor $\frac{0}{0}$ aufnehmen. Der Factor $\frac{0}{0}$ vertritt dann die Stelle einer *willkürlichen* Beständigen, und die Reihe, deren Glieder zum Theil mit dieser willkürlichen Beständigen als Factor verbunden sind, giebt gleichzeitig die beiden besondern Integrale. Diese beiden besondern Integrale haben aber jedesmal die Eigenthümlichkeit, dass sie sich durch Potentialfunctionen in *geschlossener Form* ausdrücken lassen. Die beiden vorher entwickelten Reihen des *erstern* bestimmten Integrals schliessen gleichzeitig den Factor $\frac{0}{0}$ ein, wenn $a+1$, und zugleich $c-a+1$, oder auch wenn $b+1$ und zugleich $c-b+1$ eine *positive ganze* Zahl ist, weil dann jedesmal auch $c+1$ eine solche Zahl ist. In solchem Falle setze man in diesen

beiden Reihen-Entwicklungen den unbestimmten Factor $\frac{0}{0} = 0$; dadurch gelangt man zu den beiden erwähnten besondern Integralen. Eben so tritt der unbestimmte Factor $\frac{0}{0}$ gleichzeitig in jenen beiden Reihen-Entwickluueen des *zweiten* bestimmten Integrals auf, wenn a, und zugleich $c-a$, oder auch wenn b, und zugleich $c-b$, eine *negative ganze* Zahl ist, weil dann jedesmal auch $c+1$ eine solche Zahl ist. Die beiden besondern Integrale gehen dann aus diesen Reihen wieder als Potentialfunctionen hervor, wenn man den Factor $\frac{0}{0}$ gleich Null setzt. Es erfolgt daraus eine zweite Bedingung, unter welcher auch das *allgemeine* Integral der vorliegenden Differentialgleichung als Potentialfunction auftritt.

Es lassen sich aber die beiden besondern Integrale noch auf andre Weise in Reihen entwickeln, deren Glieder nach Potenzen einer *irrationalen* Function von y sich ordnen lassen. Diese Reihen haben ausserdem das Eigenthümliche, dass sie beide gleichzeitig mit einem bestimmten Gliede abbrechen, wenn die Beständigen a, b und c der Differentialgleichung zwei gewisse Bedingungen erfüllen; während doch keine von beiden abbricht, wenn nur eine dieser beiden Bedingungen erfüllt wird. Der Fall tritt ein, wenn in irgend einer der obigen vier Formen des besondern Integrals, der eine Exponent, zu jedem der beiden andern Exponenten addirt, dieselbe Summe $\frac{1}{2}i$ giebt, und wenn i irgend eine positive oder negative *ungerade* Zahl ist. Da aber überhaupt nur die vier Exponenten $b-c-1$, $c-a$, a, $-b-1$ vorkommen, so gelangt man nach der genannten Regel zu folgenden sechs Systemen von Bedingungsgleichungen:

$$c+1 = a-b = \tfrac{1}{2}i \quad , \quad c+1 = -(a-b) = \tfrac{1}{2}i,$$
$$a+b-c = a+b = \tfrac{1}{2}i \quad , \quad a+b-c = -(a+b) = \tfrac{1}{2}i,$$
$$a+b-c = c+1 = \tfrac{1}{2}i \quad , \quad a+b-c = -(c+1) = \tfrac{1}{2}i.$$

So lässt sich also zugleich eine dritte Bedingung aussprechen, unter welcher auch das allgemeine Integral der vorliegenden Differentialgleichung als *Potentialfunction* auftritt.

Um die, solchen Fällen entsprechenden *Potentialfunctionen* zu finden, nehmen wir Zuflucht zu weitern Transformationen jener bestimmten Integrale. Wenn man den vor dem Integralzeichen stehenden Factor ausser Acht lässt, so begegnet man noch drei verschiednen Formen, je nachdem nämlich die beiden gleichen Exponenten auf die drei Factoren des bestimmten Integrals vertheilt sind. Die *erste* Form kann durch

$$z=\int_0^1 (v^2-v)^{m-\frac{1}{2}}(v-y)^{-m-n}dv \qquad (m+\tfrac{1}{2}>0),$$

dargestellt werden; wo m irgend ein Zahlenwerth, n aber eine positive oder negative *ganze* Zahl ist. Die *zweite* Form

$$z=\int_1^y (v-1)^{m-\frac{1}{2}}.v^{-m-n}.(v-y)^{m-\frac{1}{2}}.dv \qquad (m+\tfrac{1}{2}>0),$$

wo m und n dieselbe Bedeutung haben wie vorhin, lässt sich leicht auf die erste zurückführen. Man setze deshalb $v=1-(1-y)u$, welches

$$z=(y-1)^{m-n}.\int_0^1 (u^2-u)^{m-\frac{1}{2}}\cdot\left(u-\frac{1}{1-y}\right)^{-m-n}.du \qquad (m+\tfrac{1}{2}>0)$$

giebt. Man stelle demnach, wenn die der ersten Form entsprechende Potentialfunction bekannt ist, diese Potentialfunction für die zweite Form auf, indem man dort y mit $\frac{1}{1-y}$ vertauscht, und dann noch mit $(y-1)^{m-n}$ multiplicirt. Auch die *dritte* Form

$$z=\int_0^y (v-1)^{-m-n}.(v^2-yv)^{m-\frac{1}{2}}dv \qquad (m+\tfrac{1}{2}>0)$$

führt auf die erste zurück. Denn setzt man $v=yu$, so ergiebt sich:

$$z=y \quad \int_0^1 \left(u-\frac{1}{y}\right)^{-m-n}(u^2-u)^{m-\frac{1}{2}}du \qquad (m+\tfrac{1}{2}>0).$$

Die entsprechende Potentialfunction wird also aus der ersten erlangt, wenn man y mit $\frac{1}{y}$ vertauscht, und ausserdem den Factor y^{m-n} hinzufügt. Es reicht demnach hin, die jener ersten Form entsprechende Potentialfunction zu entwickeln. Man berücksichtige aber, um die hiezu führenden Uetersuchungen möglichst abzukürzen, vorerst nur den Fall $n=0$, also die einfachere Form

$$z=\int_0^1 (v^2-v)^{m-\frac{1}{2}}(v-y)^{-m}dv.$$

Man setze zunächst $v-y=w$; was

$$z=\int_{-y}^{1-y} \left(w^2+(2y-1)w+y(y-1)\right)^{m-\frac{1}{2}}w^{-m}dw$$

giebt. Es lässt sich aber auch

$$z=\int_{-y}^{1-y} \left(w+\frac{y(y-1)}{w}+2y-1\right)^{m-\frac{1}{2}}.\frac{dw}{\sqrt{w}}.$$

schreiben. An die Stelle von w führe man weiter die neue Veränderliche u ein, mittels:

$$(1.)\qquad x + \frac{y(y-1)}{x} + 2y - 1 = u.$$

Um x zu eliminiren, entwickle man hieraus:

$$(2.)\quad \begin{cases} 2x = u - 2y + 1 \pm \sqrt{[(u-2y+1)^2 - 4y(y-1)]} \\ \quad = u-2y+1 \pm \sqrt{\{[u-2y+1+2\sqrt{(y(y-1)}][u-2y+1-2\sqrt{(y(y-1))}]\}}. \end{cases}$$

Dem nämlichen u entsprechen also im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe von x. Bei der Elimination von x muss man aber zwischen gewissen Grenzen x des bestimmten Integrals das *positive*, zwischen andern das *negative* Zeichen beibehalten. Denn wollte man ein bestimmtes x aus dem an die Stelle dieses x eingeführten wieder erlangen, so wäre jedesmal nur das eine Zeichen brauchbar. Um die Grenzwerthe von x zu finden, nehme man $y<0$ an. Wenn nun u einen der beiden Werthe $2y-1 \pm 2\sqrt{[y(y-1)]}$ hat, so giebt die Gleichung (2.) nur einen einzigen Werth von x, welcher aber unter der Voraussetzung $y<0$ jedesmal *reell* ist. Für das erstere $u = 2y-1+2\sqrt{[y(y-1)]}$ erhält man $x = +\sqrt{[y(y-1)]}$; für jedes $u>2y-1+2\sqrt{[y(y-1)]}$ aber ergeben sich zwei reelle positive Werthe von x, deren einer $> +\sqrt{[y(y-1)]}$ ist und durch das *positive* Zeichen, der andere $< +\sqrt{[y(y-1)]}$, durch das *negative* Zeichen hervorgerufen wird. Für das andere $u = 2y-1-2\sqrt{[y(y-1)]}$ findet sich $x = -\sqrt{[y(y-1)]}$; für jedes $u<2y-1-2\sqrt{[y(y-1)]}$ aber ergeben sich zwei *reelle negative* Werthe von x, deren einer $> -\sqrt{[y(y-1)]}$ wieder durch das *positive* Zeichen, der andere $< -\sqrt{[y(y-1)]}$ durch das *negative* Zeichen herbeigeführt wird. Alle andern u dagegen, welche $<2y-1+2\sqrt{[y(y-1)]}$ und zugleich $>2y-1-2\sqrt{[y(y-1)]}$ sind, geben kein reelles x mehr. Nun sind unter der Voraussetzung $y<0$ die beiden Integrationsgrenzen $x=-y$ und $x=1-y$ *positiv*, und zwischen beiden liegt $x = +\sqrt{[y(y-1)]}$. Man zerlege aus diesem Grunde das bestimmte Integral in die Summe

$$z = \int_{-y}^{\sqrt{[y(y-1)]}} \left(x + \frac{y(y-1)}{x} + 2y - 1\right)^{m-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{[y(y-1)]}}^{1-y} \left(x + \frac{y(y-1)}{x} + 2y-1\right)^{m-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

in deren ersteren Theil der untere, im andern der obere Werth von x einzuführen ist. Die Gleichung (2.) kann aber auch in der Form

$$4x = [\sqrt{(u-2y+1+2\sqrt{(y(y-1))})} \pm \sqrt{(u-2y+1-2\sqrt{(y(y-1))})}]^2.$$

geschrieben werden. Für $u>2y-1+2\sqrt{[y(y-1)]}$ folgt daraus weiter:

$$2\sqrt{x} = \sqrt{(u-2y+1+2\sqrt{(y(y-1))})} \pm \sqrt{(u-2y+1-2\sqrt{(y(y-1))})}.$$

Setzt man aber hierin, abkürzend,

$$2y+1+2\sqrt{(y(y-1))}=[\sqrt{y}+\sqrt{(y-1)}]^2=x,$$

so ergiebt sich: $2y+1-2\sqrt{(y(y-1))}=[\sqrt{y}-\sqrt{(y-1)}]^2=\frac{1}{x}$,

und es bleibt die einfachere Gleichung

$$2\sqrt{w}=\sqrt{\left(u-\frac{1}{x}\right)}\pm\sqrt{(u-x)}.$$

Durch Differentiation folgt daraus:

$$\frac{dw}{\sqrt{w}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{du}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{x}\right)}}\pm\frac{du}{\sqrt{(u-x)}}\right).$$

Endlich erhält man aus der Gleichung (1), statt der Grenzen

$$w=-y \quad , \quad w=\sqrt{(y(y-1))} \quad , \quad w=1-y$$

beziehlich die neuen Grenzwerthe

$$u=0 \quad , \quad u=x \quad , \quad u=0,$$

und dadurch das *bestimmte* Integral

$$z=\int_0^x u^{m-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{du}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{x}\right)}}-\frac{du}{\sqrt{(u-x)}}\right)+\int_x^0 u^{m-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{du}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{x}\right)}}+\frac{du}{\sqrt{(u-x)}}\right).$$

Wenn man in dem letztern Theile die Ordnung der Grenzen umkehrt, so findet sich der einfachere Ausdruck

$$z=\int_0^x\frac{u^{m-\frac{1}{2}}du}{\sqrt{(u-x)}}=x^m.\int_0^1\frac{s^{m-\frac{1}{2}}ds}{\sqrt{(s-1)}},$$

nachdem man noch $u=x.s$ eingeführt hat. Es findet also die Beziehung

$$\int_0^1(v^2-v)^{m-\frac{1}{2}}.(v-y)^{-m}dv=c.[\sqrt{y}+\sqrt{(y-1)}]^{2m},$$

Statt, wo c ein von y unabhängiger Factor ist; und man erhält damit die jener ersten Form für den Fall $n=0$ entsprechende *Potentialfunction.*

Durch n maliges Differentiiren aber erhält man diese Function für irgend ein positives ganzzahliges n. Denn es ergiebt sich:

$$\int_0^1(v^2-v)^{m-\frac{1}{2}}.(v-y)^{-m-n}dv=c_1[\sqrt{y}+\sqrt{(y-1)}]^{2m}_{y^n}.$$

Ein *zweites* besonderes Integral wird durch Verwechslung des Zeichens der einen Wurzelgrösse erlangt. Denn die so entstandene Function von y muss, eben wie die ursprüngliche der Differentialgleichung, an der Stelle von z Genüge leisten, weil alle Coefficienten der Differentialgleichung nur *rationale* Glieder enthalten. Für ein positives ganzzahliges n erhält man demnach das *allgemeine* Integral

$$z = c_1[\sqrt{y} + (\sqrt{y-1})]^{2m}_{y^n} + c_2[\sqrt{y} - \sqrt{(y-1)}]^{2m}_{y^n}.$$

Der Fall eines *negativen* ganzzahligen n bedarf keiner weitern Beachtung. Denn wenn n eine *negative* ganze Zahl ist, so findet sich unter den drei übrigen der obigen vier Formen jedesmal ein anderes bestimmtes Integral

$$\int_0^1 (v^2 - v)^{m-\frac{1}{2}} (v-y)^{-m-n}\, dv,$$

wo n eine *positive* ganze Zahl ist. Von den vier Exponenten $b-c-1$, $c-a$, a, $-b-c$ kommen nämlich jedesmal irgend zwei gleichzeitig in zweien der vier Formen vor; und zwar in Verbindung beziehlich mit jedem der beiden übrigen Exponenten. Der vierte Exponent aber ist jedesmal die negative Summe der drei übrigen, vermindert um die Zahl 2. Wenn nun jene beiden ersten Exponenten einander gleich und durch $m-\frac{1}{2}$ ausgedrückt sind, während der eine der beiden übrigen durch $-m-n$ bezeichnet wird, so ist der vierte nothwendig $-m+n-1$. Wenn aber n eine negative ganze Zahl ist, so ist in der That $-n+1$ eine positive ganze Zahl.

V. *Allgemeines Integral der Gleichung*

$$X\frac{d^2z}{dx^2} + 2V\frac{d^2z}{dx\,dy} + Y\frac{d^2z}{dy^2} + X_1\frac{dz}{dx} + Y_1\frac{dz}{dy} + Zz = Z_1.$$

Das allgemeine Integral irgend einer partiellen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung mit *drei* Veränderlichen z, y, x, schliesst *zwei* willkürliche Functionen einer veränderlichen Grösse ein. Ueber die Art des Vorkommens dieser beiden willkürlichen Functionen lässt sich aber im Allgemeinen nichts feststellen.

Die eigentliche Schwierigkeit bei der Integration einer solchen Differentialgleichung besteht darin, dass sich dieselbe im Allgemeinen nicht auf eine Differentialgleichung *erster* Ordnung mit einer willkürlichen Function zurückführen lässt; woraus dann durch eine zweite Integration das allgemeine Integral mit seinen *zwei* willkürlichen Functionen hervorginge. Man ist also darauf beschränkt, von gewissen Voraussetzungen in Bezug auf die Natur und das Vorkommen der willkür-

lichen Functionen des allgemeinen Integrals auszugehen. Solche Voraussetzungen führen aber immer nur bedingungsweise zum Ziel.

Nur für einzelne Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung gelingt der Uebergang über ein *erstes* Integral zum *allgemeinen* Integral. Das *erste* Integral kann in einem solchen Falle jedesmal in der Form $\beta = \varphi(\alpha)$ dargestellt werden, wo β und α bestimmte Functionen von z, y, x und den Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ sind, φ aber eine willkürliche Function ist. Nun lässt sich allerdings im Allgemeinen wieder nicht angeben, wie die *zweite* willkürliche Function, welche durch die Integration der Differentialgleichung erster Ordnung $\beta = \varphi(\alpha)$ eingeführt wird, in dem zweiten Integrale auftrete; allein die Bestimmung dieses *zweiten* Integrals hat dann insofern keine weitere Schwierigkeit, als sich hier immer ein Verfahren einschlagen lässt, welches in jedem einzelnen Falle über jene Frage entscheidet. Der Uebergang über ein erstes Integral wird demnach jedesmal, wenn derselbe möglich ist, mit Vortheil benutzt, um zur Kenntniss des *allgemeinen* Integrals zu gelangen.

Es kann übrigens auch geschehen, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung die Eigenschaft, ein erstes Integral zu haben, dadurch annimmt, dass man gewissen unbestimmten Grössen dieser Gleichung besondere Werthe giebt, also auf einen besondern Fall dieser Differentialgleichung eingeht. Man ist aber zu dem Schlusse berechtigt, dass dann auch das allgemeine Integral der ursprünglichen Differentialgleichung, welcher die erwähnte Eigenschaft fehlt, durch dieselben besondern Annahmen in das allgemeine Integral jener besonderen Differentialgleichung hinübergeführt wird. Es hat demnach keinen Zweifel, dass der Uebergang über das erste Integral bei der Integration gewisser Differentialgleichungen auch ganz besonders geeignet ist, über die Natur und das Vorkommen der beiden willkürlichen Functionen im allgemeinen Integral anderer Differentialgleichungen Licht zu verbreiten; was selbst kein erstes Integral leistet.

Die allgemeinste *lineare* Differentialgleichung *zweiter* Ordnung mit *drei* Veränderlichen hat die Form

$$X\frac{d^2z}{dx^2} + 2V\frac{d^2z}{dx\,dy} + Y\frac{d^2z}{dy^2} + X_1\frac{dz}{dx} + Y_1\frac{dz}{dy} + Zz = Z_1,$$

wo X, V ..... Z, irgend Functionen von y und x bezeichnen. Ehe wir irgend einen Versuch anstellen, diese Gleichung zu integriren, wenden wir auf dieselbe eine Transformation an, welche auf zwei einfachere Gleichungen führt, von denen jede einen eigenthümlichen Gang der Rechnung erfordert. Wir führen statt y

und x zwei andere Veränderliche y_1 und x_1 ein, welche als Functionen der ersteren angenommen werden. Die Forderung, dass die Veränderliche z als Function von y_1 und x_1 sich zeige, giebt ohne Anstand die neue Gleichung in der Form

$$X\left(\frac{d^2z}{dx_1^2}\cdot\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2+2\frac{d^2z}{dx_1dy_1}\cdot\frac{dx_1}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\frac{d^2z}{dy_1^2}\cdot\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2+\frac{dz}{dx_1}\cdot\frac{d^2x_1}{dx^2}+\frac{dz}{dy_1}\cdot\frac{d^2y_1}{dx^2}\right)$$

$$+2V\left(\frac{d^2z}{dx_1^2}\cdot\frac{dx_1}{dx}\cdot\frac{dx_1}{dy}+\frac{d^2z}{dx_1dy}\cdot\left(\frac{dx_1}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dy}+\frac{dx_1}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+\frac{d^2z}{dy_1^2}\cdot\frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dy}+\frac{dz}{dx_1}\cdot\frac{d^2x_1}{dx\,dy}+\frac{dz}{dy_1}\cdot\frac{d^2y_1}{dx\,dy}\right)$$

$$+Y\left(\frac{d^2z}{dx_1^2}\cdot\left(\frac{dx_1}{dy}\right)^2+2\frac{d^2z}{dx_1dy_1}\cdot\frac{dx_1}{dy}\cdot\frac{dy_1}{dy}+\frac{d^2z}{dy_1^2}\cdot\left(\frac{dy_1}{dy}\right)^2+\frac{dz}{dx_1}\cdot\frac{d^2x}{dy^2}+\frac{dz}{dy_1}\cdot\frac{d^2y_1}{dy^2}\right)$$

$$+X_1\left(\frac{dz}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dx}+\frac{dz}{dy_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}\right)$$

$$+Y_1\left(\frac{dz}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dy}+\frac{dz}{dy_1}\cdot\frac{dy_1}{dy}\right)+Zz=Z_1.$$

Wenn man aber nach Differentialquotienten von z ordnet, so erhält man:

$$\left(X\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2+2V\frac{dx_1}{dx}\cdot\frac{dx_1}{dy}+Y\left(\frac{dx_1}{dy}\right)^2\right)\cdot\frac{d^2z}{dx_1^2}$$

$$+2\left(\left(X\frac{dx_1}{dx}+V\frac{dx_1}{dy}\right)\cdot\frac{dy_1}{dx}+\left(V\frac{dx_1}{dx}+Y\frac{dx}{dy}\right)\cdot\frac{dy_1}{dy}\right)\cdot\frac{d^2z}{dx_1dy_1}$$

$$+\left(X\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2+2V\frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dy}+Y\left(\frac{dy_1}{dy}\right)^2\right)\cdot\frac{d^2z}{dy_1^2}$$

$$+\left(X\frac{d^2x_1}{dx^2}+2V\frac{d^2x_1}{dx\,dy}+Y\frac{d^2x_1}{dy^2}+X_1\frac{dx_1}{dx}+Y_1\frac{dx_1}{dy}\right)\cdot\frac{dz}{dx_1}$$

$$+\left(X\frac{d^2y_1}{dx^2}+2V\frac{d^2y_1}{dx\,dy}+Y\frac{d^2y_1}{dy^2}+X_1\frac{dy_1}{dx}+Y_1\frac{dy_1}{dy}\right)\cdot\frac{dz}{dy_1}+Zz=Z_1.$$

Zur Bestimmung von x_1 und y_1 wenden wir die beiden Gleichungen

$$X\left(\frac{dx}{dx}\right)^2+2V\frac{dx_1}{dx}\cdot\frac{dx_1}{dy}+Y\left(\frac{dx_1}{dy}\right)^2=0 \quad \text{und}$$

$$X\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2+2V\frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dy}+Y\left(\frac{dy_1}{dy}\right)^2=0$$

an, und erhalten, weil $\frac{dy}{dx}=-\frac{dx_1}{dx}:\frac{dx_1}{dy}=-\frac{dy_1}{dx}:\frac{dy_1}{dy}$ ist, die beiden Functionen x_1 und y_1 durch Integration der beiden Gleichungen

$$X\frac{ay}{dx}=V\pm\sqrt{(V^2-XY)}.$$

Die Elimination von x und y verwandelt aber die ursprünglich siebengliederige Gleichung in eine fünfgliederige von der Form

$$(a.)\qquad \frac{d^2z}{dx_1\,dy_1}+X\frac{dz}{dx_1}+Y\frac{dz}{dy_1}+Zz=Z_1,$$

wo X, Y, Z und Z_1 bestimmte Functionen von y_1 und x_1 sind. Für den Fall $V^2-XY=0$ erhält man auf dem vorgeschriebenen Wege nur eine einzige Function x_1, und die Coefficienten $\frac{d^2z}{dx_1^2}$ und $\frac{d^2z}{dy_1^2}$ können durch Einführen zweier neuen Veränderlichen y_1 und x_1 nicht mehr gleichzeitig zum Verschwinden gebracht werden. Da aber dann jene Function x_1 die beiden Gleichungen

$$X\frac{dx_1}{dx}+V\frac{dx_1}{dy}=0 \quad\text{und}\quad V\frac{dx_1}{dx}+Y\frac{dx_1}{dy}=0$$

befriedigt, so fallen durch Elimination von x mittels x_1, gleichzeitig die Coefficienten von $\frac{d^2z}{dx_1^2}$ und $\frac{d^2z}{dx_1dy_1}$ weg, und es bleibt jedesmal eine Gleichung

$$(b.)\qquad \frac{d^2z}{dy_1^2}+X\frac{dz}{dx_1}+Y\frac{dz}{dy_1}+Zz=Z_1,$$

übrig, wie auch immer die andere Function y_1 angenommen werden mag.

Um die Gleichung (a), in welcher die unabhängigen Veränderlichen wieder mit y und x bezeichnet werden sollen, auf ein erstes Integral zurückzuführen, vertausche man die abhängige Veränderliche z gegen eine andere u, indem man $z=z_2u$ einführt, wo z_2 eine unbestimmte Function von y und x ist. Die Differentialgleichung geht dadurch in

$$z_2\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{dz_2}{dy}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{dz_2}{dx}\cdot\frac{du}{dy}+\frac{d^2z_2}{dx\,dy}u+X\Big(z_2\frac{du}{dx}+\frac{dz_2}{dx}u\Big)+Y\Big(z_2\frac{du}{dy}+\frac{dz_2}{dy}u\Big)+Zz_2u=Z_1,$$

über, oder, wenn man nach Differentialquotienten von u ordnet, in:

$$z_2\cdot\frac{d^2u}{dxdy}+\Big(\frac{dz_2}{dy}+Xz_2\Big)\cdot\frac{du}{dx}+\Big(\frac{dz_2}{dx}+Yz_2\Big)\cdot\frac{du}{dy}+\Big(\frac{d^2z_2}{dxdy}+X\frac{dz_2}{dx}+Y\frac{dz_2}{dy}+Zz_2\Big)u=Z_1.$$

Zur Bestimmung der Function z_2 bediene man sich einer der beiden Gleichungen

$$\frac{dz_2}{dy}+Xz_2=0\quad(a_1)\qquad\text{und}\qquad \frac{dz_2}{dx}+Yz_2=0.\quad(a_2).$$

Ein erstes Integral findet aber immer nur dann Statt, wenn durch Einführen des so berechneten z_2 zugleich der Coefficient von u verschwindet. Indem man z_2 das einemal aus (a_1), das andremal aus (a_2) und der Gleichung

$$\frac{d^2z_2}{dxdy}+X\frac{dz_2}{dx}+Y\frac{dz_2}{dy}+Zz_2=0$$

eliminirt, gelangt man zu den beiden Ausdrücken

$$\frac{dX}{dx} + XY = Z \quad \text{und} \quad \frac{dY}{dy} + XY = Z.$$

Dies sind die beiden Bedingungsgleichungen, von denen also wenigstens die eine bestehen muss, damit die Gleichung (a) ein erstes Integral habe.

Wenn die *erste* Bedingungsgleichung erfüllt wird, setze man $z_2 = e^{-\int X dy}$, nach (a_1), und es bleibt die einfachere Gleichung

$$z_2 \frac{d^2 u}{dx\, dy} + \left(\frac{dz_2}{du} + Y z_2\right) \cdot \frac{du}{dy} = Z_1.$$

Man führe abkürzend die Bezeichnung

$$\frac{1}{u_1} = z_2 . e^{\int Y dx}$$

ein; dann erhält man, nach bekannten Regeln, das verlangte erste Integral der Gleichung (a) in der Form

$$\frac{du}{dy} = u_1 \cdot \int \frac{Z_1 dx}{z_2 \cdot u_1} + u_1 \varphi(y),$$

wo $\varphi(y)$ eine willkürliche Function von y und jeder andern von x unabhängigen Grösse ist. Die Integration nach y giebt aber das zweite Integral

$$u = \int u_1 \cdot \int \frac{Z_1 dx dy}{z_2 \cdot u_1} + \int u_1 \varphi(y)\, dy + \psi(x),$$

oder, wenn man statt u die ursprüngliche Veränderliche zurück einführt:

$$z = z_2 . \int u_1 \cdot \int \frac{Z_1 dx dy}{z_2 \cdot u_1} + z_2 . \int u_1 \varphi(y)\, dy + z_2 \psi(x);$$

wo $\varphi(x)$ eine willkürliche Function von x und jeder andern von y unabhängigen Grösse ist.

Wenn die *andre* Bedingungsgleichung erfüllt wird, setze man $z_2 = e^{-\int y dx}$, nach (α_2); was die einfachere Gleichung

$$z_2 \cdot \frac{d_2 u}{dx dy} + \left(\frac{dz_2}{dy} + X z_2\right) \cdot \frac{du}{dx} = Z_1$$

giebt. Man gelangt dann auf ähnliche Weise zu dem zweiten Integrale

$$z = z_2 . \int u_1 \cdot \int \frac{Z_1 dy dx}{z_2 u} + z_2 . \int u_1 \varphi(x)\, dx + z_2 . \psi(y);$$

wo φ und ψ, wie vorhin, willkürliche Functionen sind, wo aber $\frac{1}{u_1} = z_2 e^{\int x dy}$ einzuführen ist.

Die Gleichung (b) führt nur dann auf ein erstes Integral, wenn der Coefficient X verschwindet. Alsdann bleibt die Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = Y.\frac{dz}{dy} + Zz = Z_1,$$

mit nur zwei Veränderlichen z und y, für welche früher das allgemeine Integral

$$z = z_0 + z_1 \varphi(x) + z_2 \psi(x)$$

aufgestellt wurde, wo z, z_1 und z_2 *bestimmte* Functionen von y und x, φ und ψ aber *willkürliche* Functionen sind.

1. Die Gleichung $\frac{d^2 z}{dxdy} - a\frac{dz}{dx} - b\frac{dz}{dy} + abz = 0$

erfüllt gleichzeitig jene beiden Bedingungen. Man gelangt deshalb auf zweierlei Art zu einem ersten Integrale. Auf dem letztern Wege findet man $z_2 = e^{bx}$ und $\frac{1}{u_1} = e^{bx-ay}$, und dadurch das allgemeine Integral in der Form

$$z = e^{bx}.\int e^{-bx+ay}\varphi(x)\,dx + e^{bx}.\psi(y).$$

Es lässt sich aber, weil $\varphi(x)$ eine willkürliche Function von x ist, abkürzend

$$e^{bx}.\int e^{-bx}\varphi(x)dx = \varphi(x)$$

setzen, und man gelangt dadurch zu der einfacheren Form

$$z = e^{ay}.\varphi(x) + e^{bx}.\psi(y).$$

2. Die Gleichung $\frac{d^2 z}{dxdy} - \frac{a}{y}.\frac{dz}{dx} - \frac{b}{y}.\frac{dz}{dy} + \frac{abz}{y^2} = 0$

erfüllt nur die erste Bedingung. Wir setzen deshalb $z_2 = y^a$, und dann $\frac{1}{u_1} = e^{-\frac{bx}{y}}.y^a$. Das allgemeine Integral zeigt sich dann in der Form

$$z = y^a.\int e^{\frac{bx}{y}}.y^{-a}\varphi(y)\,dy + y^a.\psi(x).$$

3. Die Gleichung $\frac{d^2 z}{dxdy} - \frac{a}{y}.\frac{dz}{dx} - \frac{b}{y}\,\frac{dz}{dy} + \frac{(a+1)bz}{y^2} = 0$

dagegen erfüllt nur die letzte Bedingung. Man setze deshalb $z_2 = e^{\frac{bx}{y}}$ und dann $\frac{1}{u_1} = e^{\frac{bx}{y}}.y^{-a}$. Dies giebt für das allgemeine Integral:

$$z = e^{\frac{bz}{y}} y^a . \int e^{-\frac{bz}{y}} \varphi(x) dx + e^{\frac{bz}{y}} . \psi(y).$$

4. Es sei noch $\frac{d^2z}{dxdy} - \frac{a}{x+y} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{b}{x+y} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{(a+1)bz}{(x+y)^2} = 0.$

Diese Gleichung erfüllt wieder nur die letzte Bedingung. Man setze deshalb $z_1 = (x+y)^b$, und dann $\frac{1}{u_1} = (x+y)^{b-a}$. Solches giebt das *allgemeine* Integral

$$z = (x+y)^b . \int (x+y)^{a-b} \varphi(x) dx + (x+y)^b . \psi(y).$$

Wenn aber die Gleichung

$$X\frac{d^2z}{dx^2} + 2V\frac{d^2z}{dxdy} + Y\frac{d^2z}{dy^2} + X_1\frac{dz}{dx} + Y_1\frac{dz}{dy} + Zz = Z_1$$

kein erstes Integral hat, und man also genöthigt ist, sogleich auf das endliche Verhalten zurückzugehen, so tilge man vor Allem deren letztes Glied Z_1. Dies lässt sich dadurch erlangen, dass man $z = z_0 + z_1$ setzt, wo z_1 die neue unabhängig Veränderliche, z_0 aber eine bestimmte Function von y und x ist. Denn wenn man dieses z_0 aus

$$X\frac{d^2z_0}{dx^2} + 2V\frac{d^2z_0}{dxdy} + Y\frac{d^2z_0}{dy^2} + X_1\frac{dz_0}{dx} + Y_1\frac{dz_0}{dy} + Zz_0 = Z_1$$

hervorgehen lässt, so bleibt in der That die einfachere Gleichung

$$X\frac{d^2z_1}{dx^2} + 2V\frac{d^2z_1}{dxdy} + Y\frac{d^2z_1}{dy^2} + X_1\frac{dz_1}{dx} + Y_1\frac{dz_1}{dy} + Zz_1 = 0.$$

Nachdem das letzte Glied Z_1 weggeschafft ist, unterscheide man wieder die einfacheren Differentialgleichungen (*a* und *b*).

Als zweites Integral der Gleichung

$$(a). \qquad \frac{d^2z}{dxdy} + X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} + Zz = 0$$

wurde vorhin bei dem Uebergang über ein erstes Integral ein zweigliedriger Ausdruck gefunden, dessen eines Glied die willkürliche Function $\varphi(x)$, das andre die willkürliche Function $\psi(y)$ einschliesst. Unter der Bedingung $\frac{dX}{dx} + XY = Z$ zeigt sich $\varphi(x)$ vom Integralzeichen frei; unter der Bedingung $\frac{dY}{dy} + XY = Z$ tritt $\psi(y)$ ohne Integralzeichen auf. Liess sich gleich das allgemeine Integral vorhin nur unter der Voraussetzung einer dieser beiden Bedingungen entwickeln,

so liegt doch die Vermuthung nahe, dass auch das allgemeine Integral derjenigen Gleichungen (a), denen kein erstes Integral zukommt, aus zwei Gliedern bestehen werde, welche beziehlich die beiden willkürlichen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ aufnehmen; aber dass jede dieser beiden Functionen unter dem Integralzeichen auftrete. Aus dieser Annahme folgt zunächst, dass jedes der beiden Glieder des allgemeinen Integrals nur ein *bestimmtes* Integral sein kann. Denn ein unbestimmtes Integral zieht jedesmal eine willkürliche Beständige, oder eine willkürliche Function solcher Grössen nach sich, welche von der Veränderlichen des unbestimmten Integrals unabhängig sind. Deshalb würde das unbestimmte Integral $z_2.\int u_1\varphi(x)\,dx$, worin z_2 und u_1 irgend welche Functionen von y und x sind, jedenfalls das Glied $z_2.\varphi_1(y)$, das andre unbestimmte Integral $z_2.\int u_1\psi(y)\,dy$ jedenfalls das Glied $z_2.\psi_1(x)$ nach sich ziehen. Gerade diese Glieder $z_2.\varphi_1(y)$ und $z_2.\psi_1(x)$ sind aber nach der obigen Annahme von dem allgemeinen Integral ausgeschlossen. Die vorhin angestellte Betrachtung führt demnach zu der Integralform

$$z = \int_{\alpha_1}^{a_1} z_1.\varphi(\alpha)\,d\alpha + \int_{\alpha_2}^{a_2} z_2.\psi(\alpha)\,d\alpha\,;$$

wo z_1 und z_2 bestimmte Functionen der Veränderlichen y und x und einer beständigen Grösse α, und die Grenzwerthe a_1 und a_2 willkürliche Beständige, oder von y und x unabhängige Grössen sind, während der Grenzwerth α_1 irgend eine Function von x, und der Grenzwerth α_2 irgend eine Function von y ist.

Für die besondre Beschaffenheit der Function z_1 ist es einleuchtend, dass man durch Absondern eines Factors u, welcher nur y und x einschliesst und deshalb in dem bestimmten Integrale $\int_{a_1}^{\alpha_1} z_1.\varphi(\alpha)\,d\alpha$ vor das Integralzeichen gesetzt werden könnte, unter diesem Integralzeichen die Veränderliche y niemals zum Verschwinden bringen kann. Denn könnte Dies geschehen, also jenes bestimmte Integral auch in der Form $u.\int_{a_1}^{\alpha_1} z_3.\varphi(\alpha)\,d\alpha$ geschrieben werden, wo z_3 eine blosse Function von x und α ist, so würde, weil auch der Grenzwerth α_1 von y unabhängig angenommen wird, durch $\int_{a_1}^{\alpha_1} z_3.\varphi(\alpha)\,d\alpha$ offenbar nur eine willkürliche Function von x angedeutet, und der eine Theil des allgemeinen Integrals wäre $u.\varphi(x)$. Dieses Glied $u.\varphi(x)$ zeigt sich aber nur dann in dem *allgemeinen* Integrale, wenn die Differentialgleichung ein erstes Integral hat. Auf gleiche Weise lässt sich auf eine derartige Beschaffenheit der Function z_2 in dem andern Theile $\int_{a_2}^{\alpha_2} z_2.\psi(\alpha)\,d\alpha$ des allgemeinen Integrals schliessen, dass nämlich durch Abscheiden eines Factors, welcher von α frei ist und deshalb vor das Integral-

zeichen gesetzt werden könnte, die Veränderliche x unter diesem Integralzeichen niemals verschwindet.

Wegen der beiden willkürlichen Functionen φ und ψ muss übrigens eben sowohl der eine als der andre Theil jener Integralform für sich die Differentialgleichung befriedigen. Bei der Bestimmung der Functionen z_1 und z_2, und der veränderlichen Grenzwerthe a_1 und a_2, nehme man deshalb zunächst nur Rücksicht auf den einen Theil

$$z = \int_{a_1}^{a_1} z_1 \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Wenn man das *unbestimmte* Integral $\int z_1 \varphi(\alpha)\, d\alpha$ durch $f(y, x, \alpha)$ ausdrückt, so ist das *bestimmte* Integral gleichbedeutend mit dem Unterschiede $f(y,x,a_1)-(y,x,a_1)$. Alsdann muss also der Werth von

$$z = f(y, x, a_1) - f(y, x, a_1)$$

der Differentialgleichung Genüge leisten. Dies trifft aber jedenfalls zu, wenn ebensowohl $z = f(y, x, a_1)$, als $z = f(y, x, a_1)$ die Differentialgleichung befriedigt. Man erhält nun bekanntlich aus $z = f(y, x, \alpha)$, wo α selbst als Function von x angesehen wird, durch Differentiation die beiden Formen

$$\frac{dz}{dy} = \frac{df}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx}.$$

Die Annahme $z = \int z_1 . \varphi(\alpha) d\alpha$, bei welcher α eben diese Bedeutung hat, giebt demnach die Ausdrücke

$$\frac{dz}{dy} = \int \frac{dz_1}{dy} \varphi(\alpha)\, d\alpha, \qquad \frac{dz}{dx} = \int \frac{dz_1}{dx} \varphi(\alpha)\, d\alpha + z_1 \frac{d\alpha}{dx} \varphi(\alpha),$$

$$\frac{d^2 z}{dx dy} = \int \frac{d^2 z_1}{dx dy} \varphi(\alpha) d\alpha + \frac{dz_1}{dy} \cdot \frac{d\alpha}{dx} \varphi(\alpha).$$

Durch Einführen dieser Werthe geht die Differentialgleichung in

$$\int \left(\frac{d^2 z_1}{dx dy} + X \frac{dz_1}{dx} + Y \frac{dz_1}{dy} + Z z_1 \right) \varphi(\alpha) d\alpha + \left(\frac{dz_1}{dy} + X z_1 \right) \frac{d\alpha}{dx} \cdot \varphi(\alpha) = 0$$

über; wo also die vom Integralzeichen befreiten Glieder, statt α sowohl den einen als den andern Grenzwerth aufnehmen. Für den Fall des von y und x unabhängigen $\alpha = a_1$ bleiben nur die unter dem Integralzeichen stehenden Glieder zurück; und zur Bestimmung von z_1 erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2 z_1}{dx dy} + X \frac{dz_1}{dx} + Y \frac{dz_1}{dy} + Z z_1 = 0.$$

Ein *besonderes* Integral z der vorliegenden Differentialgleichung, in welchem eine willkürliche Beständige α Platz findet, vertritt demnach die Stelle von z_1. Wenn aber α eine Function von x ist, so müssen auch die, nicht unter dem Integralzeichen stehenden Glieder jener Gleichung berücksichtigt werden. Zur Bestimmung des veränderlichen Grenzwerths α_1 ergiebt sich desshalb die Gleiehung

$$(\alpha_1). \qquad \frac{dz_1}{dy} + Xz_1 = 0;$$

und an das vorher gefundene z_1 wird die weitere Forderung gestellt, dass ein von x abhängiges α die Gleichung (α_1) befriedige.

Auf ähnliche Weise gelangt man zu dem andern Theile $z = \int_{a_2}^{\alpha_2} z_2 \psi(\alpha) d\alpha$ des *allgemeinen* Integrals. Die Function z_2 ist hier wieder ein *besonderes* Integral der Differentialgleichung, welches zugleich eine willkürliche Beständige α aufnimmt. An dies zweite besondere Integral $z = z_2$ aber ist die weitere Forderung gestellt, dass ein von y abhängiges α die Gleichung

$$(\alpha^2). \qquad \frac{dz_2}{dx} + Yz_2 = 0$$

befriedige. Dies α liefert dann den veränderlichen Grenzwerth α_2.

Oben wurde erwähnt, dass der Gleichung

$$(b.) \qquad \frac{d^2z}{dy^2} + X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} + Zz = 0$$

für den Fall $X = 0$ das endliche Verhalten

$$z = z_1 . \varphi(x) + z_2 . \psi(x)$$

entspreche, wo z_1 und z_2 *bestimmte* Functionen von y und x, φ und ψ aber *willkürliche* Functionen sind. Auch hier von diesem Falle, in welchem ein erstes Integral Statt findet, ausgehend, und auf das allgemeine Integral einer Differentialgleichung schliessend, welcher kein erstes Integral zukommt, findet sich gleicher Grund wie oben, das allgemeine Integral in der Form

$$z = \int_{a_1}^{\alpha_1} z_1 \varphi(\alpha) d\alpha + \int_{a_2}^{\alpha_2} z_2 . \psi(\alpha) d\alpha$$

darzustellen, wo z_1 und z_2 bestimmte Functionen von y, x und einer Beständigen α, und die Grenzwerthe a_1 und a_2 willkürliche Beständige, die beiden andern Grenzwerthe α_1 und α_2 aber Functionen von x sind.

Um zunächst die Function z_1 und den veränderlichen Grenzwerth α_1 zu

finden, setze man das unbestimmte Integral $z = \int z_1 \varphi(\alpha) d\alpha$, wo α als Function von x betrachtet wird, in die Differentialgleichung. Man setze also:

$$\frac{dz}{dy} = \int \frac{dz_1}{dy} \varphi(\alpha) d\alpha, \qquad \frac{dz}{dx} = \int \frac{dz_1}{dx} \varphi(\alpha) d\alpha + z_1 \frac{d\alpha}{dx} \varphi(\alpha)$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \int \frac{d^2z_1}{dy^2} \varphi(\alpha) d\alpha,$$

und führe die Differentialgleichung dadurch in

$$\int \left(\frac{d^2z_1}{dy^2} + X \frac{dz_1}{dx} + Y \frac{dz_1}{dy} + Zz_1 \right) \varphi(\alpha) d\alpha + Xz_1 \frac{d\alpha}{dx} \varphi(\alpha)$$

über. Diese Gleichung muss durch jeden der beiden Grenzwerthe $\alpha = a_1$ und $\alpha = \alpha_1$ befriedigt werden, damit das bestimmte Integral $z = \int_{\alpha_1}^{a_1} \varphi(\alpha) d\alpha$ der Differentialgleichung genüge. Für $\alpha = a_1$ bleiben nur die unter dem Integralzeichen stehenden Glieder, und zur Bestimmung von z_1 erhält man:

$$\frac{d^2z_1}{dy^2} + X \frac{dz_1}{dx} + Y \frac{dz_1}{dy} + Zz_1 = 0.$$

Die Function z_1 ist also auch hier durch ein besonderes Integral der Differentialgleichung ausgedrückt, welches zugleich eine willkürliche Beständige α aufnimmt. Wenn aber α als Function von x angesehen wird, so ergiebt sich noch die weitere Gleichung

$$(\beta.) \qquad Xz_1 = 0.$$

Das vorhin gefundene z_1 muss also auch diese zweite Gleichung befriedigen, sobald man an die Stelle von α irgend eine Function von x setzt. Dies α stellt dann den veränderlichen Grenzwerth α_1 vor.

Dieselben Anforderungen werden an ein zweites besonderes Integral $z = z_2$ gestellt, damit der Theil des allgemeinen Integrals in der Form $z = \int_{\alpha_2}^{a_2} z_2 \cdot \psi(\alpha) d\alpha$ sich darstellen lasse.

Sobald die Coefficienten X, Y und Z der Gleichungen (a) und (b) bestimmte Functionen von y und x sind, ist unsre nächste Absicht, diese Gleichungen noch weiter zu vereinfachen. Wir wenden uns deshalb vorerst wieder zu der Transformation derjenigen Differentialgleichungen, welche auf die angegebene Weise integrirt werden sollen.

VI. Transformation der Gleichungen

$$a\frac{d^2z}{dx^2}+a_1\frac{d^2z}{dxdy}+a_2\frac{d^2z}{dy^2}+b\frac{dz}{dx}+b_1\frac{dz}{dy}+cz=0,$$

$$a\frac{d^2z}{dx^2}+a_1\frac{d^2z}{dxdy}+a_2\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{1}{ex+e_1y}\cdot\left(b\frac{dz}{dx}+b_1\frac{dz}{dy}\right)+\frac{cz}{(ex+e_1y)^2}=0.$$

Oben wurde gezeigt, wie sich die allgemeine Differentialgleichung

$$X\frac{d^2z}{dx^2}+2V\frac{d^2z}{dxdy}+Y\frac{d^2z}{dy^2}+X_1\frac{dz}{dx}+Y_1\frac{dz}{dy}+Zz=Z_1,$$

durch Vertauschen der unabhängig Veränderlichen y und x gegen zwei andre y_1 und x_1 so umwandeln lasse, dass aus der neuen Gleichung jedesmal zwei Differentialquotienten zweiter Ordnung verschwinden.

1. In die einfachere Gleichung

$$a\frac{d^2z}{dx^2}+b\frac{d^2z}{dxdy}+c\frac{d^2z}{dy^2}=Z,$$

wo a, b c irgend Beständige sind, Z aber von Differentialquotienten zweiter Ordnung frei ist, führe man an die Stelle von y und x die neuen Veränderlichen $y_1=x+ny$ und $x_1=x+my$ ein, wo m und n noch unbekannte *Beständige* sind. Man erhält dadurch die neue Gleichung

$$a\left(\frac{d^2z}{dx_1^2}+2\frac{d^2z}{dx_1dy_1}+\frac{d^2z}{dy_1^2}\right)+b\left(m\frac{d^2z}{dx_1^2}+(m+n)\frac{d^2z}{dx_1dy_1}+n\frac{d^2z}{dy_1^2}\right)$$
$$+c\left(m^2\frac{d^2z}{dx_1^2}+2mn\frac{d^2z}{dx_1dy_1}+n^2\frac{d^2z}{dy_1^2}\right)=Z_1,$$

oder, wenn man nach Differentialquotienten von z ordnet, die Gleichung

$$(a+bm+cm^2)\frac{d^2z}{dx_1^2}+[2a+b(m+n)+2cmn]\frac{d^2z}{dx_1dy_1}$$
$$+(a+bn+cn^2)\frac{d^2z}{dy_1^2}=Z_1.$$

Diese Gleichung verwandelt sich, wenn statt m und n die Wurzeln der quadratischen Gleichung $a+bm+cn^2=0$ eingeführt werden, in die einfachere:

$$\frac{4ac-b^2}{c}\cdot\frac{d^2z}{dx_1dy_1}=Z_1.$$

Wenn $4ac-b^2=0$ ist, so lassen sich auf diese Weise nicht mehr zwei neue

Veränderliche y_1 und x_1 erzielen, weil dann aus der quadratischen Gleichung $a+bm+cm^2=0$ nur ein einziger Werth m hervorgeht. Man schreibe dann die Gleichung (1) in der Gestalt

$$a^2\frac{d^2z}{dx^2}+2a\frac{d^2z}{dx\,dy}+\frac{d^2z}{dy^2}=Z,$$

und führe statt x die neue Veränderliche $x_1=x+my$ ein. Da dann z als Function von y und x_1 angenommen wird, so ergiebt sich die neue Gleichung

$$a^2\frac{d^2z}{dx_1^2}+2a\left(m\frac{d^2z}{dx_1^2}+\frac{d^2z}{dx_1\,dy}\right)+m^2\frac{d^2z}{dx_1^2}+2m\frac{d^2z}{dx_1\,dy}+\frac{d^2z}{dy^2}=Z_1,$$

oder, wenn man nach Differentialquotienten von z ordnet:

$$(a^2+2am+m^2)\frac{d^2z}{dx_1^2}+2(a+m)\frac{d^2z}{dx_1\,dy}+\frac{d^2z}{dy^2}=Z_1;$$

was für $m=-a$ in die einfachere Gleichung

$$\frac{d^2z}{dy^2}=Z_1$$

übergeht. In dieser Gleichung wird immer nur der eine Differentialquotient zweiter Ordnung $\frac{d^2z}{dy_1^2}$ vorkommen, welche Function von y und x man auch als neue Veränderliche y_1 statt y ferner einführen mag.

Weitere Vereinfachungen werden durch Vertauschen der abhängigen Veränderlichen z gegen eine neue $u.z_1$ herbeigeführt, wo u eine bestimmte Function von y und x ist. Setzt man $z=uz_1$ in die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}+X\cdot\frac{dz}{dx}+Y\cdot\frac{dz}{dy}+Zz=0,$$

so geht dieselbe in

$$u\cdot\frac{d^2z_1}{dx\,dy}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dz_1}{dx}+\frac{du}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2u}{dx\,dy}z_1+X\cdot\left(u\cdot\frac{dz_1}{dx}+\frac{du}{dy}\cdot z_1\right)$$
$$+Y\cdot\left(u\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{du}{dy}\cdot z_1\right)+Zuz_1=0$$

über, oder, wenn man nach Differentialquotienten von z_1 ordnet, und zugleich mit u theilt, in:

$$(a.)\quad \frac{d^2z_1}{dx\,dy}+\left(\frac{u_y}{u}+X\right)\cdot\frac{dz_1}{dx}+\left(\frac{u_x}{u}+Y\right)\cdot\frac{dz_1}{dy}+\left(\frac{u_{xy}}{u}+X\cdot\frac{u_x}{u}+Y\cdot\frac{u_y}{u}+Z\right)z_1=0.$$

Es lässt sich demnach in der neuen Gleichung durch diese Vertauschung jedesmal eine der Grössen $\frac{dz_1}{dx}$, $\frac{dz_1}{dy}$ und z_1 zum Verschwinden bringen; und unter der Bedingung $\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}$ gelingt es auch, gleichzeitig die beiden Grössen $\frac{dz_1}{dx}$ und $\frac{dz_1}{dy}$ wegzuschaffen.

Die andre Gleichung

$$\frac{d^2z}{dy^2} + X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} + Zz = 0$$

wird durch dieselbe Vertauschung $z = uz_1$ in

$$u\frac{d^2z_1}{dy^2} + 2\frac{du}{dy}\cdot\frac{dz_1}{dy} + \frac{d^2u}{dy^2}z_1 + X\left(u\frac{dz_1}{dx} + \frac{du}{dx}z_1\right) + Y\left(u\frac{dz_1}{dy} + \frac{du}{dy}z_1\right) + Zuz_1 = 0$$

verwandelt, oder, durch Ordnen nach Differentialquotienten von z_1 und durch Division mit u, in

$$(\beta.)\quad \frac{d^2z_1}{dy^2} + X\frac{dz_1}{dx}\left(2\frac{u_y}{u} + Y\right)\frac{dz_1}{dy} + \left(\frac{u_y^2}{u} + X\frac{u_x}{u} + Y\frac{u_y}{u} + Z\right)z_1 = 0.$$

Die benutzte Transformation kann also hier zwar die Grössen $\frac{dz_1}{dy}$ und z_1, niemals aber die Grösse $\frac{dz_1}{dx}$ aus der Gleichung entfernen.

2. Es sei $\frac{d^2z}{dxdy} - a\frac{dz}{dx} - b\frac{dz}{dy} + cz = 0.$

Durch Einführen von $z = e^{mx+ny}.z_1$ erhält man, weil dann $u = e^{mx+ny}$ ist,

$$(\alpha.)\quad \frac{d^2z_1}{dx\,dy} + (n-a)\frac{dz_1}{dx} + (m-b)\frac{dz_1}{dy} + (mn - am - bn + c)z_1 = 0.$$

Setzt man aber $n = a$ und $m = b$, so bleibt die einfachere Gleichung

$$\frac{d^2z_1}{dx\,dy} - (ab-c)z_1 = 0.$$

3. Es sei $\frac{d^2z}{dy^2} - a\frac{dz}{dx} - b\frac{dz}{dy} + cz = 0.$

Setzt man wieder $z = e^{mx+ny}.z_1$, so ergiebt sich

$$(\beta.)\quad \frac{d^2z}{dy^2} - a\cdot\frac{dz_1}{dx} + (2n-b)\cdot\frac{dz_1}{dy} + (n^2 - am - bn + c)z_1 = 0,$$

Bedient man sich aber zur Bestimmung von m und n der beiden Gleichungen $2n - b = 0$ und $n^2 - am - bn + c = 0$, so erhält man

$$(b.)\qquad \frac{d^2z_1}{dy^2} - a\cdot\frac{dz_1}{dx} = 0.$$

4. Es sei nun $\frac{d^2z}{dx\,dy} - \frac{a}{ex+y}\cdot\frac{dz}{dx} - \frac{b}{ex+y}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{cz}{(ex+y)^2} = 0.$

Vor Allem setze man $x_1 = ex$ statt x. Dies giebt

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} - \frac{1}{x_1+y}\cdot\left(a\cdot\frac{dz}{dx_1} + \frac{b}{e}\cdot\frac{dz}{dy}\right) + \frac{1}{(x_1+y)^2}\cdot\frac{cz}{e} = 0.$$

In dieser Gleichung bringe man das letzte Glied zum Verschwinden, indem man $z = (x_1+y)^n.z_1$ setzt. Die Annahme $u = (x_1+y)^n$ verwandelt dieselbe in

$$(a.)\qquad \frac{d^2z_1}{dx\,dy} + \frac{n-a}{x_1+y}\cdot\frac{dz_1}{dx_1} + \frac{n-\frac{b}{e}}{x_1+y}\cdot\frac{dz_1}{dy} + \frac{n(n-1)-(a+\frac{b}{e})n+\frac{c}{e}}{(x_1+y)^2}\cdot z_1 = 0.$$

Bestimmt man aber n durch $n(n-1)-\left(a+\frac{b}{e}\right)n+\frac{c}{e} = 0$, so bleibt in der That die einfachere Gleichung

$$(c.)\qquad \frac{d^2z_1}{dx_1\,dy} - \frac{a}{x_1+y}\cdot\frac{dz_1}{dx_1} - \frac{b}{x_1+y}\cdot\frac{dz_1}{dy} = 0.$$

Für den Fall $e = 0$ aber, also in der Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} - \frac{a}{y}\cdot\frac{dz}{dx} - \frac{b}{y}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{cz}{y^2} = 0$$

tilge man durch Einführen von $z = y^a.z_1$ das zweite Glied. Denn durch $u = y^a$ gelangt man zu der Gleichung

$$(\alpha.)\qquad \frac{d^2z_1}{dx\,dy} - \frac{b}{y}\cdot\frac{dz_1}{dy} - \frac{ab-c}{y^2}\,z_1 = 0.$$

Man setze weiter $y_1 = \frac{1}{y}$, also $\frac{dz_1}{dy} = -\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dz_1}{dy_1}$, Dies giebt:

$$\frac{d^2z_1}{dx\,dy_1} - by_1\frac{dz_1}{dy_1} + (ab-c)z_1 = 0.$$

Endlich, wenn nicht gerade $b = 0$ ist, welcher Fall auf die Gleichung (a) zurückführt, setze man $y_2 = -by_1$; dann bleibt:

$$(d.)\qquad \frac{d^2z_1}{dx\,dy_2} + y^2\frac{dz}{dy_2} - \frac{ab-c}{b}\,z_1 = 0.$$

5. Es sei weiter $\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{a}{ex+y}\cdot\frac{dz}{dx} - \frac{b}{ex+y}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{cz}{(ex+y)^2} = 0.$

Man bringe hier sogleich das letzte Glied zum Verschwinden, indem man $z = (ex+y)^n z_1$ setzt. Die Annahme $u = (ex+y)^n$ giebt:

$$(\beta.)\quad \frac{d^2z_1}{dy^2} - \frac{a}{ex+y}\cdot\frac{dz_1}{dx} + \frac{2n-b}{ex+y}\cdot\frac{dz_1}{dy} + \frac{n(n-1)-(ae+b)n+c}{(ex+y)^2}.z_1 = 0.$$

Bestimmt man n durch $n(n-1)-(ae+b)n+c=0$, so bleibt:

$$\frac{d^2z_1}{dy^2} - \frac{a}{ex+y}\cdot\frac{dz_1}{dx} - \frac{b}{ex+y}\cdot\frac{dz_1}{dy} = 0.$$

Man vertausche nun, wenn nicht schon $e=0$ ist, die Veränderliche y gegen die neue $y_1 = ex+y_1$, setze also

$$\frac{dz_1}{dy} = \frac{dz_1}{dy_1}\quad,\quad \frac{dz_1}{dx} = \frac{dz_1}{dx} + e\frac{dz_1}{dy_1}\quad,\quad \frac{d^2z_1}{dy^2} = \frac{d^2z_1}{dy_1^2};$$

dies giebt die neue Gleichung

$$\frac{d^2z_1}{dy_1^2} - \frac{a}{y_1}\cdot\frac{dz_1}{dx} - \frac{ae+b}{y_1}\cdot\frac{dz_1}{dy_1} = 0.$$

Man setze weiter $y_2 = \sqrt{y_1}$. Daraus folgt:

$$y_1\frac{dz_1}{dy_1} = \tfrac{1}{2}y_2\cdot\frac{dz_1}{dy_2}\quad\text{und}\quad y_1^2\frac{d^2z_1}{dy_1^2} = \tfrac{1}{4}y_2^2\frac{d^2z_1}{dy_2^2} = \tfrac{1}{4}y_2\cdot\frac{d^2z_1}{dy_2},$$

und man erhält die Gleichung

$$(e.)\qquad \frac{d^2z_1}{dy_2^2} - 4a\cdot\frac{dz_1}{dx} - \frac{2ae+2b+1}{y_2}\cdot\frac{dz_1}{dy_2} = 0.$$

6. Es sei endlich $\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{a}{x}\cdot\frac{dz}{dx} - \frac{b}{x}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{cz}{x^2} = 0.$

Durch die Vertauschung von z mit $x^{\frac{c}{a}}z_1$ erhält man

$$\frac{d^2z_1}{dy^2} - \frac{a}{x}\cdot\frac{dz_1}{dx} - \frac{b}{x}\cdot\frac{dz_1}{dy} = 0.$$

Setzt man weiter statt y die neue Veränderliche $y_1 = -\frac{bx}{a}+y$, so ist

$$\frac{dz_1}{dy} = \frac{dz_1}{dy_1}\quad,\qquad \frac{dz_1}{dx} = \frac{dz_1}{dx} - \frac{b}{a}\cdot\frac{dz_1}{dy_1}\quad,\qquad \frac{d^2z_1}{dy^2} = \frac{d^2z_1}{dy_1^2},$$

und man gelangt zu der einfacheren Gleichung

$$\frac{d^2z_1}{dy^2} - \frac{a}{x}\cdot\frac{dz_1}{dx} = 0.$$

Wird aber noch $x_1 = x^2$ gesetzt, so kommt man, weil dann $\frac{dz_1}{dx} = 2x \cdot \frac{dz_1}{dx}$ ist, zurück auf die Gleichung

$$(b.) \qquad \frac{d^2 z_1}{dy_1^2} - 2a \cdot \frac{dz_1}{dx_1} = 0.$$

VII. Allgemeines Integral der beiden in VI. transformirten Differentialgleichungen.

Die Integration der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} + X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} + Zz = 0$$

verlangt ein *besonderes* Integral $z = z_1$, welches zugleich die Gleichung

$$(a_1.) \qquad \frac{dz}{dy} + Xz = 0$$

befriedigt, sobald man an die Stelle der in dem besondern Integrale $z = z_1$ vorkommenden willkürlichen Beständigen α irgend eine Function von x einführt; und ein zweites besonderes Integral $z = z_2$, welches der Gleichung

$$(a_2.) \qquad \frac{dz}{dx} + Yz = 0$$

genügt, nachdem die darin vorkommende willkürliche Beständige α mit irgend einer Function von y vertauscht worden ist.

Um aber die Gleichung:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} + Zz = 0$$

zu integriren, sind zwei besondere Integrale $z = z_1$ und $z = z_2$ nöthig, welche beide die Eigenschaft haben, auch die Gleichung

$$(\beta). \qquad Xz = 0$$

zu befriedigen, sobald irgend eine Function von x die Stelle der in diesen beiden besondern Integralen z_1 und z_2 vorkommenden willkürlichen Beständigen α einnimmt.

Die linearen Differentialgleichungen mit *drei Veränderlichen* liefern zwar mancherlei *besondere* Integrale; selbst dann noch, wenn verlangt wird, dass eine willkürliche Beständige darin auftrete. Doch nicht jedes derselben hat zugleich die Eigenschaft, eine der Gleichungen (α_1, α_2 und β) auf die vorhin angegebene

Weise zu befriedigen. Auf die Bestimmung derartiger besonderer Integrale ist alle Schwierigkeit der Integration zurückgeführt. Für die beiden in (VI.) transformirten Differentialgleichungen gelangt man übrigens ohne weitern Anstand zu solchen besondern Integralen. Es gelingt nämlich jedesmal, die Differentialgleichungen mit *drei* Veränderlichen so umzuwandeln, dass eine derjenigen Differentialgleichungen mit nur *zwei* Veränderlichen zum Vorschein kommt, welche hier oben integrirt worden sind, und dass deren besondere Integrale zugleich den andern an dieselben gestellten Anforderungen genügen.

1. Wir betrachten sogleich die allgemeinere Gleichung

$$(e.) \qquad \frac{d^2z}{dy^2} - 4a\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{1-2b}{y}\cdot\frac{dz}{dy} = 0.$$

Die *besondern* Integrale lassen sich hier in der Form $z = x^m . z_1$ darstellen, wo der Exponent m eine willkürliche Beständige, z_1 aber eine bestimmte Function von $y_1 = \frac{y^2}{x}$ ist. Denn aus dieser Annahme folgt:

$$\frac{dz}{dy} = x^m\frac{dz_1}{dx_1}\cdot\frac{2y}{x}\ , \quad \frac{dz}{dx} = x^m\left(-\frac{dz_1}{dx_1}\cdot\frac{y^2}{x^2} + \frac{mz_1}{x}\right) = x^{m-1}\cdot\left(-x_1\frac{dz_1}{dx_1} + mz_1\right),$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = x^m\left(\frac{d^2z_1}{dx_1^2}\cdot\frac{4y^2}{x^2} + \frac{dz_1}{dx_1}\cdot\frac{2}{x}\right) = x^{m-1}\cdot\left(4x_1\frac{d^2z_1}{dx_1^2} + 2\frac{dz_1}{dx_1}\right),$$

und deshalb zur Bestimmung von z_1 die Gleichung

$$x_1\cdot\frac{d^2z_1}{dx_1^2} + (ax_1 + 1 - b)\frac{dz_1}{dx_1} - amz_1 = 0.$$

Nun lässt sich aber m so angeben, dass $z_1 = e^{px_1} . x_1^n$ genügt. Denn es ist alsdann

$$\frac{z_{1x_1}}{z_1} = p + \frac{n}{x_1} \quad \text{und} \quad \frac{z_{1x_1^2}}{z_1} = p^2 + \frac{2np}{x_1} + \frac{n(n-1)}{x_1^2},$$

und die Gleichung geht dadurch in

$$(p+a)px_1 + (2n+1-b)p + a(n-m) + \frac{n(n-b)}{x_1} = 0$$

über. Daraus folgt $p = -a$; und weiter, einmal $n = b$ und $m = -1$, das andremal $n = 0$ und $m = b - 1$. Es ergeben sich so die beiden besondern Integrale

$$z = e^{-ax_1}.x_1^b.x^{-1} \qquad \text{und} \qquad z = e^{-ax_1}.x^{b-1};$$

oder, wenn man y statt x_1 zurück einführt, die beiden:

$$z = e^{\frac{ay^2}{-x}} . y^{2b} . x^{-b-1} \quad \text{und} \quad z = e^{\frac{ay^2}{-x}} . x^{b-1}.$$

Aus diesen finden sich aber leicht zwei andere, welche eine willkürliche Beständige α enthalten. Denn die Differentialgleichung bleibt unverändert, wenn man darin x mit α vertauscht. Jene beiden Functionen z genügen desshalb auch dann noch der Differentialgleichung, nachdem darin die Vertauschung geschehen ist. Die verlangten besondern Integrale sind also:

$$z = e^{\frac{ay^2}{\alpha - x}} . y^{2b} . (\alpha - x)^{-b-1} \quad \text{und} \quad z = e^{\frac{ay^2}{\alpha - x}} (\alpha - x)^{b-1}.$$

Die Gleichung (β) nimmt, je nachdem man das eine oder das andere besondere Integral einführt, eine der beiden Formen

$$(\beta.) \qquad 4a . e^{\frac{ay^2}{\alpha - x}} . y^{2b} . (\alpha - x)^{-b-1} = 0 \quad \text{und} \quad 4a . e^{\frac{ay^2}{\alpha - x}} . (\alpha - x)^{b-1} = 0.$$

an. Beiden wird durch $\alpha = x - i$ genügt, wo i eine verschwindende Grösse ist, die mit a einerlei Zeichen hat; und man gelangt damit zu dem *allgemeinen* Integrale

$$z = y^{2b} . \int_{a_1}^{x-i} e^{\frac{ay^2}{\alpha - x}} (\alpha - x)^{-b-1} . \varphi(\alpha) d\alpha + \int_{a_2}^{x+i} e^{\frac{ay^2}{\alpha - x}} (\alpha - x)^{b-1} . \psi(\alpha) d\alpha.$$

Vor der Bestimmung der beiden willkürlichen Functionen φ und ψ führt die bestimmte Integration nur für den Fall $a = 0$ auf eine geschlossene Form. Es bleibt dann, wenn man $i = 0$ setzt:

$$z = y^{2b} . \int_{a_1}^{x} (\alpha - x)^{-b-1} \varphi(\alpha) d\alpha + \int_{a_2}^{x} (\alpha - x)^{b-1} \psi(\alpha) d\alpha,$$

oder abkürzend, $z = y^{2b} . \varphi(x) + \psi(x)$, als *allgemeines* Integral der einfacheren Gleichung $\frac{d^2z}{dy_2} + \frac{1-2b}{y} . \frac{dz}{dy} = 0$.

Wenn $b = \frac{1}{2}$ ist, also für die Gleichung $\frac{d^2z}{dy^2} - 4a . \frac{dz}{dx} = 0$ (b)., behält man für das allgemeine Integral:

$$z = y . \int_{a_1}^{x-i} e^{\frac{ay^2}{\alpha - x}} (\alpha - x)^{-\frac{3}{2}} . \varphi(\alpha) d\alpha + \int_{a_2}^{x-1} e^{\frac{ay^2}{\alpha - x}} (\alpha - x)^{-\frac{1}{2}} . \psi(\alpha) d\alpha.$$

Die Gleichung (b) hat die Eigenthümlichkeit, auch dann noch unverändert zu bleiben, wenn man y gegen $y - \beta$ vertauscht, und wenn β eine willkürliche Beständige ist. Dieselbe Vertauschung kann desshalb auch in jedem der beiden besondern Integrale der Gleichung geschehen. Deren allgemeines Integral nimmt alsdann, ausser den beiden willkürlichen Functionen φ und ψ_1 zwei willkürliche

Beständige β und β_1 auf. Aber solche willkürliche Beständigen haben im allgemeinen Integrale keine weitere Verallgemeinerung zur Folge. Sie vermögen vielmehr immer nur die Bestimmung der beiden willkürlichen Functionen φ und ψ zu verändern.

2. Es sei nun

$$(a.) \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} = az.$$

Man findet hier besondre Integrale von der Form $z = x^m . z_1$, wo m eine willkürliche Beständige, und z_1 eine bestimmte Function von $x_1 = xy$ ist. Denn aus dieser Annahme folgt:

$$\frac{dz}{dy} = x^{m+1}.\frac{dz_1}{dx_1}, \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} = x^m.\left(\frac{d^2z_1}{dx_1^2}xy + (m+1).\frac{dz_1}{dx_1}\right)$$
$$= x^m.\left(x_1.\frac{d^2z_1}{dx_1^2} + (m+1).\frac{dz_1}{dx_1}\right),$$

und deshalb zur Bestimmung von z_1 die Gleichung

$$x_1.\frac{d^2z_1}{dx_1^2} + (m+1).\frac{dz_1}{dx_1} - az_1 = 0.$$

Wegen des willkürlichen m darf man $z = e^{p\sqrt{x_1}}.x_1^n$ setzen. Denn daraus ergiebt sich

$$\frac{z_{1x_1}}{z_1} = \frac{p}{2\sqrt{x_1}} + \frac{n}{x_1} \quad \text{und} \quad \frac{z_{1x_1^2}}{z_1} = \frac{p^2}{4x_1} + \frac{p(4n-1)}{4x_1\sqrt{x_1}} + \frac{n(n-1)}{x_1^2},$$

und jene Gleichung geht in

$$\tfrac{1}{4}(p^2 - 4a) + \frac{p(4n+2m+1)}{4\sqrt{x_1}} + \frac{n(n+m)}{x_1} = 0$$

über. Derselben wird durch $p = \pm 2\sqrt{a}$ genügt, und ausserdem einmal durch $n = 0$ und $m = -\frac{1}{2}$, das andremal durch $n = -m$, und $m = \frac{1}{2}$. So entstehen die besondern Integrale

$$z = \frac{e^{\pm 2\sqrt{(ax_1)}}}{\sqrt{x}} \qquad \text{und} \qquad z = \frac{\sqrt{x}.e^{\pm 2\sqrt{(ax_1)}}}{\sqrt{x_1}},$$

oder, wenn man y statt x_1 zurück einführt, die beiden:

$$z = \frac{e^{\pm 2\sqrt{(axy)}}}{\sqrt{x}} \qquad \text{und} \qquad z = \frac{e^{\pm 2\sqrt{(axy)}}}{\sqrt{y}}.$$

Man bilde daraus, um auch die Gleichungen (a_1 und a_2) befriedigen zu können, zwei andre:

$$z = \frac{\cos 2\sqrt{(-axy)}}{\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad z = \frac{\cos 2\sqrt{(-axy)}}{\sqrt{y}}.$$

Wenn man x mit $x-\alpha$, und y mit $y-\alpha$ vertauscht, erleidet die Differentialgleichung keine Aenderung. Die letztern Formen verwandeln sich auf diese Weise in die beiden *besondern* Integrale

$$z = \frac{\cos 2\sqrt{[ay(\alpha-x)]}}{\sqrt{[\alpha-x]}} \quad \text{und} \quad z = \frac{\cos 2\sqrt{[ax(\alpha-y)]}}{\sqrt{[\alpha-y]}},$$

welche, wie verlangt wird, eine willkürliche Beständige enthalten. Die Gleichungen (α_1 und α_2) zeigen sich, wenn man beziehlich das eine und das andre besondre Integral einführt, in den Formen

$$(\alpha_1.) \quad \frac{\sin 2\sqrt{[ay(\alpha-x)]}}{\sqrt{y}} = 0 \quad \text{und} \quad (\alpha_2) \quad \frac{\sin 2\sqrt{[ax(\alpha-y)]}}{\sqrt{x}} = 0.$$

Aus der erstern folgt $\alpha = x$, aus der andern $\alpha = y$, und das allgemeine Integral bekommt die Form

$$z = \int_{a_1}^{x} \cdot \frac{\cos 2\sqrt{[ay(\alpha-x)]}}{\sqrt{[\alpha-x]}} \cdot \varphi(\alpha) d\alpha + \int_{a_2}^{y} \cdot \frac{\cos 2\sqrt{[ax(\alpha-y)]}}{\sqrt{[\alpha-y]}} \cdot \psi(\alpha)\, d\alpha.$$

Beide Integrationen führen vor der Bestimmung der beiden willkürlichen Functionen φ und ψ, nur für den Fall $a = 0$ auf eine geschlossene Form. Es bleibt dann:

$$z = \int_{a_1}^{x} \frac{\varphi(\alpha) d\alpha}{\sqrt{(\alpha-x)}} + \int_{a_2}^{y} \frac{\psi(\alpha) d\alpha}{\sqrt{(\alpha-y)}},$$

oder abkürzend, $z = \varphi(x) + \psi(y)$, als *allgemeines* Integral der einfacheren Gleichung $\frac{d^2z}{dx\,dy} = 0$.

3. Es sei nun

$$(d.) \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} + y \cdot \frac{dz}{dy} = az.$$

Es wird hier der Gleichung wieder durch die Form $z = x^m . z_1$ genügt, wo m eine willkürliche Beständige, und z_1 eine bestimmte Function von $x_1 = xy$ st. Zur Bestimmung von z_1 aber findet hier die Gleichung

$$x_1 \cdot \frac{d^2z_1}{dx_1^2} + (x_1 + m + 1)\frac{dz_1}{dx_1} - az_1 = 0$$

Statt, welche wegen des willkürlichen m durch $z_1 = e^{px_1} . x_1^n$ befriedigt wird. Denn die beiden Beziehungen

$$\frac{z_{1x_1}}{z_1} = p + \frac{n}{x_1} \quad \text{und} \quad \frac{z_{1x_1^2}}{z_1} = p^2 + \frac{2np}{x_1} + \frac{n(n-1)}{x_1^2}$$

verwandeln diese Gleichung in

$$(p+1)px_1 + (2n+m+1)p + n - a + \frac{n(n+m)}{x_1} = 0.$$

Daraus folgen $p = -1$, $n = 0$ und $m = -a-1$; oder auch $p = 0$, $n = a$ und $m = -a$. So erhält man die beiden besondern Integrale

$$z = e^{-x_1}.x^{-a-1} \quad \text{und} \quad z = x_1^a.x^{-a},$$

oder auch, wenn y an die Stelle von x_1 zurückversetzt wird, die beiden:

$$z = e^{-xy}.x^{-a-1} \quad \text{und} \quad z = y^a.$$

Die erste Form giebt ein *besonderes* Integral mit einer willkürlichen Beständigen α, durch Vertauschen von x mit $x-\alpha$, weil durch diese Vertauschung die Differentialgleichung unverändert bleibt. Die Differentialgleichung erleidet zwar eine Aenderung, wenn $y-\alpha$ an die Stelle von y tritt; setzt man aber $z = e^{-\alpha x}.z_1$, wo z_1 eine Function von $y_1 = y - \alpha$ und x ist, also:

$$\frac{dz}{dy} = e^{\alpha x}.\frac{dz_1}{dy_1} \quad \text{und} \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = e^{-\alpha x}.\left(\frac{d^2z_1}{dx dy_1} - \alpha\frac{dz_1}{dy_1}\right),$$

so bleibt die ursprüngliche Form

$$\frac{d^2z_1}{dx\,dy_1} + y_1.\frac{dz_1}{dy_1} = az_1.$$

Da dieser nun $z_1 = y_1^a$ genügt, so ergiebt sich $z = e^{-\alpha x}.y_1^a$, und die beiden verlangten besondern Integrale sind:

$$z = e^{y(\alpha-x)}.(\alpha-x)^{-a-1} \quad \text{und} \quad z = e^{-\alpha x}.(\alpha-y)^a.$$

Die Gleichungen (α_1 und α_2) zeigen sich, wenn man beziehlich das eine und das andre besondre Integral einführt, unter den Formen

$$e^{y(\alpha-x)}.(\alpha-x)^{-a} = 0 \quad (\alpha_1) \qquad \text{und} \qquad e^{-\alpha x}.(\alpha-y)^{a+1} = 0. \quad (\alpha_2).$$

Die erste wird durch $\alpha = x$ befriedigt, so lange $a<0$ ist; die andre durch $\alpha = y$, so lange $a+1>0$ ist. Man gelangt demnach zu dem allgemeinen Integrale

$$z = \int_{\alpha_1}^{x} e^{y(\alpha-x)}.(\alpha-x)^{-a-1}.\varphi(\alpha)\,d\alpha \qquad (a<0)$$
$$+\int_{\alpha_2}^{y} e^{-\alpha x}.(\alpha-y)^a.\psi(\alpha)\,d\alpha \qquad (a+1>0).$$

In dem erstern Theile führt die bestimmte Integration noch vor der Bestimmung der willkürlichen Function φ auf eine geschlossene Form, wenn $a+1$ eine positive ganze Zahl ist. Man entwickele dann $e^{y(\alpha-x)}$ nach Potenzen von $y(\alpha-x)$, welches

$$z=\int_{a_1}^{x}\Big((\alpha-x)^{-a-1}+\frac{y}{1}\cdot(\alpha-x)^{-a}+\frac{y^2}{1.2}\cdot(\alpha-x)^{-a+1}+\dots\dots\Big)\varphi(\alpha)\,d\alpha$$
$$(a<0).$$

giebt. Setzt man, abkürzend:

$$\int_{a_1}^{x}(\alpha-x)^{-a-1}\varphi(\alpha)\,d\alpha=\varphi(x)\qquad (a<0),$$

so findet auch die Beziehung

$$\int_{a_1}^{x}(\alpha-x)^{-a}\varphi(\alpha)\,d\alpha=a\int\varphi(x)\,dx\qquad (a<0).$$

Statt, weil man durch beiderseitiges Differentiiren nach x auf die vorige zurückkommt. Eben so lassen sich nach und nach noch andre Beziehungen bilden, und sie verwandeln jene Entwicklung in

$$z=\varphi(x)+\frac{a}{1}y\int\varphi(x)\,dx+\frac{a}{1}\;\frac{a-1}{2}y^2\iint\varphi(x)\,dx^2+\dots\dots;$$

welche Reihe in der That für ein positives ganzzahliges $a+1$ abbricht.

Der zweite Theil des allgemeinen Integrals, nämlich:

$$z=e^{-xy}.\int_{a_2}^{y}e^{-x(\alpha-y)}.(\alpha-y)^a.\psi(\alpha)\,d\alpha\qquad (a+1>0)$$

führt auf demselben Wege zu der Entwicklung

$$z=e^{-xy}.\Big(\psi(y)+\frac{a+1}{1}x.\int\psi(y)ay+\frac{a+1}{1}\;\frac{a+2}{2}x^2.\iint\psi(y)dy^2+\dots\Big)$$

welche für ein negatives ganzzahliges a abbricht. Diese Entwicklung lässt sich auch aus der erstern ableiten, wenn man x mit y, y mit $-x$, a mit $-a-1$ vertauscht, und wenn man ausserdem mit e^{-xy} multiplicirt.

Wir setzen noch die Gleichung

$$(c.)\qquad \frac{d^2z}{dx\,dy}-\frac{a}{x+y}\cdot\frac{dz}{dx}-\frac{b}{x+y}\cdot\frac{dz}{dy}=0.$$

Hier finden besondre Integrale in der Form $z=x^m.z$ Statt, wo m wieder eine willkürliche Beständige, z_1 aber eine bestimmte Function von $x_1=\frac{y}{x}$ ist. Denn aus dieser Annahme folgt:

$$\frac{dz}{dy} = x^{m-1}\cdot\frac{dz_1}{dx_1}\quad,\quad \frac{dz}{dx} = x^m\left(-\frac{dz_1}{dx_1}\cdot\frac{y}{x^2}+\frac{mz_1}{x}\right) = x^{m-1}\cdot\left(-x_1\frac{dz_1}{dx_1}+mz_1\right)$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = x^m\left(-\frac{d^2z_1}{dx_1^2}\cdot\frac{y}{x^3}+\frac{m-1}{x^2}\cdot\frac{dz_1}{dx_1}\right)$$

$$= x^{m-2}\left(-x_1\frac{d^2z_1}{dx_1^2}+(m-1)\frac{dz_1}{dx_1}\right),$$

und deshalb zur Bestimmung von z_1 die Gleichung

$$(x_1+1)\left(x_1\frac{d^2z_1}{dx_1^2}-(m-1)\frac{dz_1}{dx_1}\right)-a\left(x_1\frac{dz_1}{dx_1}-mz_1\right)+b\frac{dz_1}{dx_1}=0.$$

Wegen des willkürlichen m wird derselben durch $z_1 = x_1^n$ genügt. Denn setzt man

$$\frac{z_{1x}}{z_1} = \frac{n}{x_1} \quad\text{und}\quad \frac{z_{1x2}}{z_1} = \frac{n(n-1)}{x_1^2}$$

hinein, so geht die Gleichung in

$$(n-a)(n-m)+\frac{(n-m+b)n}{x_1} = 0$$

über, und daraus folgt $n = a$, und $m = a+b$. Es ergiebt sich also das besondere Integral $z = x^{a+b}.x_1^a = x^by^a$. Die Differentialgleichung bleibt unverändert, wenn man x mit $x = \alpha$, und zugleich y mit $y+\alpha$ vertaucht. Dieselben Vertauschungen verwandeln das besondere Integral $z = x^by^a$ in ein anderes, nämlich in

$$z = (\alpha - x)^b(\alpha+y)^a,$$

welches der Anforderung gemäss eine willkürliche Beständige α enthält.

Die Gleichungen (α_1 und α_2) sind alsdann:

$$(\alpha_1).\quad az.\left(\frac{1}{\alpha+y}-\frac{1}{x+y}\right)=0 \qquad\text{und}\qquad (\alpha_2).\quad bz.\left(\frac{1}{\alpha-x}+\frac{1}{x+y}\right)=0,$$

oder auch, wenn noch der Werth von z eingeführt wird:

$$(\alpha_1).\quad \frac{a(\alpha-x)^{b+1}.(\alpha+y)^{a-1}}{x+y}=0 \qquad\text{und}\qquad (\alpha_1).\quad \frac{b(\alpha-x)^{b-1}.(\alpha+y)^{a+1}}{x+y}=0.$$

Die erstere wird durch $\alpha = x$ befriedigt, so lange $b+1>0$, die andere durch $\alpha = -y$, so lange $a+1>0$ ist. Das allgemeine Integral zeigt sich demnach in der Form

$$z = \int_{a_1}^{x}(\alpha-x)^b(\alpha+y)^a.\varphi(\alpha)d\alpha \qquad (b+1>0)$$

$$+\int_{a_2}^{y}(\alpha+x)^b(\alpha-y)^a.\psi(\alpha)d\alpha \qquad (a+1>0)$$

Die *bestimmte* Integration lässt sich in dem einen Theile jedesmal noch vor der Bestimmung der willkürlichen Function in geschlossener Form ausführen, wenn $a+1$ oder $b+1$ eine positive oder auch wenn a oder b eine negative ganze Zahl ist. Denn der erste Theil giebt, wenn man $(\alpha+y)^a=(\alpha-x+x+y)^a$ nach fallenden Potenzen von $x+y$ entwickelt, die Reihe

$$z=(x+y)^a.\int_a^x\cdot\left((\alpha-x)^b+\frac{a}{1}\cdot\frac{(\alpha-x)^{b+1}}{x+y}+\frac{a}{1}\cdot\frac{a-1}{2}\cdot\frac{(\alpha+x)^{b+2}}{(x+y)^2}+\ldots\ldots\right).\varphi(\alpha)d\alpha$$

$$(b+1>0).$$

Setzt man darin, abkürzend,

$$\int_{a_1}^{x}(\alpha-x)^b\varphi(\alpha)d\alpha=\varphi(x)\qquad(b+1>0),$$

so erhält man durch beiderseitiges Integriren den Ausdruck

$$\int_{a_1}^{x}(\alpha-x)^{b+1}.\varphi(\alpha)d\alpha=(b+1)\int\varphi(x)dx\qquad(b+1>0).$$

Durch fortgesetztes Integriren ergeben sich noch andere Beziehungen. Sie geben die Reihen-Entwicklung

$$z=(x+y)^a\cdot\Big(\varphi(x)-\frac{a(b+1)}{1}\cdot\frac{1}{x+y}\cdot\int\varphi(x)dx$$
$$+\frac{a(b+1)}{1}\cdot\frac{(a-1)(b+2)}{2}\cdot\frac{1}{(x+y)^2}\cdot\iint\varphi(x)dx^2-\ldots\ldots\Big),$$

welche in der That abbricht, wenn $a+1$ eine positive, oder b eine negative ganze Zahl ist. Es bildet sich daraus, durch gegenseitiges Vertauschen von x und y und von a und b, für den zweiten Theil des allgemeinen Integrals die Entwicklung

$$z=(x+y)^b\Big(\psi(y)-\frac{b(a+1)}{1}\cdot\frac{1}{x+y}\cdot\int\psi(y)dy$$
$$+\frac{b(a+1)}{1}\cdot\frac{(b-1)(a+2)}{2}\cdot\frac{1}{(x+y)^2}\cdot\iint\psi(y)dy^2-\ldots\ldots\Big),$$

welche abbricht, wenn $b+1$ eine positive, oder a eine negative ganze Zahl ist.

VIII. Transformation der Gleichungen

$$a\,\frac{d^2z}{dw^2}+a_1\,\frac{d^2z}{dw\,dx}+a_2\,\frac{d^2z}{dw\,dy}+a_3\,\frac{d^2z}{dx^2}+a_4\,\frac{d^2z}{dx\,dy}+a_5\,\frac{d^2z}{dy^2}$$
$$+b\,\frac{dz}{dw}+b_1\,\frac{dz}{dx}+b_2\,\frac{dz}{dy}+cz=0,\ \text{und}$$

$$a\,\frac{d^2z}{dw^2}+a_1\,\frac{d^2z}{dw\,dx}+a_2\,\frac{d^2z}{dw\,dy}+a_3\,\frac{d^2z}{dx^2}+a_4\,\frac{d^2z}{dx\,dy}+a_5\,\frac{d^2z}{dy^2}$$
$$+\frac{1}{ew+e_1x+e_2y}\cdot\left(b\,\frac{dz}{dw}+b_1\,\frac{dz}{dx}+b_2\,\frac{dz}{dy}\right)+\frac{cz}{(ew+e_1x+e_2y)^2}=0.$$

1. Die Gleichung

$$a\frac{d^2z}{dw^2}+b\frac{d^2z}{dw\,dx}+c\frac{d^2z}{dw\,dy}+e\frac{d^2z}{dx^2}+f\frac{d^2z}{dx\,dy}+g\frac{d^2z}{dy^2}=Z,$$

in welcher $a, b \ldots g$ irgend Beständige sind, Z aber von Differentialquotienten zweiter Ordnung frei ist, lässt bemerkenswerthe Vereinfachungen zu, wenn man an die Stelle der unabhängigen Veränderlichen y, x und w die neuen y_1, x_1 und w_1 einführt, welche Functionen der vorigen sein sollen. Setzt man zunächst an die Stelle von y und x die neuen Veränderlichen $y_1=x+qy$ und $x_1=x+py$, so lassen sich bekanntlich, wenn nicht gerade $4eg-f^2=0$ ist, die Beständigen p und q so angeben, dass die Glieder $\frac{d^2z}{dx_1^2}$ und $\frac{d^2z}{dy_1^2}$ wegfallen und also eine Gleichung wie

$$a\frac{d^2z}{dw^2}+b\frac{d^2z}{dw\,dx_1}+c\frac{d^2z}{dw\,dy_1}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}=Z_1$$

zurückbleibt. Mit Hülfe des Gliedes $\frac{d^2z}{dx_1\,dy_1}$ lassen sich noch die beiden andern Differentialquotienten zweiter Ordnung wegschaffen, in welchen die Veränderlichen y_1 und x_1 vorkommen, indem man an die Stelle von w die neue Veränderliche $w_1=w+nx_1+n_1y_1$ setzt. Denn die Annahme, dass z eine Function von y_1, x_1 und w_1 sei, verwandelt jene Gleichung zunächst in:

$$a\frac{d^2z}{dw_1^2}+b\left(n\frac{d^2z}{dw_1^2}+\frac{d^2z}{dw_1dx_1}\right)+c\left(n_1\frac{d^2z}{dw_1^2}+\frac{d^2z}{dw_1\,dy_1}\right)$$
$$+nn_1\frac{d^2z}{dw_1^2}+n_1\frac{d^2z}{dw_1dx_1}+n\frac{d^2z}{dw_1dy_1}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}=Z_2,$$

oder, wenn man nach Differentialquotianten von z ordnet, in:

$$(a+bn+cn_1+nn_1)\frac{d^2z}{dw_1^2}+(b+n_1)\frac{dz^2}{dw_1dx_1}+(c+n)\frac{d^2z}{dw_1\,dy_1}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}=Z_2.$$

Bestimmt man aber die Grössen n und n_1 aus $b+n_1=0$ und $c+n=0$, so bleibt die einfachere Form

$$(a-bc)\frac{d^2z}{dw_1^2}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}=Z_2.$$

Wenn nun zwar $4eg-f^2=0$ ist, aber nicht zugleich auch die beiden Gleichungen $4ag-c^2=0$ und $4ae-b^2=0$ Statt finden, so lässt sich auf demselben Wege immer wieder zu einer ähnlichen Form gelangen, indem man zunächst die Glieder $\frac{d^2z}{dw_1^2}$ und $\frac{d^2z}{dy_1^2}$ durch Einführen der neuen Veränderlichen $y_1=w+qy$

und $w_1 = w + ny$, oder die Glieder $\frac{d^2z}{dw_1^2}$ und $\frac{d^2z}{dx_1^2}$ durch Einführen der neuen Veränderlichen $x_1 = w + px$ und $w_1 = w + nx$ zum Verschwinden bringt. Wenn aber gleichzeitig $4eg - f^2 = 0$, $4ag - c^2 = 0$ und $4ae - b^2 = 0$ ist, so lässt sich die Gleichung (1.) auch in der Form

$$a^2\frac{d^2z}{dw^2} + 2ab\,\frac{d^2z}{dw\,dx} + b^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2a\,\frac{d^2z}{dw\,dy} + 2b\,\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{d^2z}{dy^2} = Z$$

schreiben. Man nehme hier statt x und w die neuen Veränderlichen $x_1 = x + py$ und $w_1 = w + ny$ an, Dies giebt die neue Gleichung

$$\begin{aligned} a^2\frac{d^2z}{dw_1^2} &+ 2ab\,\frac{d^2z}{dw_1\,dx_1} + b^2\frac{d^2z}{dx_1^2} + 2a\left(n\frac{d^2z}{dw_1^2} + p\,\frac{d^2z}{dw_1\,dx_1} + \frac{d^2z}{dw_1\,dy}\right) \\ &+ 2b\left(n\frac{d^2z}{dw_1\,dx_1} + p\,\frac{d^2z}{dx_1^2} + \frac{d^2z}{dx_1\,dy}\right) + n^2\frac{d^2z}{dw_1^2} + 2np\,\frac{d^2z}{dw_1dx_1} + p^2\frac{d^2z}{dx_1^2} \\ &+ 2n\frac{d^2z}{dw_1dy} + 2p\,\frac{d^2z}{dx_1dy} + \frac{d^2z}{dy^2} = Z_1, \end{aligned}$$

oder auch, wenn man nach Differentialquotienten von z ordnet:

$$\begin{aligned} (a^2 + 2an + n^2)\frac{d^2z}{dw_1^2} &+ 2(ab + ap + bn + np)\frac{d^2z}{dw_1\,dx_1} + (b^2 + 2bp + p^2)\frac{d^2z}{dx_1^2} \\ &+ 2(a+n)\frac{d^2z}{dw_1dy} + 2(b+p)\frac{d^2z}{dx_1\,dy} + \frac{d^2z}{dy^2} = Z_1; \end{aligned}$$

welche Gleichung für $a + n = 0$ und $b + p = 0$ in die einfachere

$$\frac{d^2z}{dy^2} = Z_1.$$

übergeht. Diese Form $\frac{d^2z}{dy^2} = Z$ nimmt immer nur den einzigen Differentialquotienten zweiter Ordnung $\frac{d^2z}{dy_1^2}$ auf, wenn man an die Stelle von y irgend eine Function von y, x und w als neue Veränderliche y_1 einführt. Auch kann man weiter statt x und w irgend zwei Functionen dieser beiden Veränderlichen einführen, ohne dadurch noch andre Differentialquotienten zweiter Ordnung zum Vorschein zu bringen. Diese letztere Transformation ist ausserdem geeignet, die Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dy^2} + W\frac{dz}{dw} + X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} + Zz = 0$$

auf eine andre mit nur *drei* Veränderlichen zurückzuführen, wenn der Quotient $W:X$ von y frei ist. Denn stellt man sich z als Function von y, x und w_1 und w_1 selbst als Function von x und w vor, so geht die Gleichung in

$$\frac{d^2z}{dy^2}+\left(W\frac{dw_1}{dw}+X\frac{dw_1}{dx}\right)\frac{dz}{dw_1}+X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}+Zz=0$$

über. Bestimmt man aber die Function w_1 aus $Wdx-Xdw=0$, so bleibt in der That:

$$\frac{d^2z}{dy^2}+X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}+Zz=0$$

wo nur die *drei* Veränderlichen z, y und x sich zeigen.

Wenn man in die Gleichung $\frac{d^2z}{dx\,dy}=Z$ statt y irgend eine Function von y und w als neue Veränderliche y_1, und an die Stelle von x irgend eine Function von x und w als neue Veränderliche x_1 einführt, so erhält man jedesmal wieder eine Gleichung $\frac{d^2z}{dx_1\,dy_1}=Z_1$, in welcher Z_1 von Differentialquotienten zweiter Ordnung frei ist.

Aber auch in die Gleichung $\frac{d^2z}{dw^2}+\frac{d^2z}{dx\,dy}=Z$ lassen sich noch andre Functionen von y, x und w an die Stelle dieser Veränderlichen bringen, ohne dass dieselbe in Bezug auf das Vorkommen der Differentialquotienten zweiter Ordnung eine Aenderung erlitte. Bedient man sich der neuen Veränderlichen

$$y_1=qw+q_1x+y\quad,\quad x_1=pw+x+p_1y\quad,\quad w_1=nw+n_1x+n_2y,$$

so sind schon *fünf* von den vorkommenden *sieben* Beständigen zu der erwähnten Transformation ausreichend, so dass die zwei übrigen *willkürlich* bleiben. Denn die Annahme, dass z eine Funetion von y_1, x_1 und w_1 sei, verwandelt jene Gleichung in:

$$\begin{aligned}n^2\frac{d^2z}{dw_1^2}&+2np\frac{d^2z}{dw_1dx_1}+2nq\frac{d^2z}{dw_1dy_1}+p^2\frac{d^2z}{dx_1^2}+2pq\frac{d^2z}{dx_1dy_1}+q^2\frac{d^2z}{dy_1^2}\\&+n_1n_2\frac{d^2z}{dw_1^2}+(n_1p_1+n^2)\frac{d^2z}{dw_1dx_1}+(n_1+n_2q_1)\frac{d^2z}{dw_1dy_1}+p_1\frac{d^2z}{dx_1^2}\\&+(p_1q_1+1)\frac{d^2z}{dx_1dy_1}+q_1\frac{d^2z}{dy_1^2}=Z_1,\end{aligned}$$

oder, wenn nach Differentialquotienten von z geordnet wird, in:

$$(n^2+n_1n_2)\frac{d^2z}{dw_1^2}+(2np+n_1p_1+n_2)\frac{d^2z}{dw_1dx_1}+(2nq+n_1+n_2q)\frac{d^2z}{dw_1dy_1}$$
$$+(p^2+p_1)\frac{d^2z}{dx_1^2}+(2pq+p_1q_1+1)\frac{d^2z}{dx_1dy_1}+(q^2+q_1)\frac{d^2z}{dy_1^2}=Z_1.$$

Man bestimme p_1 und q_1 aus $p^2+p_1=0$, und $q^2+q_1=0$, welches

$$(n^2+n_1n_2)\frac{d^2z}{dw_1^2}+(2np-n_1p^2+n_2)\frac{d^2z}{dw_1dx}+(2nq+n_1-n_2q^2)\frac{d^2z}{dw_1dy_1}$$
$$+(pq+1)^2\frac{d^2z}{dx_1dy_1}=Z_1$$

giebt. Man bestimme weiter n_1 und n_2 aus $2np-n_1p^2+n_2=0$ und $2nq+n_1-n_2q^2=0$, nehme also $(pq-1)n_1=2nq$ und $(pq-1)n_2=2np$ an. Dadurch gelangt man zu der Gleichung

$$\frac{n^2}{(pq-1)^2}\cdot\frac{d^2z}{dw_1^2}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}=\frac{Z_1}{(pq+1)^2}.$$

Man nehme endlich noch $n=pq-1$ an; dann bleibt:

$$(\alpha.)\qquad \frac{d^2z}{dw_1^2}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}=\frac{Z_1}{(pq+1)^2}$$

zurück. Die neuen Veränderlichen aber sind alsdann:

$$y_1=qw-q^2x+y\;,\;x_1=pw+x-p^2y\;,\;w_1=(pq-1)w+2qx+2py.$$

Nachdem die Gleichung

$$(1.)\qquad a\frac{d^2z}{dw^2}+b\frac{d^2z}{dwdx}+c\frac{d^2z}{dwdy}+e\frac{d^2z}{dx^2}+f\frac{d^2z}{dxdy}+g\frac{d^2z}{dy^2}=Z$$

in Bezug auf das Vorkommen der Differentialquotienten zweiter Ordnung möglichst vereinfacht worden ist, bediene man sich weiter derjenigen Vertauschungen der unabhängigen Veränderlichen, welche keine Aenderung mehr in diesem Vorkommen zur Folge haben, um dadurch auch die in Z vorkommenden Glieder zu vereinfachen. Ausserdem aber lässt sich in dieser Absicht auch die abhängige Veränderliche z gegen eine andere z_1 vertauschen. Man setze dann $z=uz_1$, wo u eine bestimmte Function von y, x und w ist.

2. Es sei nun $\frac{d^2z}{dw^2}+\frac{d^2z}{dxdy}-a\frac{dz}{dw}-b\frac{dz}{dx}-c\frac{dz}{dy}+fz=0.$

Durch $z=e^{mw+px+qy}.z_1$ erhält man zunächst:

$$\frac{d^2z_1}{dw^2}+\frac{d^2z_1}{dx\,dy}+(2n-a)\frac{dz_1}{dw}+(q-b)\frac{dz_1}{dx}+(p-c)\frac{dz_1}{dy}$$
$$+(n^2+pq-an-bp-cq+f)z_1=0.$$

Bestimmt man aber die Exponenten n, p und q aus $q-b$, $p-c=0$ und $n^2+pq-an-bp-cq+f=0$, so bleibt die einfachere Gleichung

$$(a). \qquad \frac{d^2z_1}{dw^2}+\frac{d^2z_1}{dx\,dy}-a\frac{dz_1}{dw}=0.$$

3. Es sei $\frac{d^2z}{dx\,dy}-a\frac{dz}{dw}-b\frac{dz}{dx}-c\frac{dz}{dy}+fz=0.$

Man setze wieder $z=e^{mw+px+qy}.z_1$. Dies giebt zunächst:

$$\frac{d^2z_1}{dx\,dy}-a\frac{dz_1}{dw}+(q-b)\frac{dz^1}{dx}+(p-c)\frac{dz_1}{dy}+(pq-an-bp-cq+f)z_1=0.$$

Die Exponenten n, p und q werden aus $q-b=0$, $p-c=0$ und $pq-an-bp-cq+f=0$ bestimmt. Man setze ausserdem $w=-\frac{w}{a}$; dann bleibt:

$$\frac{d^2z_1}{dx\,dy}+\frac{dz_1}{dw}=0.$$

4. Es sei $\frac{d^2z}{dw^2}+\frac{d^2z}{dx\,dy}-\frac{1}{fw+gx+y}\left(a\frac{dz}{dw}+b\frac{dz}{dx}+c\frac{dz}{dy}\right)+\frac{cz}{(fw+gx+y)^2}=0.$

Um die Veränderlichen y und x aus den Coefficienten dieser Gleichung wegzuschaffen, setze man statt y, x und w die neuen Veränderlichen

$$y_1=qw-q^2x+y \quad , \quad x_1=pw+x-p^2y \quad , \quad w_1=(pq-1)w+2qx+2py.$$

Die Annahme, dass z eine Function von y_1, x_1 und w_1 sei, giebt

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dy} &= 2p\frac{dz}{dw_1}-p^2\frac{dz}{dx_1}+\frac{dz}{dy_1},\\
\frac{dz}{dx} &= 2q\frac{dz}{dw_1}+\frac{dz}{dx_1}-q^2\frac{dz}{dy_1},\\
\frac{dz}{dw} &= (pq-1)\frac{dz}{dw_1}+p\frac{dz}{dx_1}+q\frac{dz}{dy_1},
\end{aligned}$$

und man gelangt zu der neuen Gleichung

$$\frac{d^2z}{dw_1^2}+\frac{d^2z}{dx_1\,dy_1}+\frac{ez}{(pq+1)^2(fw+gx+y)^2}$$
$$-\frac{(a(pq-1)+2bq+2cp)\frac{dz}{dw_1}+(ap+b-cp^2)\frac{dz}{dx_1}+(aq-bq^2+c)\frac{dz}{dy_1}}{(pq+1)^2(fw+gx+y)}=0. \ (\alpha).$$

Lässt man aber die identische Gleichung

$$(pq-1)w+2qx+2py = 2p(fw+gx+y)$$

bestehen, bestimmt also p und q aus $pq-1 = 2fp$ und $q = gp$, so ist $2p(fw+gx+y) = w_1$, und man gelangt zu der einfacheren Gleichung

$$\frac{d^2z}{dw_1^2}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}-\frac{a}{w_1}\cdot\frac{dz}{dw_1}-\frac{b}{w}\cdot\frac{dz}{dx_1}-\frac{c}{w_1}\cdot\frac{dz}{dy_1}+\frac{ez}{w_1^2} = 0.$$

Man bringe deren letztes Glied zum Verschwinden, indem man $z = w_1^n z_1$ setzt. Dadurch ergiebt sich zunächst:

$$\frac{d^2z_1}{dw_1^2}+\frac{d^2z_1}{dx_1dy_1}+\frac{2n-a}{w_1}\cdot\frac{dz_1}{dw_1}-\frac{b}{w_1}\cdot\frac{dz_1}{dx_1}-\frac{c}{w_1}\cdot\frac{dz_1}{dy_1}+\frac{n(n-1)-an+e}{w_1^2}\cdot z_1 = 0.$$

Bestimmt man aber n aus $n(n-1)-an+e = 0$, so bleibt:

$$(c.)\qquad \frac{d^2z_1}{dw_1^2}+\frac{d^2z_1}{dx_1dy_1}-\frac{a}{w_1}\cdot\frac{dz_1}{dw_1}-\frac{b}{w_1}\cdot\frac{dz_1}{dx_1}-\frac{c}{w_1}\cdot\frac{dz_1}{dy_1} = 0.$$

Die Coefficienten der Gleichung (4.) lassen sich nicht mehr von den Veränderlichen y und x befreien, wenn $g = -f^2$ ist. Denn dann geben die oben benutzten Vertauschungen die Werthe $p = -\frac{1}{f}$ und $q = f$. Für diese Werthe von p und q aber stellen die neuen Veränderlichen y_1, x_1 und w_1 eine und dieselbe Function von y, x und w dar. Man nehme dann statt y und w die neuen Veränderlichen $y_1 = fw-f^2x+y$ und $w_1 = -w+2fx$ an. Dies giebt, wenn die Werthe $p = 0$ und $q = f$ in (α) eingeführt werden, die neue Gleichung

$$(4'.)\qquad \frac{d^2z}{dw_1^2}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}-\frac{a}{y_1}\cdot\frac{dz}{dw_1}-\frac{b}{y_1}\cdot\frac{dz}{dx}-\frac{c}{y_1}\cdot\frac{dz}{dy_1}+\frac{ez}{y_1^2} = 0.$$

Um hier den Coefficienten a zu tilgen, setze man weiter statt x und w die neuen Veränderlichen $x_1 = pw_1+x-p^2y_1$ und $w_2 = -w_1+2py_1$ also:

$$\frac{dz}{dy_1} = 2p\frac{dz}{dw_2}-p^2\frac{dz}{dx_1}+\frac{dz}{dy_1}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx_1}, \qquad \frac{dz}{dw_1} = -\frac{dz}{dw_2}+p\frac{dz}{dx_1},$$

Dies giebt die neue Gleichung

$$(\alpha.)\qquad \frac{d^2z}{dw_2^2}+\frac{d^2z}{dxdy_1}+\frac{a-2cp}{y_1}\cdot\frac{dz}{dw_2}-\frac{ap+b-cp^2}{y_1}\cdot\frac{dz}{dx_1}-\frac{c}{y_1}\cdot\frac{dz}{dy_1}+\frac{ez}{y_1^2} = 0.$$

Bestimmt man aber p aus $a-2cp = 0$, so bleibt:

$$\frac{d^2z}{dw_2^2}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}-\frac{b}{y_1}\cdot\frac{dz}{dx_1}-\frac{c}{y_1}\cdot\frac{dz}{dy_1}+\frac{ez}{y_1^2} = 0,$$

Um auch den Coefficienten b wegzuschaffen, setze man $z = y_1^b z_1$. Dies giebt:

$$\frac{d^2z_1}{dw_2^2}+\frac{d^2z}{dx_1\,dy_1}-\frac{c}{y_1}\cdot\frac{dz}{dy_1}-\frac{bc-e}{y_1^2}z_1=0.$$

Endlich setze man noch $x_2=\sqrt{-c}.x_1$ und $y_2=\frac{y_1}{\sqrt{-c}}$, und es bleibt

$$(d.)\qquad \frac{d^2z_1}{dw_2^2}+\frac{d^2z_1}{dx_2dy_2}+\frac{1}{y_2}\cdot\frac{dz_1}{dy_2}+\frac{bc-e}{cy_2^2}z_1=0.$$

Der Coefficient a der Gleichung (4'.) kann nicht mehr zum Verschwinden gebracht werden, wenn dort $c=0$ ist. Man schaffe dann sogleich den Coefficienten b weg, indem man $z=y_1^b z_1$ setzt. Dies giebt:

$$(e).\qquad \frac{d^2z_1}{dw_1^2}+\frac{d^2z_1}{dx\,dy_1}-\frac{a}{y_1}\cdot\frac{dz_1}{dw_1}+\frac{ez_1}{y_1^2}=0.$$

5. Es sei weiter

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}-\frac{1}{fw+gx+y}\cdot\left(a\frac{dz}{dw}+b\frac{dz}{dx}+c\frac{dz}{dy}\right)+\frac{ez}{(fw+gx+y)^2}=0.$$

Man bringe vor Allem das letzte Glied zum Verschwinden, indem man $z=(fw+gx+y)^n z_1$ setzt. Dadurch ergiebt sich zunächst:

$$\frac{d^2z_1}{dx\,dx}-\frac{1}{fw+gx+y}\cdot\left(a\frac{dz_1}{dw}+(b-n)\frac{dz_1}{dx}+(c-gn)\frac{dz_1}{dy}\right)$$
$$+\frac{gn(n-1)-(af+bg+c)n+e}{(fw+gx+y)^2}\cdot z_1=0.$$

Bestimmt man aber n aus $gn(n-1)-(af+bg+c)n+e=0$, so bleibt:

$$\frac{d^2z_1}{dx\,dy}-\frac{1}{fw+gx+y}\cdot\left(a\frac{dz_1}{dw}+b\frac{dz_1}{dx}+c\frac{dz_1}{dy}\right)=0.$$

Statt y und x setze man die neuen Veränderlichen $y_1=qw+y$ und $x_1=pw+x$. Dadurch erhält man die Ausdrücke

$$\frac{dz_1}{dy}=\frac{dz_1}{dy_1},\qquad \frac{dz_1}{dx}=\frac{dz_1}{dx_1},\qquad \frac{dz_1}{dw}=\frac{dz_1}{dw}+p\frac{dz_1}{dx_1}+q\frac{dz_1}{dy_1},$$

und die Gleichung verwandelt sich in

$$\frac{d^2z_1}{dx\,dy}-\frac{1}{(f-gp-q)w+gx_1+y_1}\cdot\left(a\frac{dz_1}{dw}+(ap+b)\frac{dz_1}{dx_1}+(aq+c)\frac{dz_1}{dy_1}\right)=0.$$

Die Beständigen p und q bestimme man aus $ap+b=0$ und $f-gp=q=0$. Dies giebt die einfachere Gleichung

$$(5'.)\qquad \frac{d^2z_1}{dx_1dy_1}-\frac{a}{gx_1+y_1}\cdot\frac{dz_1}{gw}-\frac{c}{gx_1+y_1}\cdot\frac{dz_1}{dy_1}=0.$$

Man setze endlich $x_2 = gx_1$ und $w_1 = -\frac{gw}{a}$; so bleibt:

$$(f.)\qquad \frac{d^2z_1}{dx_2\,dy_1}+\frac{1}{x_2+y_1}\cdot\left(\frac{dz_1}{dw_1}-\frac{c}{g}\cdot\frac{dz_1}{dy_1}\right)=0.$$

Für den Fall $g=0$ nehmen wir die neuen Veränderlichen $y_2=-\frac{c}{y_1}$ und $w_1=\frac{w}{a}$ in die Gleichung (5'.) auf, und gelangen, weil dann $\frac{dz_1}{dy_1}=\frac{c}{y_1^2}\cdot\frac{dz_1}{dy_2}$ ist, zu der Gleichung

$$(g.)\qquad \frac{d^2z_1}{dx_1dy_2}+\frac{1}{y_2}\cdot\frac{dz_1}{dw_1}+y_2\frac{dz_1}{dy_2}=0.$$

Wenn aber, ausser $g=0$, auch $af+c=0$ ist, so kann durch die Vertauschung von z mit $(fw+y)^n.z_1$ das letzte Glied der Gleichung (5) nicht mehr zum Verschwinden gebracht werden. Man setze dann sogleich statt y und x die neuen Veränderlichen $y_1=fw+y$ und $x_1=-\frac{bw}{a}+x$, welches $\frac{d^2z}{dx_1dy_1}-\frac{a}{y_1}\cdot\frac{dz}{dw}+\frac{cz}{y_1^2}=0$ giebt. Man setze noch $y_2=\frac{e}{y_1}$ und $w_1=\frac{w}{a}$; dann bleibt, weil alsdann $\frac{dz}{dy_1}=-\frac{e}{y_1^2}\cdot\frac{dz}{dy_2}$ ist, die Gleichung

$$(h.)\qquad \frac{d^2z}{dx_1dy_2}+\frac{1}{y_2}\cdot\frac{dz}{dw_1}=z.$$

6. Es sei endlich

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}-\frac{a}{w}\cdot\frac{dz}{dw}-\frac{b}{w}\cdot\frac{dz}{dx}-\frac{c}{w}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{cz}{w^2}=0.$$

Durch die Vertauschung von z mit $w^{\frac{e}{a}}.z_1$ erhält man

$$\frac{d^2z_1}{dx\,dy}-\frac{a}{w}\cdot\frac{dz_1}{dw}-\frac{b}{w}\cdot\frac{dz_1}{dx}-\frac{c}{w}\cdot\frac{dz_1}{dy}=0.$$

Nimmt man weiter statt y und x die neuen Veränderlichen $y_1=-\frac{cw}{a}+y$ und $x_1=-\frac{bw}{a}+x$ an, so bleibt die einfachere Gleichung

$$\frac{d^2z_1}{dx_1dy_1}-\frac{a}{w}\cdot\frac{dz_1}{dw}=0.$$

Setzt man aber noch $w_1=-\frac{w^2}{2a}$, so kommt man, weil dann $\frac{dz_1}{dw}=-\frac{w}{a}\frac{dz_1}{dw_1}$ ist, zurück auf die Gleichung

$$(b.)\qquad \frac{d^2z_1}{dx_1dy_1}+\frac{dz_1}{dw_1}=0.$$

IX. Allgemeines Integral der beiden in (VIII) transformirten Differentialgleichungen.

Wir geben dem zweiten Integrale der linearen Differentialgleichung mit *vier* Veränderlichen z, y, x und w die Form

$$z = \int_{a_1}^{\alpha_1} z_1 d\alpha + \int_{a_2}^{\alpha_2} z_2 d\alpha,$$

wo z_1 und z_2 Functionen von y, x, w und einer willkürlichen Beständigen α, und von solcher Beschaffenheit sind, dass jedes der beiden bestimmten Integrale $\int_{a_1}^{\alpha_1} z_1 d\alpha$ und $\int_{a_2}^{\alpha_2} z_2 d\alpha$ eine willkürliche Function zweier veränderlichen Grössen ausdrückt. Wir nehmen deshalb an, dass z_1 eine willkürliche Function von α und einer veränderlichen Grösse β_1, und z_2 eine willkürliche Function von α und einer veränderlichen Grösse β_2 enthalte; und stellen uns die beiden Integrationsgrenzen α_1 und α_2 als bestimmte Functionen von y, x und w vor, während die Integrationsgrenzen a_1 und a_2 von den Veränderlichen unabhängig sind. Unter diesen Annahmen drückt aber das bestimmte Integral $\int_{a_1}^{\alpha_1} z_1 d\alpha$ eine willkürliche von β_1 und α_1, und das bestimmte Integral $\int_{a_2}^{\alpha_2} z_2 d\alpha$ eine willkürliche Function von β_2 und α_2 aus.

Indessen sind die Grössen β_1 und β_2, und die veränderlichen Grenzen α_1 und α_2, noch einer besondern Rücksicht unterworfen. Denn es kann kommen, dass das bestimmte Integral $\int_{a_1}^{\alpha_1} z_1 d\alpha$, obschon z_1 eine willkürliche Function $\varphi(\beta_1, \alpha)$ aufnimmt, und obschon die Integrationsgrenze α_1 von den Veränderlichen abhängig ist, dennoch nicht eine willkürliche Function zweier veränderlicher Grössen ausdrückt. Wenn nämlich β_1 in eine bestimmte Function von α und α_1 übergeht, also $\beta_1 = \varphi_1(\alpha_1\, \alpha)$ ist, so lässt sich statt $\varphi(\beta_1, \alpha)$ offenbar auch $\varphi(\alpha_1, \alpha)$ schreiben. Das bestimmte Integral $\int_{a_2}^{\alpha_2} z_1 d\alpha$ drückt dann nur eine willkürliche Function einer veränderlichen Grösse α_1 aus, weil das einfachere bestimmte Integral $\int_{a_1}^{\alpha_1} \varphi(\alpha_1, \alpha) d\alpha$ jedenfalls auf eine Form $\varphi(\alpha_1)$ führt. Man muss demnach zusehen, dass β_1 nicht eine *bestimmte* Function des veränderlichen Grenzwerths α_1 und von α sei; in welchem Falle durch die Elimination einer der Veränderlichen y, x und w mittels α_1 gleichzeitig die beiden andern Veränderlichen aus β_1 verschwinden. Aus demselben Grunde darf β_2 nicht in eine *bestimmte* Function von α_2 und von α übergehen.

Um die Grössen z_1 und z_2, und die veränderlichen Grenzen a_1 und a_2 zu bestimmen, beachte man vor Allem, dass jedes der beiden bestimmten Integrale $\int_{a_1}^{\alpha_1} z_1 d\alpha$ und $\int_{a_2}^{\alpha_2} z_2 d\alpha$ für sich der Differentialgleichung genugthun muss. Damit sie durch das bestinmte Integral $\int_{a_1}^{\alpha_1} z_1 d\alpha$ befriedigt werde, soll ihr das unbestimmte Integral $z = \int z_1 d\alpha$ Genüge leisten; und zwar ebensowohl für den beständigen Grenzwerth $\alpha = a_1$, als für den veränderlichen $\alpha = \alpha_1$. Durch Differentiation bilde man aus dem unbestimmten Integrale $z = \int z_1 d\alpha$ die Formen

$$\frac{dz}{dy} = \int \frac{dz_1}{dy} d\alpha + z_1 \frac{d\alpha}{dy},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \int \frac{d^2z_1}{dy^2} d\alpha + 2 \frac{dz_1}{dy} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{dz_1}{d\alpha} \cdot \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + z_1 \frac{d^2\alpha}{dy^2},$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \int \frac{d^2z_1}{dxdy} d\alpha + \frac{dz_1}{dy} \cdot \frac{d\alpha}{dx} + \frac{dz_1}{dx} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{dz_1}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + z_1 \frac{d^2\alpha}{dxdz}$$

u. s. w. Indem man diese Werthe von $z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dy^2} \ldots\ldots$ in die vorliegende Differentialgleichung setzt, gelangt man zu den Gleichungen, aus welchen die Unbekannten z_1 und α_1 hervorgehen.

Nimmt man α zunächst als *Beständige* an, so bleiben nur die unter dem Integralzeichen vorkommenden Glieder. Daraus folgt, dass z_1 und z_2 *besondre* Integrale der Differentialgleichung sind. Was die in (VIII) transformirten Differentialgleichungen betrifft, so gelingt es jedesmal, dieselben so umzuwandeln, dass eine von den linearen Differentialgleichungen mit *drei*, oder auch mit nur *zwei* Veränderlichen, zum Vorschein kommt, deren allgemeines Integral im Früheren entwickelt wurde. Aus einer solchen Differentialgleichung erhält man dann ohne Weiteres die verlangten *besondern* Integrale.

Wenn aber α als Function der Veränderlichen angenommen wird, so bleiben ausserdem die vom Integralzeichen befreiten Glieder zurück, und liefern, nachdem man das vorher gefundene besondre Integral $z = z_1$ eingeführt hat, eine weitere Gleichung zur Herleitung des veränderlichen Grenzwerths α_1 von α. Die vom Integralzeichen befreiten Glieder führen immer eine der Grössen $\frac{dz}{dw}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{dz}{d\alpha}$ und z als Factor mit sich. Da aber z eine willkürliche Function von β_1 und α einschliesst, so zerfällt jene Gleichung jedesmal in drei andere, deren jede einzeln befriedigt werden muss. Zunächst nämlich muss der gemeinsame Factor von $\frac{dz}{dy}$ für sich verschwinden. Der Rest der Gleichung zerfällt in zwei andere, wenn

man eine der Veränderlichen y, x und w mittels $\beta = \beta_1$ aus dem besondern Integrale z eliminirt, oder statt eines der Differentialquotienten $\frac{dz}{dw}$, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ den neuen Quotienten $\frac{dz}{d\beta}$ einführt. Denn alsdann muss auch der gemeinsame Factor von $\frac{dz}{d\beta}$ für sich verschwinden. Es sind aber, um diese Untersuchung weiter zu verfolgen, zwei Formen der Differentialgleichung zu unterscheiden. Die erste Form

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + W\frac{dz}{dw} + X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} + Zz = 0$$

giebt zur Bestimmung der veränderlichen Grenzwerthe α die Gleichung

$$(\alpha.)\quad \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dx} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy} + \frac{dz}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy} + z\left(\frac{d^2\alpha}{dx\,dy} + W\frac{d\alpha}{dw} + X\frac{d\alpha}{dx} + Y\frac{d\alpha}{dy}\right) = 0.$$

Man setze vor Allem den Factor $\frac{dz}{d\alpha}$ gleich Null. Der so entstehenden Gleichung $\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy} = 0$ lässt sich auf zweifache Weise genügen: einmal nämlich, indem man α als blosse Function von x und w voraussetzt, das andremal, indem man α nur die Veränderlichen y und w aufnehmen lässt. Die erste Annahme $\frac{d\alpha}{dy} = 0$ verwandelt die Gleichung (α) in

$$(\alpha_1.)\qquad Wz\frac{d\alpha}{dw} + \left(\frac{dz}{dy} + Xz\right)\cdot\frac{d\alpha}{dx} = 0;$$

die andre $\frac{d\alpha}{dx} = 0$ führt auf die einfachere Gleichung

$$(\alpha_2).\qquad Wz\frac{d\alpha}{dw} + \left(\frac{dz}{dx} + Yz\right)\cdot\frac{d\alpha}{dy} = 0.$$

Nun ist aus dem Früheren bekannt, dass das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + W\frac{dz}{dw} + X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} + Zz = 0$$

für den Fall $W = 0$ die beiden willkürlichen Functionen $\varphi(x, w)$ und $\psi(y, w)$ enthält. Wenn man voraussetzt, dass auch die vorliegende allgemeine Differentialgleichung die beiden willkürlichen Functionen $\varphi(x, w)$ und $\psi(y, w)$ in ihr allgemeines Integral aufnehme, so ist man zu der weitern Annahme genöthigt, dass β_1 in dem einen besondern Integrale $z = z_1$ blosse Function von x und w, und β_2 in dem andern besondern Integrale $z = z_2$ blosse Function von y und w sei, dass ausserdem jenes erste besondere Integral für $\frac{d\alpha}{dy} = 0$, also in der Gleichung (α_1),

und das andre besondere Integral für $\frac{d\alpha}{dx} = 0$, also in der Gleichung (α_2) angewandt werden müsse. Wegen $\frac{d\beta_1}{dy} = 0$ verschwindet aber alsdann von selbst die Grösse $\frac{dz}{d\beta}$ aus der ersten, und wegen $\frac{d\beta_2}{dx} = 0$ auch aus der andern Gleichung. Zur weitern Bestimmung der veränderlichen Grenzen α_1 und α_2 bleibt deshalb beziehlich nur die Gleichung (α_1) und die Gleichung (α_2) zurück.

Die andre Form

$$\frac{d^2z}{dw^2}+\frac{d^2z}{dxdy}+W\frac{dz}{dw}+X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}+Zz=0$$

liefert zur Bestimmung der veränderlichen Grenzwerthe α die Gleichung

$$2\frac{dz}{dw}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dx}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}+\frac{dz}{d\alpha}\left[\left(\frac{d\alpha}{dw}\right)^2+\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\right]$$
$$+z\left(\frac{d^2\alpha}{dw^2}+\frac{d^2\alpha}{dxdw}+W\frac{d\alpha}{dw}+X\frac{d\alpha}{dw}+Y\frac{d\alpha}{dy}\right)=0. \qquad (\beta.)$$

Man lasse den gemeinsamen Factor von $\frac{dz}{d\alpha}$ verschwinden, und setze also

$$\left(\frac{d\alpha}{dw}\right)^2+\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}=0. \qquad (\beta_1.)$$

Man führe sogleich statt x die neue Veränderliche β in das besondere Integral z ein und verwandele dadurch die Gleichung (β) in

$$2\frac{dz}{dw}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dx}+\frac{dz}{d\beta}\left(2\frac{d\beta}{dw}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+\frac{d\beta}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\right)$$
$$+z\left(\frac{d^2\alpha}{dw^2}+\frac{d^2\alpha}{dxdy}+W\frac{d\alpha}{dw}+X\frac{d\alpha}{dx}+Y\frac{d\alpha}{dy}\right)=0, \qquad (\beta_2.)$$

wo aber der gemeinsame Factor von $\frac{dz}{d\beta}$ für sich verschwinden muss.

1. Es sei nun $\frac{d^2z}{dx\,dy}+\frac{dz}{dw}=0. \qquad (\beta).$

Man setze das besondre Integral $z = e^{ay}.z_1$, wo z eine noch zubestimmende Function von $x_1 = -aw + x$ und w, a aber eine willkürliche Beständige ist. Aus dieser Annahme folgt:

$$\frac{dz}{dy}=ae^{ay}.z_1 \quad , \quad \frac{dz}{dw}=e^{ay}.\left(\frac{dz_1}{dw}-a\frac{dz_1}{dx_1}\right) \quad , \quad \frac{d^2z}{dxdy}=ae^{ay}.\frac{dz_1}{dx_1},$$

und die Gleichung geht in die einfachere $\frac{dz_1}{dw}=0$ über, welche jedesmal genügen wird, wenn die Veränderliche w in z_1 nicht vorkommt, also z_1 eine willkürliche, Function von x_1 ist. Zur Bestimmung des veränderlichen Grenzwerths α hat man,

ausser $\frac{d\alpha}{dy} = 0$, wenn man sogleich den obigen Werth $z = e^{ay}.z_1$ einführt, die Gleichung

$$e^{ay}.z_1.\left(\frac{d\alpha}{dw} + \alpha\frac{d\alpha}{dx}\right) = 0. \qquad (\alpha_1)$$

Derselben wird durch $-\alpha w + x = x_1 = 0$, oder auch durch $\alpha = \frac{x}{w}$ genügt. Denn durch Differentiation von $-\alpha w + x = 0$ erhält man $w \cdot \frac{d\alpha}{dx} = 1$ und $w \cdot \frac{d\alpha}{dw} = -\alpha$. Wegen der Symmetrie der Differentialgleichung in Bezug auf x und y erhält man den andern Theil des allgemeinen Integrals durch gegenseitiges Vertauschen dieser beiden Veränderlichen. Das *allgemeine* Integral ist demnach:

$$z = \int_{\alpha_1}^{\frac{x}{w}} e^{\alpha y}.\varphi(\alpha w - x \;,\; \alpha)d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\frac{y}{w}} e^{\alpha x}.\psi(\alpha w - y \;,\; \alpha)d\alpha.$$

2. Es sei $\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{1}{y}\cdot\frac{dz}{dw} = Z.$ (h.)

Man setze das besondre Integral $z = y^a.z_1$, worin z_1 eine noch zu bestimmende Function von y, und $x_1 = -dw + x$ ist. Daraus folgt:

$$\frac{dz}{dy} = y^a\left(\frac{dz_1}{dy} + \frac{a}{y}z_1\right) \;,\; \frac{dz}{dw} = -\alpha y^a\frac{dz_1}{dx_1} \;,\; \frac{d^2z}{dx\,dy} = y^a\left(\frac{d^2z_1}{dx_1dy} + \frac{a}{y}\cdot\frac{dz_1}{dx_1}\right),$$

und die obige Differentialgleichung geht in die einfachere

$$\frac{d^2z_1}{dx_1dy} = z_1$$

über, für welche früher

$$z = \int_{b_1}^{x_1}\frac{\cos 2\sqrt{[y(\beta - x_1)]}}{\sqrt{(\beta - x_1)}}\varphi(\beta)d\beta$$

gefunden wurde. Man erhält dadurch ein *besonderes* Integral mit einer willkürlichen Function der veränderlichen Grösse $\beta_1 = x_1$, in Form eines *bestimmten* Integrals. Zur Bestimmung des veränderlichen Grenzwerths α findet, ausser $\frac{d\alpha}{dy} = 0$, wenn man sogleich $z = y^a.z_1$ einführt, die Gleichung

$$y^a\frac{dz_1}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dx} + y^{a-1}.z_1\left(\frac{d\alpha}{dw} + \alpha\frac{d\alpha}{dx}\right) = 0. \qquad (\alpha_1.)$$

Statt. Man setze wieder $-\alpha w + x = x_1 = 0$, oder $\alpha = \frac{x}{w}$. Für $x_1 = 0$ aber geht die Gleichung (α_1) in

$$\int_{b_1}^{0}\sin 2\sqrt{(y\beta)}.\varphi(\beta)d\beta = 0$$

über. Das bestimmte Integral $z = \int_{\alpha_1}^{\frac{x}{w}} z d\alpha$ genügt also nur dann der Differential-

gleichung, wenn die willkürliche Function φ in jenem besondern Integrale z vor der Ausführung der bestimmten Integration von solcher Beschaffenheit angenommen wird, dass das bestimmte Integral $\int_{b_1}^{0}\sin 2\sqrt{(y\beta)}\,.\,\varphi(\beta)\partial\beta$ verschwindet.

Ein zweites besonderes Integral erhält man in der Form $z = e^{ax}.z_1$, wo z_1 eine blosse Function von y und w ist. Denn es ist alsdann

$$\frac{dz}{dy} = e^{ax}.\frac{dz_1}{dy}\quad,\quad \frac{dz}{dw} = e^{ax}.\frac{dz_1}{dw}\quad,\quad \frac{d^2z}{dxdy} = ae^{ax}.\frac{dz_1}{dy}\,.$$

Man gelangt so zu der neuen Gleichung

$$\frac{1}{y}.\frac{dz_1}{dw} + a\frac{dz_1}{dy} = z_1.$$

Durch Integration findet man daraus:

$$z_1 = e^{\frac{y}{a}}.\psi(aw - ly).$$

Zur Bestimmung des veränderlichen Grenzwerths α findet hier, ausser $\frac{d\alpha}{dx} = 0$, wenn man sogleich $z = e^{ax}.z_1$ einführt, die Gleichung

$$(\alpha_2).\qquad e^{ax}.z_1\left(\frac{1}{y}.\frac{d\alpha}{dw} + a\frac{d\alpha}{dy}\right) = 0$$

Statt. Aus $\frac{1}{y}\cdot\frac{d\alpha}{dw} + \alpha\cdot\frac{d\alpha}{dy} = 0$ folgt aber $\alpha w - ly = 0$ oder $\alpha = \frac{ly}{w}$.

Das *allgemeine* Integral zeigt sich demnach in der Form

$$z = \int_{a_1}^{\frac{x}{w}} y^{a}.\int_{b_1}^{x_1}\frac{\cos 2\sqrt{[y(\beta - x_1)]}}{\sqrt{[\beta - x_1]}}.\varphi(\beta,a)d\beta\,da$$
$$+\int_{a_2}^{\frac{2y}{w}} e^{ax+\frac{y}{a}}.\psi(aw - ly, a)da.$$

3. Es sei $\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{1}{y}.\frac{dz}{dw} + y\frac{dz}{dy} = 0.\qquad (g.)$

Man setze wieder das besondre Integral $z = y^{a}.z_1$, wo z_1 eine noch unbekannte Function von y und $x_1 = -aw + x$ ist, und bringe so die Differentialgleichung auf

$$\frac{d^2z_1}{dx_1\,dy} + \frac{dz_1}{dy} + az_1 + 0.$$

Für diese Gleichung ist oben

$$z_1 = \int_{b_1}^{x_1} e^{y(\beta - x_1)}(\beta - x_1)^{a-1}\varphi(\beta)d\beta\qquad (a > 0).$$

entwickelt worden. Zur Bestimmung des veränderlichen Grenzwerths α findet, ausser $\frac{d\alpha}{dy}=0$, wenn man sogleich $z=y^a.z_1$ einführt, die Gleichung

$$(\alpha_1) \qquad y^a\frac{dz_1}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dx}+y^{a-1}.z_1\left(\frac{d\alpha}{dw}+\alpha\frac{d\alpha}{dx}\right)=0$$

Statt. Man setze $-\alpha w+x=x_1=0$, oder $\alpha=\frac{x}{w}$; dann bleibt:

$$\int_{b_1}^{0}e^{y\beta}\beta^a.\varphi(\beta)d\beta=0 \qquad (a>0),$$

als Bedingung, unter welcher der Grenzwerth $\alpha=\frac{x}{w}$ angewendet werden darf.

Ein zweites besondres Integral zeigt sich, wie im vorigen Beispiele, in der Form $z=e^{ax}.z_1$, wo z_1 eine blosse Function von y und w ist. Denn man erhält so die neue Gleichung

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dz_1}{dw}+(a+y)\frac{dz_1}{dy}=0.$$

Durch deren Integration findet sich

$$z_1=\psi\left(aw+l\left(\frac{a}{y}+1\right)\right).$$

Die Gleichung (α_2) aber nimmt hier die Form

$$(\alpha_2) \qquad e^{ax}.z_1\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+(\alpha+y)\frac{d\alpha}{dy}\right)=0$$

an. Aus $\frac{1}{y}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+(\alpha+y)\frac{d\alpha}{dy}=0$ folgt $\alpha w+l\left(\frac{\alpha}{y}+1\right)=0$, aber auch einfacher $\alpha=-y$, und das allgemeine Integral ist demnach:

$$z=\int_{a_1}^{\frac{x}{w}}y^a.\int_{b_1}^{x_1}e^{y(\beta-x_1)}(\beta-x_1)^{a-1}\varphi(\beta,a)d\beta da \qquad (a>0)$$
$$+\int_{a_2}^{-y}e^{ax}.\psi\left[aw+l\left(\frac{a}{y}+1\right),a\right]da.$$

4. Es sei noch $\frac{d^2z}{dx\,dy}+\frac{1}{x+y}\cdot\frac{dz}{dw}-\frac{a}{x+y}\cdot\frac{dz}{dy}=0.$ $\qquad (f.)$

Wir stellen uns das besondre Integral als Function von $y_1=\alpha w+y$ und $x_1=-\alpha w+x$ vor. Wir setzen deshalb

$$\frac{dz}{dy}=\frac{dz}{dy_1}, \qquad \frac{dz}{dw}=-\alpha\frac{dz}{dx_1}+\alpha\frac{dz}{dy_1}, \qquad \frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dx_1\,dy_1},$$

und gelangen so zu der neuen Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx_1dy_1}-\frac{\alpha}{x_1+y_1}\cdot\frac{dz}{dx_1}-\frac{a-\alpha}{x_1+y_1}\cdot\frac{dz}{dy_1}=0.$$

Deren Integration hat früher die beiden Formen

$$z = \int_{b_1}^{x_1} (\beta - x_1)^{a-\alpha}.(\beta + y_1)^{\alpha}.\varphi(\beta)d\beta \qquad (a - \alpha + 1 > 0)$$

$$\text{und } z = \int_{b_2}^{y_1} (\beta + x_1)^{a-\alpha}.(\beta - y_1)^{\alpha}.\psi(\beta)d\beta \qquad (\alpha + 1 > 0)$$

gegeben. Für den ersten Werth von z besteht, ausser $\frac{d\alpha}{dy} = 0$, die Gleichung

$$(\alpha_1). \qquad \frac{dz}{dy_1}.\frac{d\alpha}{dx} + \frac{z}{x_1 + y_1}.\frac{d\alpha}{dw} = 0,$$

wenn man statt y und x die neuen Veränderlichen y_1 und x_1 in z einführt. Man setze auch hier $-\alpha w + x = x_1 = 0$, also $\alpha = \frac{x}{w}$; alsdann bleibt

$$\int_{b_1}^{0} \beta^{a-\alpha+1}(\beta + y_1)^{\alpha-1}.\varphi(\beta)d\beta = 0 \qquad (a + \alpha + 1 > 0),$$

als Bedingung, unter welcher jener Grenzwerth $\alpha = \frac{x}{w}$ gebraucht werden darf. Für den andern Werth von z nehme man $\alpha w + y = y_1 = 0$ an; dann findet sich eben so, dass der Grenzwerth $\alpha = -\frac{y}{w}$ die Gleichung (α_2) unter der Bedingung

$$\int_{b_2}^{0} (\beta + x_1)^{a-\alpha-1}.\beta^{\alpha+1}.\psi(\beta)d\beta = 0 \qquad (\alpha + 1 > 0)$$

befriedigt. Das *allgemeine* Integral zeigt sich demnach in der Form

$$z = \int_{a_1}^{\frac{x}{w}} \int_{b_1}^{x_1} (\beta - x_1)^{a-\alpha}.(\beta - y_1)^{\alpha}.\varphi(\beta, \alpha)d\beta\, d\alpha \qquad (a - \alpha + 1 > 0)$$

$$+ \int_{a_2}^{-\frac{y}{w}} \int_{b_2}^{y_1} (\beta - x_1)^{a-\alpha}.(\beta - y_1)^{\alpha}.\psi(\beta, \alpha)d\beta\, d\alpha \qquad (\alpha + 1 > 0).$$

5. Es sei nun weiter $\frac{d^2z}{dw^2} + \frac{d^2z}{dx\,dy} - a\frac{dz}{dw} = 0. \qquad (a.)$

Man gebe dem besondern Integrale die Form $z = e^{a\alpha y}.z_1$, wo z_1 eine noch unbekannte Function von $x_1 = \alpha w + x - \alpha^2 y$ und $w_1 = w - 2\alpha y$, α aber eine willkürliche Beständige ist. Diese Annahme giebt nach und nach:

$$\frac{dz}{dx} = e^{a\alpha y}.\frac{dz_1}{dx_1}, \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} = e^{a\alpha y}.\left(-2\alpha\frac{d^2z_1}{dw_1 dx_1} - \alpha^2\frac{d^2z_1}{dx_1^2}\right) + e^{a\alpha y}.a\alpha\frac{dz_1}{dx_1},$$

$$\frac{dz}{dw} = e^{a\alpha y}.\left(\frac{dz_1}{dw_1} + \alpha\frac{dz_1}{dx_1}\right), \qquad \frac{d^2z_1}{dw^2} = e^{a\alpha y}.\left(\frac{d^2z_1}{dw_1^2} + 2\alpha\frac{d^2z_1}{dw_1 dx_1} + \alpha\frac{d^2z_1}{dx_1^2}\right),$$

und bringt so die obige Differentialgleichung auf

$$\frac{d^2z_1}{dw_1^2} - a\frac{dz_1}{dw_1} = 0.$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn z_1 eine willkürliche Function von x_1 ist. Zur Bestimmung der veränderlichen Grenzwerthe α hat man die Gleichungen (β_1) und (β_2). Die letztre nimmt, weil $\beta = x_1 = \alpha w + x - \alpha^2 y$ ist, und wenn man sogleich das vorher gefundene $z = e^{\alpha dy}.z_1$ einführt, die Form

$$(\beta_2).\quad e^{\alpha a y}.\frac{dz_1}{dx_1}\left(2\alpha\frac{d\alpha}{dw} - \alpha^2\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\right) + e^{\alpha a y}.z_1\left(\frac{d^2\alpha}{dw^2} + \frac{d^2\alpha}{dxdy} - a\frac{d\alpha}{dw} + a\alpha\frac{d\alpha}{dx}\right) = 0$$

an. Aus $\alpha w + x - \alpha^2 y = 0$ ergeben sich aber durch Differentiation die Formen

$$(w - 2\alpha y)\frac{d\alpha}{dy} - \alpha^2 = 0, \qquad (w - 2\alpha y)\frac{d^2\alpha}{dxdy} - 2y\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy} - 2\alpha\frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

$$(w - 2\alpha y)\frac{d\alpha}{dx} + 1 = 0, \qquad (w - 2\alpha y)\frac{d^2\alpha}{dw^2} - 2y\left(\frac{d\alpha}{dw}\right)^2 + 2\frac{d\alpha}{dw} = 0.$$

$$(w - 2\alpha y)\frac{d\alpha}{dw} + \alpha = 0.$$

Es wird deshalb durch $\alpha w + x - \alpha^2 y = x_1 = 0$ sowohl der Gleichung $\left(\frac{d\alpha}{dw}\right)^2 + \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy} = 0, (\beta_1)$ als auch jener Gleichung (β_2) genügt. Demnach finden die beiden veränderlichen Grenzwerthe

$$\alpha_1 = \frac{w + \sqrt{[w^2 + 4xy]}}{2y} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{w - \sqrt{[w^2 + 4xy]}}{2y},$$

Statt, und das *allgemeine* Integral zeigt sich in der Form

$$z = \int_{a_1}^{\alpha_1} e^{\alpha a y}.\varphi(\alpha w + x - \alpha^2 y, \alpha)\,d\alpha + \int_{a_2}^{\alpha_2} e^{\alpha a y}.\psi(\alpha w + x - \alpha^2 y, \alpha)\,d\alpha.$$

6. Es sei $\frac{d^2z}{dw^2} + \frac{d^2z}{dxdy} - \frac{a}{y}\cdot\frac{dz}{dw} + \frac{bz}{y^2} = 0.$ (*e.*)

Das besondre Integral hat die Form $z = y^{a\alpha}.z_1$, wo z_1 eine Function von $y_1 = \frac{1}{y}$ und $x_1 = \alpha w + x - \alpha^2 y$ ist. Denn diese Annahme giebt nach einander:

$$\frac{dz}{dx} = y^{a\alpha}.\frac{dz_1}{dx_1}, \qquad \frac{d^2z}{dxdy} = y^{a\alpha}.\left(-\alpha^2\frac{d^2z_1}{dx_1^2} - \frac{1}{y^2}\cdot\frac{d^2z_1}{dx_1dy_1} + \frac{a\alpha}{y}\cdot\frac{dz_1}{dx_1}\right),$$

$$\frac{dz}{dw} = y^{a\alpha}.\alpha\frac{dz_1}{dx_1}, \qquad \frac{d^2z}{dw^2} = y^{a\alpha}.\alpha^2\frac{d^2z_1}{dx_1^2},$$

und verwandelt deshalb die Differentialgleichung in die einfachere

$$\frac{d^2z_1}{dx_1dy_1} = bz_1.$$

Für diese wurde früher

$$z_1 = \int_{b_1}^{x_1} \frac{\cos 2\sqrt{[by_1(\beta - x_1)]}}{\sqrt{[\beta - x_1]}}\cdot\varphi(\beta)d\beta$$

gefunden. Wenn $b = 0$ ist, so hat man das einfachere $z_1 = \varphi(x_1)$. Zur Be-

stimmung der veränderlichen Grenzwerthe α sind die Gleichungen (β_1) und (β_2) vorhanden. Die letztre hat, wenn man sogleich $z = y^{a\alpha}.z_1$ einführt, die Form

$$(\beta_2).\quad y^{a\alpha}\frac{dz_1}{dx_1}\left(2\alpha\frac{d\alpha}{dw} - \alpha^2\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\right) - y^{a\alpha-2}\frac{dz_1}{dy_1}\cdot\frac{d\alpha}{dx}$$
$$+ y^{a\alpha}.z_1\left(\frac{d^2\alpha}{dw^2} + \frac{d^2\alpha}{dx\,dy} - \frac{a}{y}\cdot\frac{d\alpha}{dw} + \frac{a\alpha}{y}\cdot\frac{d\alpha}{dx}\right) = 0.$$

Nimmt man α aus $\alpha w + x - \alpha^2 y = x_1 = 0$, so befriedigen die erlangten Werthe $\alpha = \alpha_1$ und $\alpha = \alpha_2$ die Gleichung (β_1). Die Gleichung (β_2) aber verwandelt sich dadurch in

$$\int_{b_1}^{0} \sin 2\sqrt{[by_1\beta]}.\varphi(\beta)d\beta = 0,$$

und drückt so die Bedingung aus, unter welcher jene beiden veränderlichen Grenzwerthe α Geltung haben. Das allgemeine Integral ist demnach:

$$z = \int_{a_1}^{\alpha_1} y^{a\alpha}.\int_{b_1}^{x_1}\frac{\cos 2\sqrt{[by_1(\beta - y_1)]}}{\sqrt{[\beta - x_1]}}\,\varphi(\beta,\alpha)d\beta\,d\alpha$$
$$+\int_{a_2}^{\alpha_2} y^{a\alpha}.\int_{b_2}^{x_1}\frac{\cos 2\sqrt{[by_1(\beta - x_1)]}}{\sqrt{[\beta - x_1]}}\,\psi(\beta,\alpha)d\beta\,d\alpha.$$

Für den Fall $b = 0$ aber hat man die einfachere Form

$$z = \int_{a_1}^{\alpha_1} y^{a\alpha}.\varphi(\alpha w + x - \alpha^2 y,\alpha)\,d\alpha + \int_{a_2}^{\alpha_2} y^{a\alpha}.\psi(\alpha w + x - \alpha^2 y,\alpha)\,d\alpha.$$

7. Es sei weiter $\frac{d^2z}{dw^2} + \frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{1}{y}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{az}{y^2} = 0.$ $(d.)$

Es wird hier durch die Form $z = y^{\alpha^2}.z_1$ genügt, wo z_1 wieder eine Function von $y_1 = \frac{1}{y}$ und $x_1 = \alpha w + x - \alpha^2 y$ ist. Denn nach dieser Annahme ist

$$\frac{dz}{dy} = y^{\alpha^2}\left(-\alpha^2\frac{dz_1}{dx_1} - \frac{1}{y^2}\cdot\frac{dz_1}{dy_1} + \frac{\alpha^2}{y}z_1\right),\qquad \frac{dz}{dw} = y^{\alpha^2}\alpha\frac{dz_1}{dx_1},$$
$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = y^{\alpha^2}\left(-\alpha^2\frac{d^2z_1}{dx_1^2} - \frac{1}{y^2}\cdot\frac{d^2z_1}{dx_1dy_1} + \frac{\alpha^2}{y}\cdot\frac{dz_1}{dx_1}\right),\qquad \frac{d^2z}{dw_2} = y^{\alpha^2}\alpha\frac{d^2z_1}{dx_1^2},$$

und die Differentialgleichung geht in die einfachere

$$\frac{d^2z_1}{dx_1dy_1} + y_1\frac{dz_1}{dy_1} = (\alpha^2 + a)z_1$$

über. Diese hat aber früher die Form

$$z_1 = \int_{b_1}^{x_1} e^{y_1(\beta - x_1)}.(\beta - x_1)^{-\alpha^2-a-1}.\varphi(\beta)d\beta \qquad (\alpha^2 + a < 0)$$

gegeben. Zur Bestimmung der veränderlichen Grenzwerthe α hat man die Gleichungen (β_1 und β_2). Setzt man in der letztern sogleich $z = y^{\alpha^2}.z_1$, so zeigt sie sich in der Form

$$(\beta_2).\quad y^{\alpha^2}\frac{dz_1}{dx_1}\left(2\alpha\frac{d\alpha}{dw}-\alpha^2\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\right)-y^{\alpha^2-2}.\frac{dz_1}{dy_1}.\frac{d\alpha}{dx}$$
$$+y^{\alpha_2}.z_1\left(\frac{d^2\alpha}{dw^2}+\frac{d^2\alpha}{dxdr}+\frac{\alpha^2}{y}.\frac{d\alpha}{dx}+\frac{1}{y}.\frac{d\alpha}{dy}\right)=0.$$

Der Gleichung (β_1) wird genügt, wenn man sich der beiden Werthe $\alpha=\alpha_1$ und $\alpha=\alpha_2$ bedient, welche aus $\alpha w+x-\alpha^2 y=x_1=0$ hervorgehen. An der Stelle von (β_2) aber bleibt alsdann die Gleichung

$$\int_{b_1}^{0} e^{y_1\beta}\beta^{-\alpha^2-\alpha}.\varphi(\beta)d\beta=0 \qquad (\alpha+a<0),$$

als Bedingung, unter welcher jene beiden veränderlichen Grenzwerthe α angewendet werden dürfen. Das *allgemeine* Integral ist demnach:

$$z=\int_{a_1}^{\alpha_1}y^{\alpha^2}\int_{b_1}^{x_1}e^{y_1(\beta-x_1)}(\beta-x_1)^{-\alpha^2-\alpha-1}.\varphi(\beta,\alpha)d\beta d\alpha \qquad (\alpha^2+\alpha<0)$$
$$+\int_{a_2}^{\alpha_2}y^{\alpha^2}.\int_{b_2}^{x_1}e^{y_1(\beta-x_1)}(\beta-x_1)^{-\alpha^2-\alpha-1}.\psi(\beta,\alpha)d\beta d\alpha \qquad (\alpha^2+\alpha<0),$$

8. Es sei endlich $\frac{d^2z}{dw^2}+\frac{d^2z}{dx\,dy}-\frac{2}{w}\left(a\frac{dz}{dw}+b\frac{dz}{dx}+c\frac{dz}{dy}\right)=0.$ $(c.)$

Wir stellen uns das besondre Integral z als Function von $y_1=\alpha w-x+\alpha^2 y$ und $x_1=\alpha w+x-\alpha^2 y$ vor; setzen also

$$\frac{dz}{dy}=-\alpha^2\left(\frac{dz}{dx_1}-\frac{dz}{dy_1}\right), \qquad \frac{d^2z}{dxdy}=-\alpha^2\left(\frac{d^2z}{dx_1^2}-2\frac{d^2z}{dx_1\,dy_1}+\frac{d^2z}{dy_1^2}\right),$$
$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dx_1}-\frac{dz}{dy_1}, \qquad \frac{d^2z}{dw^2}=\alpha^2\left(\frac{d^2z}{dx_1}+2\frac{d^2z}{dx_1\,dy_1}+\frac{d^2z}{dy_1^2}\right),$$
$$\frac{dz}{dw}=\alpha\left(\frac{dz}{dx_1}+\frac{dz}{dy_1}\right),$$

und verwandeln dadurch, weil $x_1+y_1=2\alpha w$ ist, die Differentialgleichung in

$$\frac{d^2z}{dx_1dy_1}-\frac{a+\frac{b}{\alpha}-c\alpha}{x_1+y}.\frac{dz}{dx_1}-\frac{a+\frac{b}{\alpha}+c\alpha}{x_1+y_1}.\frac{dz}{dy_1}=0.$$

Für diese Gleichung wurde früher

$$z=\int_{b_1}^{x_1}(\beta-x_1)^{a-\frac{b}{\alpha}+c\alpha}.(\beta+y_1)^{a+\frac{b}{\alpha}-c\alpha}.\varphi(\beta)d\beta \qquad (a+\tfrac{b}{\alpha}+c\alpha+1>0).$$

gefunden. Zur Bestimmung der veränderlichen Grenzwerthe α finden die Gleichungen (β_1 und β_2) Statt. Betrachtet man z, wie vorhin, als Function von y_1 und x_1, so hat man:

$$(\beta_2).\quad \frac{dz}{dx_1}\left(2\alpha\frac{d\alpha}{dw}-\alpha^2\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\right)+\frac{dz}{dy_1}\left(2\alpha\frac{d\alpha}{dw}+\alpha^2\frac{d\alpha}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)$$
$$+z\left(\frac{d^2\alpha}{dw^2}+\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right)-\frac{2z}{w}\left(a\frac{d\alpha}{dw}+b\frac{d\alpha}{dx}+c\frac{d\alpha}{dy}\right)=0.$$

Lässt man aber die beiden Grenzwerthe $\alpha = \alpha_1$ und $\alpha = \alpha_2$ gelten, welche aus $\alpha w + x - \alpha^2 y = x_1 = 0$ hervorgehen, so wird der Gleichung (β_1) genügt, und die Gleichung (β_2) geht in

$$\int_{b_1}^{0} \beta^{a - \frac{b}{\alpha} + c\alpha + 1} (\beta + y_1)^{a + \frac{b}{\alpha} - c\alpha - 1} \varphi(\beta) d\beta = 0 \qquad (a - \frac{b}{\alpha} + c\alpha + 1 > 0)$$

über. Man erhält damit die Bedingung, unter welcher jene beiden veränderlichen Grenzwerthe anwendbar sind. Das *allgemeine* Integral ist demnach:

$$z = \int_{a_1}^{\alpha_1} \int_{b_1}^{x_1} (\beta - x_1)^{a - \frac{b}{\alpha} + c\alpha} . (\beta + y_1)^{a + \frac{b}{\alpha} - c\alpha} . \varphi(\beta, \alpha) d\beta d\alpha \qquad (a - \frac{b}{\alpha} + c\alpha + 1 > 0)$$
$$+ \int_{a_2}^{\alpha_2} \int_{b_2}^{x_1} (\beta - x_1)^{a - \frac{b}{\alpha} + c\alpha} . (\beta + y_1)^{a + \frac{b}{\alpha} - c\alpha} . \psi(\beta, \alpha) d\beta d\alpha \qquad (a - \frac{b}{\alpha} - c\alpha + 1 > 0).$$

X. Transformation und allgemeines Integral der Gleichungen

$$a \frac{d^1 z}{dv^2} + a_1 \frac{d^2 z}{dv\,dw} + a_2 \frac{d^2 z}{dv\,dx} + a_3 \frac{d^2 z}{dv\,dy} + a_4 \frac{d^2 z}{dw^2} + a_5 \frac{d^2 z}{dw\,dx} + a_6 \frac{d^2 z}{dw\,dy}$$
$$+ a_7 \frac{d^2 z}{dx^2} + a_8 \frac{d^2 z}{dx\,dy} + a_9 \frac{d^2 z}{dy^2} + b \frac{dz}{dv} + b_1 \frac{dz}{dw} + b_2 \frac{dz}{dx} + b_3 \frac{dz}{dy} + cz = 0, \text{ und}$$

$$a \frac{d^2 z}{du^2} + a_1 \frac{d^2 z}{du\,dv} + a_2 \frac{d^2 z}{du\,dw} + a_2 \frac{d^2 z}{du\,dx} + a_4 \frac{d^2 z}{du\,dy} + a_5 \frac{d^2 z}{dv^2} + a_6 \frac{d^2 z}{dv\,dw} + a_7 \frac{d^2 z}{dv\,dw} + a_8 \frac{d^2 z}{dv\,dy}$$
$$+ a_9 \frac{d^2 z}{dw^2} + a_{10} \frac{d^2 z}{dw\,dx} + a_{11} \frac{d^2 z}{dw\,dy} + a_{12} \frac{d^2 z}{dx^2} + a_{13} \frac{d^2 z}{dx\,dy} + a_{14} \frac{d^2 z}{dy^2}$$
$$+ b \frac{dz}{du} + b_1 \frac{dz}{dv} + b_2 \frac{dz}{dw} + b_3 \frac{dz}{dx} + b_4 \frac{dz}{dy} + cz = 0.$$

Wenn nicht gerade $4il - k^2 = 0$ ist, so lässt sich die Gleichung

$$a \frac{d^2 z}{dv^2} + b \frac{d^2 z}{dv\,dw} + c \frac{d^2 z}{dv\,dx} + e \frac{d^2 z}{dv\,dy} + f \frac{d^2 z}{dw^2} + g \frac{d^2 z}{dw\,dx} + h \frac{d^2 z}{dw\,dy} + i \frac{d^2 z}{dx^2} + k \frac{d^2 z}{dx\,dy} + l \frac{d^2 z}{dy^2} = Z,$$

in welcher $a, b \ldots l$ irgend beständige Grössen sind, Z aber von Differentialquotienten zweiter Ordnung frei ist, durch Einführung zweier neuen Veränderlichen $y_1 = x + qy$ und $x_1 = x + py$ an die Stelle von y und x_1, jedesmal in

$$a \frac{d^2 z}{dv^2} + b \frac{d^2 z}{dv\,dw} + c \frac{d^2 z}{dv\,dx_1} + e \frac{d^2 z}{dv\,dy_1} + f \frac{d^2 z}{dw^2} + g \frac{d^2 z}{dw\,dx} + h \frac{d^2 z}{dw\,dy_1} + \frac{d^2 z}{dx_1 dy_1} = Z_1$$

verwandeln. Mit Hülfe des Gliedes $\frac{d^2 z}{dx_1 dy_1}$ lassen sich ferner alle übrigen Differentialquotienten zweiter Ordnung, in welchen die Veränderliehen y_1 und x_1 vorkommen, wegschaffen. Setzt man nämlich $w_1 = w + nx_1 + n_1 y_1$ und $v_1 = v + mx_1 + m_1 y_1$ statt w und v, so lassen sich die Beständigen m, m_1, n und n_1 so angeben, dass die Gleichung

$$a\frac{d^2z}{dv_1^2}+b\frac{d^2z}{dv_1\,dw}+f\frac{d^2z}{dw_1^2}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}=Z_2.$$

zurückbleibt. Hierdurch endlich erzielt man eine der drei Formen:

$$\frac{d^2z}{dv_2dw_2}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}=Z_3\ ,\quad \frac{d^2z}{dw^2}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}=Z_3\ ,\quad \frac{d^2z}{dx_1dy_1}=Z_2.$$

Wenn aber in der ursprünglichen Differentialgleichung gleichzeitig die sechs Beziehungen $4il-k^2=0$, $4fl-h^2=0\ldots$ Statt finden, so gelangt man zu der Gleichung $\frac{d^2z}{dy^2}=Z_1$, indem man $x_1=x+py$, $w_1=w+ny$ und $v_1=v+my$ statt x, w und v einführt.

Diese vier Formen lassen übrigens durch Vertauschen der unabhängigen Veränderlichen noch andere Transformationen zu, welche in dem Vorkommen der Differentialquotienten zweiter Ordnung keine Aenderung weiter zur Folge haben. Derartige Transformationen wurden für die drei letzten Formen schon auseinandergesetzt. Die erste Form $\frac{d^2z}{dv\,dw}+\frac{d^2z}{dx\,dy}=Z$ aber bedarf in dieser Rücksicht einer weitern Untersuchung. Setzt man an die Stelle von y, x, w und v die neuen Veränderlichen

$$\begin{aligned}
y_1 &= q\,v+q_1w+q_2x+\;y\,,\\
x_1 &= p_1v+p\,w+\;x+p_2y\,,\\
w_1 &= n_2v+\;w+n_1x+ny\,,\\
v_1 &= \;v+m_2w+mx+m_1y,
\end{aligned}$$

so ist leicht zu sehen, dass in der neuen Gleichung die zehn Differentialquotienten zweiter Ordnung wieder auftreten werden. Wenn man indessen von den *zwölf* Beständigen m, $m_1\ldots$, *acht* so angiebt, dass die Coefficienten der *acht* vorher fehlenden Differentialquotienten wieder verschwinden, so stimmt die neue Form, in Bezug auf das Vorkommen der Differentialquotienten zweiter Ordnung, mit der vorigen überein, obgleich die neu eingeführten Veränderlichen *vier* willkürliche Beständige enthalten. Die Annahme, dass z eine Function von y_1, x_1, w_1 und v_1 sei, giebt aber die neue Gleichung

$$\begin{aligned}
&m_2\frac{d^2z}{dv_1^2}+(m_2n_2+1)\frac{d^2z}{dv_1dw_1}+(m_2p_1+p)\frac{d^2z}{dv_1dx_1}+(m_2q+q_1)\frac{d^2z}{dv_1dy_1}+n_2\frac{d^2z}{dw_1^2}\\
&+(n_2p+p_1)\frac{d^2z}{dw_1dx_1}+(n_2q_1+q)\frac{d^2z}{dw_1dy_1}+p_1p\frac{d^2z}{dx_1^2}+(p_1q_1+pq)\frac{d^2z}{dx_1dy_1}+q_1q\frac{d^2z}{dy_2^2}\\
&+m_1m\frac{d^2z}{dv_1^2}+(m_1n_1+mn)\frac{d^2z}{dv_1dw_1}+(mp_2+m_1)\frac{d^2z}{dv_1dx_1}+(m_1q_2+m)\frac{d^2z}{dv_1dy_1}+n_1n\frac{d^2z}{dw_1^2}\\
&+(n_1p_2+n)\frac{d^2z}{dw_1dx_1}+(nq_2+n_1)\frac{d^2z}{dw_1dy_1}+p_2\frac{d^2z}{dx_1^2}+(p_2q_2+1)\frac{d^2z}{dx_1dy_1}+q_2\frac{d^2z}{dy_1^2}=Z_1.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen die Beständigen m_2, n_2, p_2 und q_2 aus

$$m_2 + m_1 m = 0 \quad , \quad n_2 + n_1 n = 0 \quad , \quad p_2 + p_1 p = 0 \quad , \quad q_2 + q_1 q = 0;$$

dann bleibt, wenn man zugleich nach Differentialquotienten von z ordnet:

$$(m_1 n_1 + 1)(mn + 1)\frac{d^2z}{dv_1 dw_1} - (m_1 + p)(mp_1 - 1)\frac{d^2z}{dv_1 dx_1} - (m + q_1)(m_1 q - 1)\frac{d^2z}{dv_1 dy_1}$$

$$- (n + p_1)(n_1 p - 1)\frac{d^2z}{dw_1 dx_1} - (n_1 + q)(nq_1 - 1)\frac{d^2z}{dw_1 dy_1} - (p_1 q_1 + 1)(pq + 1)\frac{d^2z}{dx_1 dy_1} - Z_1.$$

Wir bestimmen ferner die Beständigen m_1, n_1, p_1 und q_1 aus

$$m_1 + p = 0 \quad , \quad m + q_1 = 0 \quad , \quad n + p_1 = 0 \quad , \quad n_1 + q = 0,$$

und gelangen dadurch zu der Gleichung

$$\frac{d^2z}{dv_1 dw_1} + \frac{d^2z}{dx_1 dy_1} = \frac{Z_1}{(mn + 1)(pq + 1)}.$$

Die neu eingeführten Veränderlichen sind alsdann:

$$\begin{aligned}
y_1 &= + qv - mw + mqx + y = q(v + mx) - mw + y, \\
x_1 &= - nv + pw + x + npy = - nv + x + p(w + ny), \\
w_1 &= nqv + w - qx + ny = q(nv - x) + w + ny, \\
v_1 &= + v + mpw + mx - py = v + mx + p(mw - y,
\end{aligned}$$

Nachdem die Form der Differentialgleichung in Rücksicht auf die Differentialquotienten zweiter Ordnung möglichst vereinfacht ist, schreite man zur Vereinfachung der in Z vorkommenden Glieder. Ausser denjenigen Vertauschungen der unabhängigen Veränderlichen, durch welche das Vorkommen der Differentialquotienten zweiter Ordnung keine Aenderung mehr erleidet, benutze man in dieser Absicht weiter die Vertauschung der abhängigen Veränderlichen z. Man setze nämlich $z = uz_1$, wo u eine bestimmte Function von y, x, w und v ist.

Wenn man in den Formen

1. $\frac{d^2z}{dvdw} + \frac{d^2z}{dxdy} = Z,$ 2. $\frac{d^2z}{dw^2} + \frac{d^2z}{dxdy} = Z,$

3. $\frac{d^2z}{dxdy} = Z,$ 4. $\frac{d^2z}{dy^2} = Z,$

welche auf die allgemeinste lineare Differentialgleichung mit *fünf* Veränderlichen und beständigen Coefficienten zurückführt, die erstere Transformations-Art benutzt, so lassen sich die neuen unabhängigen Veränderlichen dergestalt angeben, dass in der Form (4) überhaupt nur *drei* Veränderliche, und in der Form (3) überhaupt nur *vier* Veränderliche bleiben. Wenn man aber $z = e^{mv+nw+px+qy} . z_1$ setzt, so erhält man aus den Formen (1 und 2), durch angemessene Bestimmung der Exponenten m, n, p und q, jedenfalls eine der beiden neuen Formen

$$(a).\quad \frac{d^2z_1}{dvdw}+\frac{d^2z}{dxdy}=az_1 \qquad \text{und} \qquad (b).\quad \frac{d^2z_1}{dw^2}+\frac{d^2z_1}{dxdy}-4a\frac{dz_1}{dv}=0.$$

Es wäre überflüssig, diese verschiedenen Transformationen hier auch für die allgemeinste lineare Differentialgleichung mit *sechs* Veränderlichen und beständigen Coefficienten zu verfolgen. Es ergeben sich aus der Analogie die beiden neuen Formen

$$(c)\quad \frac{d^2z}{du^2}+\frac{d^2z}{dvdw}+\frac{d^2z}{dxdy}-a\frac{dz}{du}=0 \qquad \text{und} \qquad (d).\quad \frac{d^2z}{dvdw}+\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{dz}{du}=0.$$

Das *allgemeine* Integral irgend einer linearen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung mit fünf Veränderlichen hat die Form

$$z=\int_{a_1}^{\alpha_1} z_1\,d\alpha+\int_{a_2}^{\alpha_2} z_2 d\alpha,$$

wo z_1 und z_2 besondre Integrale der Differentialgleichung sind, die ausser einer willkürlichen Beständigen α eine willkürliche Function von α und zwei veränderliche Grössen β und γ enthalten. Die Integrationen stellt man sich zwischen zwei Grenzen vor, von denen die eine als bestimmte Function der unabhängigen Veränderlichen, die andere als willkürliche Beständige anzusehen ist.

Die vorhin angeführten Gleichungen (a und b) führen auf andere lineare Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung mit beständigen Coefficienten und nur drei *Veränderlichen*, deren allgemeines Integral zugleich die verlangten besondern Integrale $z=z_1$ und $z=z_2$ darstellt. Diese besondern Integrale zeigen sich deshalb als einfache *bestimmte* Integrale, und das *allgemeine* Integral der beiden Gleichungen tritt als *bestimmtes* Doppel-Integral auf.

1. Es sei $\frac{d^2z}{dw^2}+\frac{d^2z}{dx\,dy}-4\frac{dz}{dv}=0.$ $\qquad$ (b.)

Wir stellen uns das besondre Integral als Function von $x_1=aw+x-a^2y$, $w_1=w-2ay$ und v vor, setzen deshalb

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dx_1}, \qquad \frac{d^2z}{dxdy}=-2a\frac{d^2z}{dw_1dx_1}-a^2\frac{d^2z}{dx_1^2},$$

$$\frac{dz}{dw}=\frac{dz}{dw_1}+a\frac{dz}{dx_1}, \qquad \frac{d^2z}{dw^2}=\frac{d^2z}{dw_1^2}+2a\frac{d^2z}{dw_1dx_1}+a^2\frac{d^2z}{dx_1^2},$$

und gelangen auf diesem Wege zu der Gleichung

$$\frac{d^2z}{dw_1^2}-4\frac{dz}{dv}=0.$$

Für diese wurde früher

$$z=\int_{b_1}^{v-i} e^{\frac{w_1^2}{\beta-v}}(\beta-v)^{-\frac{1}{2}}.\varphi(x,\beta)d\beta$$

gefunden. Zur Bestimmung der veränderlichen Grenzwerthe α ist die Gleichung

$$(\beta).\quad 2\frac{dz}{dw}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dx}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}+\frac{dz}{d\alpha}\left[\left(\frac{d\alpha}{dw}\right)^2+\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\right]+z\left(\frac{d^2\alpha}{dw^2}+\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}-4\frac{d\alpha}{dv}\right)=0$$

vorhanden, welche, wenn man sogleich $\left(\frac{d\alpha}{dw}\right)^2+\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}=0$ (β_1) setzt und wie oben z als Function von x_1, w_1 und v betrachtet, in

$$(\beta_2)\quad \frac{dz}{dw_1}\left(2\frac{d\alpha}{dw}-2\alpha\frac{d\alpha}{dx}\right)+\frac{dz}{dx_1}\left(2\alpha\frac{d\alpha}{dw}-\alpha^2\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\right)+z\left(\frac{d^2\alpha}{dw^2}+\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}-4\frac{d\alpha}{dv}\right)=0$$

übergeht. Es wird aber sowohl dieser Gleichung als auch der Gleichung (β_1) genügt, wenn man α aus $\alpha w+\alpha^2 y=x_1=0$ bestimmt, also der beiden Werthe

$$\alpha_1=\frac{w+\sqrt{(w^2+4xy)}}{2y}\qquad\qquad \alpha_2=\frac{w-\sqrt{(w^2+4xy)}}{2y}$$

sich bedient. Das *allgemeine* Integral ist demnach:

$$z=\int_{a_1}^{\alpha_1}\int_{b_1}^{v-i} e^{\frac{(w-2\alpha y)^2}{\beta-v}}(\beta-v)^{-\frac{1}{2}}.\varphi(\alpha w+x-\alpha^2 y,\ \beta,\ \alpha)d\beta d\alpha$$
$$+\int_{a_2}^{\alpha_2}\int_{b_2}^{v-i} e^{\frac{(w-2\alpha y)^2}{\beta-v}}(\beta-v)^{-\frac{1}{2}}.\psi(\alpha w+x-\alpha^2 y,\ \beta,\ \alpha)d\beta d\alpha.$$

2. Es sei weiter $\frac{d^2z}{dv\,dw}+\frac{d^2z}{dx\,dy}=az.$ $\quad(a.)$

Stellt man sich das besondre Integral als Function von $x_1=-\alpha w+x$, w und $v_1=v+\alpha y$ vor, so dass also

$$\frac{d^2z}{dv\,dw}=\frac{d^2z}{dv_1\,dw}-\alpha\frac{d^2z}{dv_1\,dx_1},\qquad \frac{d^2z}{dx\,dy}=\alpha\frac{d^2z}{dv_1\,dx_1},$$

ist, so bleibt die einfachere Gleichung

$$\frac{d^2z}{dv_1\,dw}=az$$

übrig. Deren Integration lieferte oben von z den Werth

$$z=\int_{b_1}^{v_1}\frac{\cos 2\sqrt{[aw(\beta-v_1)]}}{\sqrt{[\beta-v_1]}}\cdot\varphi(x,\ \beta)d\beta,$$

und für den Fall $a=0$, den einfacheren Werth $z=\varphi(x_1,\ v_1)$.

Zur Herleitung der veränderlichen Grenzwerthe α hat man:

$$(\alpha).\quad \frac{dz}{dw}\cdot\frac{d\alpha}{dv}+\frac{dz}{dv}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dx}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}+\frac{dz}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dv}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\right)+z\left(\frac{d^2\alpha}{dv\,dw}+\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}\right)=0.$$

Man setze sogleich $\frac{d\alpha}{dv}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}=0$; (α_1) betrachte ausserdem z auch hier als Function von x_1 w und v_1, und verwandele dadurch die Gleichung (α) in

$$(\alpha_2)\qquad \frac{dz}{dw}\cdot\frac{d\alpha}{dv}+\frac{dz}{dv_1}\left(\frac{d\alpha}{dw}+\alpha\frac{d\alpha}{dx}\right)+\frac{dz}{dx_1}\left(-\alpha\frac{d\alpha}{dv}+\frac{d\alpha}{dy}\right)+z\left(\frac{d^2\alpha}{dvdw}+\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right)=0.$$

Den Gleichungen (α_1 und α_2) genügt man gleichzeitig durch $-\alpha w+x=x_1=0$, oder durch $\alpha=\frac{x}{w}$.

Wegen der Symmetrie der Differentialgleichung in Bezug auf w und v erhält man ein zweites besondres Integral aus dem ersten durch gegenseitiges Vertauschen dieser Veränderlichen. So ergiebt sich:

$$z=\int_{b_2}^{w_1}\frac{\cos 2\sqrt{[av(\beta-w_1)]}}{\sqrt{[\beta-w_1]}}\cdot\psi(x_1,\beta)d\beta,$$

und wenn $a=0$ ist, das einfachere $z=\psi(x_1,w_1)$; wo $x_1=-\alpha v+x$ und $w_1=w+\alpha y$ zu setzen ist. Der zugehörige Grenzwerth α wird aus $-\alpha v+x=x_1=0$ abgeleitet.

Man gelangt demnach zu dem *allgemeinen* Integrale

$$z=\int_{b_1}^{\frac{x}{w}}\int_{b_1}^{v_1}\frac{\cos 2\sqrt{[aw(\beta-v_1)]}}{\sqrt{[\beta-v_1]}}\cdot\varphi(\alpha w-x,\beta,\alpha)d\beta d\alpha$$
$$+\int_{a_2}^{\frac{x}{w}}\int_{b_2}^{w_1}\frac{\cos 2\sqrt{[av(\beta-w_1)]}}{\sqrt{[\beta-w_1]}}\cdot\psi(\alpha v-x,\beta,\alpha)d\beta d\alpha,$$

welches für den Fall $a=0$ sich einfacher gestaltet als:

$$z=\int_{a_1}^{\frac{x}{w}}\varphi(\alpha w+x,v+\alpha y,\alpha)d\alpha+\int_{a_2}^{\frac{x}{v}}\psi(\alpha v-x,w+\alpha y,\alpha)d\alpha.$$

Das *allgemeine* Integral irgend einer linearen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung mit *sechs* Veränderlichen ist:

$$z=\int_{a_1}^{\alpha_1}z_1d\alpha+\int_{a_2}^{\alpha_2}z_2d\alpha,$$

wo z_1 und z_2 *besondre* Integrale der Differentialgleichung sind, welche ausser einer willkürlichen Beständigen α noch eine willkürliche Function von α und *drei* veränderliche Grössen β, γ und δ aufnehmen, und wo die Integrationsgrenzen α_1 und α_2 als Functionen der unabhängigen Veränderlichen angenommen werden, während a_1 und a_2 als willkürliche Beständige anzusehen sind.

Die Gleichungen (*c* und *d*) führen jede auf eine andere lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit beständigen Coefficienten und mit nur *vier* Veränderlichen, deren allgemeines Integral zugleich die verlangten besondern Integrale $z=z_1$ und $z=z_2$ darstellt. Dieselben erscheinen deshalb als einfache bestimmte Integrale, und das allgemeine Integral jener beiden Gleichungen tritt als *bestimmtes* Doppel-Integral auf.

3. Es sei $\frac{d^2z}{dv\,dw}+\frac{d^2z}{dx\,dy}+\frac{dz}{du}=0.$ (d.)

Wir betrachten das besondre Integral als Function von $x_1=-\alpha w+x$, w, $v_1=v+\alpha y$ und u; setzen also wieder

$$\frac{d^2z}{dv\,dw}=\frac{d^2z}{dv_1\,dw}-\alpha\frac{d^2z}{dv_1dx_1}, \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy}=\alpha\frac{d^2z}{dv_1dx_1},$$

und erhalten so die neue Gleichung

$$\frac{d^2z}{dv_1dw}+\frac{dz}{du}=0.$$

Für diese wurde oben die Integralform

$$z=\int_{b_1}^{\frac{v_1}{u}}e^{\beta w}.\varphi(\beta u-v_1\;,\;x_1\;,\;\beta)d\beta$$

gefunden. Zur Bestimmung der veränderlichen Grenzwerthe α findet die Gleichung

$$\frac{dz}{dw}\cdot\frac{d\alpha}{dv}+\frac{dz}{dv}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dx}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}+\frac{dz}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dv}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\right)$$
$$+z\left(\frac{d^2\alpha}{dv\,dw}+\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}+\frac{d\alpha}{du}\right)=0 \qquad (\alpha.)$$

Statt. Man setze $\frac{d\alpha}{dv}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}=0$ (α_1), und betrachte ausserdem z, wie vorhin, als Function von x_1, w, v_1 und u; dann gelangt man zu der Gleichung

$$\frac{dz}{dw}\cdot\frac{d\alpha}{dv}+\frac{dz}{dv_1}\left(\frac{d\alpha}{dw}+\alpha\frac{d\alpha}{dx}\right)+\frac{dz}{dx_1}\left(-\alpha\frac{d\alpha}{dv}+\frac{d\alpha}{dy}\right)+z\left(\frac{d^2\alpha}{dv\,dw}+\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}+\frac{d\alpha}{du}\right)=0. \;(\alpha_2).$$

Den Gleichungen (α_1 und α_2) genügt man durch $-\alpha w+x=x_1=0$, oder durch $\alpha=\frac{x}{w}$.

Die Symmetrie der Differentialgleichung in Bezug auf die beiden Veränderlichen w und v giebt auch hier wieder ein zweites besondres Integral, nämlich:

$$e=\int_{b_2}^{\frac{w_1}{u}}e^{\beta v}.\psi(\beta u-w_1\;,\;x_1\;,\;\beta)d\beta,$$

worin $x_1=-\alpha v+x$ und $w_1=w+\alpha y$ zu setzen ist; und alsdann der zugehörige Grenzwerth $\alpha=\frac{x}{v}$.

Das allgemeine Integral zeigt sich demnach in der Form

$$z=\int_{a_1}^{\frac{x}{w}}\int_{b_1}^{\frac{v_1}{u}}e^{\beta w}.\varphi\beta(u-v_1\;,\;\alpha w-x\;,\;\beta\;,\;\alpha)\,d\beta\,d\alpha$$
$$+\int_{a_2}^{\frac{x}{v}}\int_{b_2}^{\frac{w_1}{u}}e^{\beta v}.\psi(\beta u-w_1\;,\;\alpha v-x\;,\;\beta\;,\;\alpha)\,d\beta\,d\alpha.$$

4. Es sei endlich $\frac{d^2z}{du^2}+\frac{d^2z}{dv\,dw}+\frac{d^2z}{dx\,dy}-a\frac{dz}{du}=0.$ (c.)

Auch hier nehmen wir das besondre Integral als Function von $x_1=-aw+x$, w, $v_1=v+ay$ und u an, und gelangen dadurch zu der Gleichung

$$\frac{d^2z}{du^2}+\frac{d^2z}{dv_1dw}-a\frac{dz}{du}=0.$$

Für diese wurde oben die Integralform

$$z=\int_{b_1}^{\beta}e^{a\beta w}.\varphi(\beta u+v_1-\beta^2 w\ ,\ x_1\,,\ \beta)d\beta$$

gebildet, deren Grenzwerth β aus $\beta u+v_1-\beta^2 w=0$ zu berechnen ist, so dass also jeder der beiden Werthe

$$\beta_1=\frac{u+\sqrt{(u^2+4v_1w)}}{2w}\qquad\text{und }\beta_2=\frac{u-\sqrt{(u^2+4v_1w)}}{2w}$$

genommen werden kann. Zur Bestimmung der veränderlichen Grenzwerthe α hat man:

$$2\frac{dz}{du}\cdot\frac{d\alpha}{du}+\frac{dz}{dw}\cdot\frac{d\alpha}{dv}+\frac{dz}{dv}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dx}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}+\frac{dz}{d\alpha}\left[\left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2+\frac{d\alpha}{dv}\cdot\frac{d\alpha}{dw}+\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\right]$$
$$+z\cdot\left(\frac{d^2\alpha}{du^2}+\frac{d^2\alpha}{dv\,dw}+\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}-a\frac{d\alpha}{du}\right)=0.\quad(\beta.)$$

Man lasse den gemeinsamen Factor von $\frac{dz}{d\alpha}$ verschwinden, und setze ausserdem z als Function von x_1, w, v_1 und u hinein, so bleibt:

$$2\frac{dz}{du}\cdot\frac{d\alpha}{du}+\frac{dz}{dw}\cdot\frac{d\alpha}{dv}+\frac{dz}{dv_1}\left(\frac{d\alpha}{dw}+a\frac{d\alpha}{dx}\right)+\frac{dz}{dx_1}\left(-a\frac{d\alpha}{dv}+\frac{d\alpha}{dy}\right)$$
$$+z\left(\frac{d^2\alpha}{du^2}+\frac{d^2\alpha}{dv\,dw}+\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}-a\frac{d\alpha}{du}\right)=0.\qquad(\beta_2.)$$

Den beiden so entstehenden Gleichungen (β_1 und β_2) wird durch $-aw+x=x_1=0$, oder durch $\alpha=\frac{x}{w}$ genügt, und man erhält deshalb das *allgemeine* Integral

$$z=\int_{a_1}^{\frac{x}{w}}\int_{b_1}^{\beta_1}e^{a\beta w}.\varphi(\beta u+v_1-\beta^2 w\ ,\ aw-x\ ,\ \beta\ ,\ \alpha)d\beta\,d\alpha$$
$$+\int_{a_2}^{\frac{x}{w}}\int_{b_2}^{\beta_2}e^{a\beta w}.\psi(\beta u+v_1-\beta^2 w\ ,\ aw-x\ ,\ \beta\ ,\ \alpha)\alpha\beta\,d\alpha.$$

Mannheim, im December 1854.

Anhang.

Ueber eine besondere Classe linearer Differentialgleichungen von der n^{ten} Ordnung.

In jeder *linearen Differentialgleichung* lässt sich dasjenige Glied, in welchem weder die abhängige Veränderliche z, noch deren Differentialquotienten vorkommen, zum Verschwinden bringen, wenn man die Veränderliche z mit einer andern z_1 vertauscht. Wenn nämlich $z = z_0$ ein *besonderes* Integral der vorliegenden linearen Differentialgleichung ist, und $z = z_1 + z$ gesetzt wird, so unterscheidet sich die neue Gleichung von der ursprünglichen nur dadurch, dass die von der abhängigen Veränderlichen und deren Differentialquotienten unabhängigen Glieder fehlen Man nennt eine solche lineare Differentialgleichung eine *reducirte.*

Das *allgemeine* Integral der *reducirten* linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit zwei Veränderlichen z und y hat die Form

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots\cdots + c_n z_n,$$

wo z_1, $z_2 .. z_n$ *besondre* Integrale, die Factoren $c_1, c_2 .. c$ aber *willkürliche Beständige* oder von y unabhängige Grössen sind.

Das *allgemeine* Integral der reducirten linearen Differentialgleiehung von der n^{ten} Ordnung mit *drei* Veränderlichen z, y und x hat die Form

$$z = \int_{a_1}^{\alpha_1} z_1 \varphi_1(\alpha) d\alpha + \int_{a_2}^{\alpha_2} z_2 \varphi_2(\alpha) d\alpha + \cdots\cdots + \int_{a_n}^{\alpha_n} z_n \varphi_n(\alpha) d\alpha;$$

wo z_1, $z_2 .. z_n$ *besondre* Integrale, und φ_1, $\varphi_2 .. \varphi_n$ *willkürliche* Functionen bezeichnen. Die Integrationsgrenzen $\alpha_1, \alpha_2 .. \alpha_n$ stellt man sich als bestimmte Functionen der unabhängigen Veränderlichen y und x vor, während die Integrationsgrenzen a_1, $a_2 .. a_n$ willkürliche Beständige oder von y und x unabhängige Grössen sind.

Das *allgemeine* Integral der reducirten linearen Differentialgleichung von der n^{ten} Ordnung mit *vier* Veränderlichen z, y, x und w hat die Form

$$z = \int_{p_1}^{\alpha_1} z_1 d\alpha + \int_{a_2}^{\alpha_2} z_2 d\alpha + \cdots\cdots + \int_{a_n}^{\alpha_n} z_n d\alpha;$$

wo z_1, $z_2 .. z_n$ wieder besondre Integrale bezeichnen, von denen aber jedes eine willkürliche Function einer veränderlichen Grösse, und deshalb auch einer will-

kürlichen Beständigen α einschliesst. Die Integrationsgrenzen α_1, $\alpha_2 .. \alpha_n$ werden wieder als bestimmte Functionen der unabhängigen Veränderlichen y, x und ϖ angenommen, während die Integrationsgrenzen a_1, $a_2 .. a_n$ willkürliche Beständige sind.

Im Allgemeinen aber lässt sich sagen, dass das allgemeine Integral der reducirten linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit p unabhängigen Veränderlichen, aus n Gliedern besteht, deren jedes eine willkürliche Function von $p-1$ veränderlichen Grössen ausdrückt, und zugleich einzeln, an der Stelle von z, die Differentialgleichung befriedigt.

Ich bin weit entfernt, die bei der Integration der linearen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung benutzten Methoden jetzt auch auf lineare Differentialgleichungen *höherer* Ordnung übertragen zu wollen; noch weniger beabsichtige ich, in diesem Anhange weitere Methoden zur Integration solcher linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung aufzustellen, zu welchen die vorhin erwähnten Methoden nicht mehr ausreichen. Das Erstere betreffend, möchte es keine Schwierigkeit haben, eine vorliegende lineare Differentialgleichung höherer Ordnung nach den jetzt bekannten Methoden zu integriren, insofern es überhaupt geschehen kann. In dieser Rücksicht wäre also eine Zusammenstellung derartiger Integrationen nur von geringem Interesse. Das Andre, nämlich die Aufstellung neuer Methoden für solche Fälle, in welchen die bisherigen sich als unzureichend erweisen, setzt allerdings jene erste Arbeit voraus. Doch scheint mir die Unternehmung, ihrer Grösse wegen, angemessener einer spätern Zeit überlassen zu bleiben, welche mehr Vorarbeiten dazu darbietet. Ich gedenke hier nur noch zu zeigen, wie man für eine *besondre Classe* linearer Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung zu denjenigen Resultaten, welche auch aus den jetzt bekannten Methoden gezogen werden könnten, vortheilhafter auf einem andern Wege gelangt. Dieser Gegenstand scheint mir grade hier am passenden Orte, weil einige allgemeine Betrachtungen und eine bloss algebraische Rechnung uns in den Stand setzen, das allgemeine Integral einer in jene Classe gehörigen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung durch die Summe der allgemeinen Integrale mehrerer linearen Differentialgleichungen von der *zweiten* Ordnung auszudrücken.

Unter dem *ersten* Integrale irgend einer partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit p unabhängigen Veränderlichen versteht man bekanntlich diejenige Differentialgleichung von der $n-1^{ten}$ Ordnung, aus welcher sich durch Differentiation die erstere Gleichung ableiten lässt, und welche zugleich eine willkürliche Function von $p-1$ veränderlichen Grössen enthält. Ein *erstes* Integral

ist deshalb immer nur dann möglich, wenn die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung als Differentialgleichung von der ersten Ordnung gesetzt werden kann, in welcher als abhängige Veränderliche eine Function sich zeigt, die, gleich Null gesetzt, selbst eine Differentialgleichung von der $n-1^{ten}$ Ordnung vorstellt. Unter dem m^{ten} Integrale einer partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit p unabhängigen Veränderlichen versteht man diejenige Differentialgleichung von der $n-m^{ten}$ Ordnung, aus welcher sich durch Differentiation die erstere Gleichung ableiten lässt, und welche zugleich m willkürliche Functionen, jede von $p-1$ veränderlichen Grössen, enthält. Ein m^{tes} Integral ist deshalb immer nur dann möglich, wenn die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung als Differentialgleichung m^{ter} Ordnung geschrieben werden kann, in welcher als abhängige Veränderliche eine Function sich zeigt, die, gleich Null gesetzt, selbst eine Differentialgleichung von der $n-m^{ten}$ Ordnung vorstellt. Das Bestehen eines m^{ten} Integrals der partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $F(z)=0$ setzt also die identische Gleichung

$$(\alpha.) \qquad F(z)=\varphi[f(z)]$$

voraus, in welcher $f(z)=0$ eine Differentialgleichung $n-m^{ter}$ Ordnung, und $\varphi[f(z)]=0$ eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung ist, mit der abhängigen Veränderlichen $f(z)$. Es können übrigens gleichzeitig mehrere Integrale von derselben Ordnung auftreten. Im Ganzen sind $\frac{n(n-1)..(n+1-m)}{1.2..m}$ m^{te} Integrale denkbar; nämlich eben so viele als Combinationen zu m aus n Elementen gebildet werden können, weil das n^{te} Integral irgend m von den n willkürlichen Functionen des allgemeinen Integrals aufnimmt. Jener eigenthümliche Weg, welcher für gewisse lineare Differentialgleichungen so vortheilhaft zum allgemeinen Integrale führt, eröffnet sich aber nur in solchen Fällen, in welchen gleichzeitig mehrere Integrale derselben, oder auch von verschiedener Ordnung bestehen.

Wenn $F(z)=0$ eine *reducirte* lineare Differentialgleichung ist, so schliefsen wir aus der identischen Gleichung

$$(\alpha.) \qquad F(z)=\varphi[f(z)],$$

dass auch $f(z)=0$ und $\varphi[f(z)]=0$ *reducirte* lineare Differentialgleichungen sind. Wir schliessen weiter, dass das m^{te} Integral der Gleichung $F(z)=0$ eine lineare Differentialgleichung ist, und auf jene Gleichung $f(z)=0$ zurückführt, wenn man die m darin vorkommenden willkürlichen Functionen verschwinden lässt. Wir nennen deshalb hier die Gleichung $f(z)=0$ das *reducirte* m^{te} *Integral* der Gleichung $F(z)=0$. Das allgemeine Integral der Gleichung $f(z)=0$

besteht aber aus $n-m$ Gliedern, von denen jedes eine willkürliche Function von $p-1$ veränderlichen Grössen darstellt, und zugleich einzeln, an der Stelle von z, der Gleichung $F(z)=0$ Genüge leistet. Das *allgemeine* Integral des reducirten m^{ten} Integrals einer reducirten linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung liefert demnach $n-m$ von den n Gliedern des allgemeinen Integrals der letztern Gleichung.

Wenn $F(z)=0$ eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit beständigen Coefficienten ist, so folgt aus der identischen Gleichung

$$(\alpha.) \qquad F(z)=\varphi[f(z)],$$

dass $f(z)=0$ und $\varphi[f(z)]=0$ lineare Differentialgleichungen mit nur *beständigen* Coefficienten sind. Wenn man aber die Grösse z q mal nach u, r mal nach v, s mal nach w u.s.w. differentiirt, so entsteht jedesmal der nämliche Differentialquotient $\frac{d^{q+r+s+\dots}z}{du^q dv^r dw^s \dots}$, in welcher Reihenfolge auch jene $q+r+s+\dots$ Differentiationen geschehen mögen. Daraus folgt unmittelbar, unter der vorhin genannten Voraussetzung, dass $F(z)=0$ nur *beständige* Coefficienten aufnehme, die identische Gleichung

$$\varphi[f(z)]=f[\varphi(z)],$$

und deshalb auch eine zweite Gleichung

$$(\alpha.) \qquad F(z)=f[\varphi(z)].$$

Eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit beständigen Coefficienten, welche auf ein m^{tes} Integral zurückgeführt werden kann, hat demnach jedesmal auch ein $n-m^{tes}$ Integral.

Das allgemeine Integral des reducirten m^{ten} Integrals einer reducirten linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung liefert $n-m$ von den n Gliedern des allgemeinen Integrals der letztern Gleichung. Das allgemeine Integral des reducirten $n-m^{ten}$ Integrals liefert aber m weitre Glieder, für deren allgemeines Integral. Das allgemeine Integral einer reducirten linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit beständigen Coefficienten, welche ein m^{tes} und deshalb auch ein $n-m^{tes}$ Integral hat, wird demnach durch die Summe der beiden allgemeinen Integrale des reducirten m^{ten} und des reducirten $n-m^{ten}$ Integrals ausgedrückt.

Es hat aber keine Schwierigkeit, diese reducirten m^{ten} und $n-m^{ten}$ Integrale zu finden, wenn sie nur überhaupt vorhanden sind. Denn wenn man jeden einzelnen Differentialquotienten $\frac{d^{q+r+s+\dots}z}{du^q dv^r dw^s \dots}$ der linearen Differentialgleichung durch die Potenz $u^q v^r w^s \dots$ ersetzt, so entsteht ein *Polynom*, welches in Bezug auf die unabhängigen

Veränderlichen vom n^{ten} Grade ist. Jeder Differentiation der Differentialgleichung nach u, v, w.. entspricht aber eine Multiplication des Polynoms mit einem der Factoren u, v, w... Die reducirte lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit beständigen Coefficienten hat demnach ein m^{tes} und deshalb auch ein $n-m^{tes}$ Integral, wenn das Polynom der unabhängigen Veränderlichen in das Product zweier rationalen Polynome, beziehlich vom m^{ten} und $n-m^{ten}$ Grade, zerlegt werden kann; und man gelangt zu den beiden reducirten Integralen, indem man in jedem dieser beiden Factoren an die Stelle der Potenz $u^q v^r w^s$.. den Differentialquotienten $\frac{d^{q+r+s+\cdots} z}{du^q dv^r dw^s..}$ zurück hineinsetzt.

Da nun aus dem Früheren das allgemeine Integral jeder reducirten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit beständigen Coefficienten bekannt ist, so lässt sich, wie leicht zu sehen, jedesmal auch das allgemeine Integral einer reducirten linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit beständigen Coefficienten angeben, wenn sich das Polynom der unabhängigen Veränderlichen in das Product rationaler Polynome zerlegen lässt, welche den *zweiten* Grad nicht übersteigen. Die Zerlegung des Polynoms ist also die einzige Rechnungs-Operation, von welcher die Bestimmung des allgemeinen Integrals einer solchen linearen Differentialgleichung abhangt. Diese Rechnung soll an einigen Beispielen ausgeführt werden.

1. Es sei $\frac{d^4 z}{dy^4} - 16a^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = 0.$

Das Polynom der unabhängigen Veränderlichen ist

$$y^4 - 16a^2x^2 = 0,$$

und lässt sich in die beiden Factoren zweiten Grades:

$$y^2 - 4ax = 0 \qquad \text{und} \qquad y^2 + 4ax = 0$$

zerlegen. Die beiden reducirten zweiten Integrale sind deshalb:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} - 4a\frac{dz}{dx} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2 z}{dy^2} + 4a\frac{dz}{dx} = 0.$$

Die erstere Gleichung ist oben in der vorliegenden Form integrirt worden; die andre entsteht aus der erstern, wenn man in dieser $+a$ mit $-a$ vertauscht. Das allgemeine Integral jener linearen Differentialgleichung vierter Ordnung zeigt sich demnach in der Form

$$z = y\int_{a_1}^{x-i} e^{\frac{ay^2}{\alpha-x}}(\alpha-x)^{-\frac{3}{2}}\varphi_1(\alpha)\,d\alpha + \int_{a_2}^{x-i} e^{\frac{ay^2}{\alpha-x}}(\alpha-x)^{-\frac{1}{2}}\varphi_2(\alpha)\,d\alpha$$

$$+\,y\int_{a_3}^{x-i} e^{\frac{-ay^2}{\alpha-x}}(\alpha-x)^{-\frac{3}{2}}\varphi_3(\alpha)\,d\alpha + \int_{a_4}^{x-i} e^{\frac{-ay^2}{\alpha-x}}(\alpha-x)^{-\frac{1}{2}}\varphi_4(\alpha)\,d\alpha.$$

2. Es sei $\frac{d^4z}{dx^4}-2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}-\frac{d^2z}{dx^2}=0.$

Das Polynom der unabhängigen Veränderlichen ist

$$x^4-2x^2y^2+y^4-x^2=0,$$

und lässt sich in die beiden Factoren zweiten Grades:

$$x^2-y^2-x=0 \qquad \text{und} \qquad x^2-y^2+x=0.$$

zerlegen. Die beiden reducirten zweiten Integrale sind deshalb:

$$\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{dz}{dx}=0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{dz}{dx}=0.$$

Um dieselben auf eine der früher integrirten Gleichungen zurückzuführen, setze man zunächst in der erstern $z=e^{\frac{1}{2}x}z_1$, und in der andern $z=e^{-\frac{1}{2}x}z_2$, welches

$$\frac{d^2z_1}{dx^2}-\frac{d^2z_1}{dy^2}+\frac{z_1}{4}=0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2z_2}{dx^2}-\frac{d^2z_2}{dy^2}+\frac{z_2}{4}=0$$

giebt. Man vertausche noch die unabhängigen Veränderlichen y und x gegen die neuen $y_1=\frac{1}{2}(x+y)$ und $x_1=\frac{1}{2}(-x+y)$, dann ergeben sich die neuen Gleichungen

$$\frac{d^2z_1}{dx_1dy}-\frac{z_1}{4}=0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2z_2}{dx_1dy_1}-\frac{z_2}{4}=0.$$

Das allgemeine Integral der obigen linearen Differentialgleichung vierter Ordnung zeigt sich demnach in der Form

$$z=e^{+\frac{1}{2}x}\left(\int_{a_1}^{x_1}\frac{\cos\sqrt{[y_1(\alpha-x_1)]}}{\sqrt{(\alpha-x_1)}}\varphi_1(\alpha)\,d\alpha+\int_{a_2}^{y_1}\frac{\cos\sqrt{[x_1(\alpha-y_1)]}}{\sqrt{(\alpha-y_1)}}\varphi_2(\alpha)\,d\alpha\right)$$
$$+e^{-\frac{1}{2}x}\left(\int_{a_3}^{x_1}\frac{\cos\sqrt{[y_1(\alpha-x_1)]}}{\sqrt{(\alpha-x_1)}}\varphi_3(\alpha)\,d\alpha+\int_{a_4}^{y_1}\frac{\cos\sqrt{[x_1(\alpha-y_1)]}}{\sqrt{(\alpha-y_1)}}\varphi_4(\alpha)\,d\alpha\right).$$

3. Es sei $\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}-\frac{d^2z}{dw^2}=0.$

Das Polynom der unabhängigen Veränderlichen ist

$$x^4-2x^2y^2+y^4-w^2=0,$$

und zerfällt in die beiden Factoren zweiten Grades:

$$x^2-y^2-w=0 \qquad \text{und} \qquad x^2-y^2+w=0.$$

Man gelangt deshalb zu den beiden zweiten Integralformen

$$\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{dz}{dw}=0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{dz}{dw}=0.$$

Nimmt man statt y und x wieder die neuen Veränderlichen $y_1 = \frac{1}{2}(x+y)$ und $x_1 = \frac{1}{2}(-x+y)$ an, so entstehen die neuen Gleichungen

$$\frac{d^2z}{dx_1dy_1}+\frac{dz}{dw}=0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2z}{dx_1dy_1}-\frac{dz}{dw}=0.$$

Die erstere ist oben in der vorliegenden Form integrirt worden; die andre geht aus der erstern durch Vertauschen von $+x_1$ gegen $-x_1$, oder auch durch Vertauschen von $+y_1$ gegen $-y_1$ hervor. Das allgemeine Integral der obigen Differentialgleichung *vierter* Ordnung kann demnach in folgender Form geschrieben werden:

$$z=\int_{a_1}^{\frac{x_1}{w}} e^{ay_1}\varphi_1(aw-x_1\,,\ a)da+\int_{a_2}^{\frac{y_1}{w}} e^{ax_1}\varphi_2(aw-y_1\,,\ a)da$$
$$+\int_{a_3}^{\frac{x_1}{w}} e^{-ay_1}\varphi_3(aw-x_1\,,\ a)da+\int_{a_4}^{\frac{y_1}{w}} e^{-ax_1}\varphi_4(aw-y_1\,,\ a)da.$$

4. Es sei noch $\frac{d^4z}{dx^4}-2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}-\frac{d^4z}{dw^4}-2a\frac{d^3z}{dw^3}-a^2\frac{d^2z}{dw^2}=0.$

Das Polynom der unabhängigen Veränderlichen ist hier

$$x^4-2x^2y^2+y^4-w^4-2aw^3-a^2w^2=0,$$

und zerfällt in die beiden Factoren zweiten Grades:

$$w^2-x^2+y^2+aw=0 \qquad \text{und} \qquad w^2+x^2-y^2+aw=0.$$

Es bestehen deshalb die beiden zweiten Integralformen

$$\frac{d^2z}{dw^2}-\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}+a\frac{dz}{dw}=0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2z}{dw^2}+\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z}{dy^2}+a\frac{dz}{dw}=0.$$

Diese verwandeln sich, wenn man statt y und x die neuen Veränderlichen $y_1=\frac{1}{2}(x+y)$ und $x_1=\frac{1}{2}(-x+y)$ einführt, in die neuen Formen

$$\frac{d^2z}{dw^2}+\frac{d^2z}{dx_1dy_1}+a\frac{dz}{dw}=0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2z}{dw^2}-\frac{d^2z}{dx_1dy_1}+a\frac{dz}{dw}=0.$$

Die erstere ist oben in der vorliegenden Form integrirt worden; die andere geht aus der ersteren durch Vertauschen von $+x_1$ gegen $-x_1$ hervor. Man gelangt demnach zu dem folgenden allgemeinen Integral der obigen linearen Differentialgleichung *vierter* Ordnung:

$$z=\int_{a_1}^{\alpha_1} e^{aay_1}\varphi_1(aw+x_1-a^2y_1\,,\ a)da+\int_{a_2}^{\alpha_2} e^{aay_1}\varphi_2(aw+x_1-a^2y_1\,,\ a)da$$
$$+\int_{a_3}^{\alpha_3} e^{aay_1}\varphi_3(aw+x_1-a^2y_1\,,\ a)da+\int_{a_4}^{\alpha_4} e^{aay_1}\varphi_4(aw-x_1-a^2y_1\,,\ a)da,$$

wo die folgenden Grenzwerthe anzuwenden sind:

$$\alpha_1 = \frac{w + \sqrt{(w^2 + 4x_1y_1)}}{2y_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{w - \sqrt{(w^2 + 4x_1y_1)}}{2y_1},$$
$$\alpha_3 = \frac{w + \sqrt{(w^2 - 4x_1y_1}}{2y_1}, \qquad \alpha_4 = \frac{w - \sqrt{(w^2 - 4x_1y_1)}}{2y_1}.$$

Die Regel, nach welcher wir das allgemeine Integral der reducirten linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit beständigen Coefficienten bilden, wenn dieselbe ein m^{tes} und deshalb auch ein $n - m^{tes}$ Integral hat, bedarf aber einer Ergänzung, wenn das Polynom der unabhängigen Veränderlichen *gleiche* Factoren hat, weil dann von den darnach gebildeten n Gliedern des allgemeinen Integrals mehrere identisch sich gestalten.

Wenn die reducirte lineare Differentialgleichung von der $2m^{ten}$ Ordnung mit p unabhängigen Veränderlichen u, v, w ..... und beständigen Coefficienten $F(z) = 0$ auf zwei gleiche m^{te} Integrale führt, so geben die beiden reducirten m^{ten} Integrale $f(z) = 0$ offenbar nur m von den $2m$ Gliedern des allgemeinen Integrals der ersten Gleichung. Es lässt sich leicht nachweisen, dass diese Gleichung $F(z) = 0$, wenn man das allgemeine Integral der Gleichung $f(z) = 0$ durch $z = z_2$ bezeichnet, dann auch durch $z = (ku + k_1v + k_2w + \ldots)z_1$ befriedigt wird, wo k, k_1, k_2 ..... willkürliche Beständige sind, der Factor z_1 aber nur dadurch von z_2 sich unterscheidet, dass darin m andere willkürliche Functionen angenommen werden. Denn unter der Voraussetzung zweier gleichen m^{ten} Integrale findet die identische Gleichung

$$(\alpha). \qquad F(z) = f[f(z)]$$

Statt. Aus der Annahme $z = (ku + k_1v + k_2w + \ldots)z_1$ folgt aber die identische Gleichung

$$f[(ku + k_1v + k_2w + \ldots)z_1] = \varphi(z_1) + (ku + k_1v + k_2w + \ldots)f(z_1),$$

oder, weil $f(z_1) = 0$ ist, die einfachere:

$$f[(ku + k_1v + k_2w + \ldots)v_1] = \varphi(z_1);$$

wo $\varphi(z_1)$ eine Function bezeichnet, die, gleich Null gesetzt, selbst eine reducirte lineare Differentialgleichung mit nur beständigen Coefficienten vorstellt. Die Annahme $z = (ku + k_1v + k_2w \ldots)z_1$ bringt deshalb jene Gleichung (α) auf:

$$F[(ku + k_1v + k_2w + \ldots)z] = f[\varphi(z_1)]$$

Da nun $z = z_1$ der Gleichung $f(z) = 0$ genügt, so genügt ihr auch $z = \frac{d^{q+r+s+\ldots}z}{du^q dv^r dw^s \ldots}$,

weil man zu der Gleichung $f\left(\frac{d^{q+r+s+\cdots}z}{du^q dv^r dw^s \ldots}\right) = 0$ gelangt, wenn man jene Gleichung $f(v) = 0$ $q$mal nach u, $r$mal nach v, $s$mal nach w u. s. w. differentiirt. Ebenso genügt der Gleichung $f(z) = 0$ auch $z = \varphi(z)$, weil $\varphi(z) = 0$ eine reducirte lineare Differentialgleichung mit nur beständigen Coefficienten vorstellt. Da also $f[\varphi(z_1)] = 0$ ist, so bleibt die identische Gleichung

$$F[(ku + k_1 v + k_2 w + \cdots\cdots)z_1] = 0;$$

woraus hervorgeht, dass jener Werth $z = (ku + k_1 v + k_2 w + \cdots\cdots)z_1$ in der That die Gleichung $F(z) = 0$ befriedigt. Das allgemeine Integral der reducirten linearen Differentialgleichung $2m^{ter}$ Ordnung mit p unabhängigen Veränderlichen $u, v, w \cdots\cdots$ und beständigen Coefficienten, welche auf zwei gleiche m^{te} Integrale führt, zeigt sich demnach, wenn man das allgemeine Integral des reducirten m^{ten} Integrals durch $z = z_2$ bezeichnet, in der Form:

$$z = (ku + k_1 v + k_2 w + \cdots\cdots)z_1 + z_2';$$

wo k, k_1, $k_2 \cdots\cdots$ willkürliche Beständige sind, der Factor z_1 aber nur dadurch von z_2 sich unterscheidet, dass darin m andere willkürliche Functionen angenommen werden.

Wenn die reducirte lineare Differentialgleichung von der $3m^{ten}$ Ordnung mit p unabhängigen Veränderlichen $u, v, w \cdots\cdots$, und beständigen Coefficienten, auf drei gleiche m^{te} Integrale führt, so geben die drei reducirten m^{ten} Integrale nur m von den $3m$ Gliedern des allgemeinen Integrals der ersten Gleichung. Wenn aber $z = z_3$ das allgemeine Integral des reducirten m^{ten} Integrals ist, so folgt wie vorhin, dass das allgemeine Integral jener Gleichung in der Form

$$z = (hu^2 + h_1 v + h_2 v^2 + h_3 uw + h_4 vw + h_5 w^2 + \cdots\cdots)z_1 + (ku + k_1 v + k_2 w \cdots\cdots)z_2 + z_3$$

dargestellt werden kann, wo h, h_1, $h_2 \cdots\cdots k$, k_1, $k_2 \cdots\cdots$ willkürliche Beständige sind, die Factoren z_2 und z_1 aber nur dadurch von z_3 sich unterscheiden, dass darin m andere willkürliche Functionen angenommen werden.

Mannheim, im December 1854.

Berichtigungen im 1. Heft 51. Bandes.

Seite 3 Zeile 14 v. u., lies $[u, + x]^y$ statt $[u + x]^y$.

- 4 - 2 - - *also* statt *aber*.

- 6 Formel (5). - $f(w, 1, u - w)$ statt $f(w, 1, u)$.

- 6 Zeile 6 v. o., - *die letztern* statt dieselben.

- 8 - 2 - - $\frac{1}{u} \cdot \frac{u+n}{n}$ statt $\frac{1}{1}u \frac{u+n}{n}$.

- 8 - 4 - - $n = + \infty$ - $n + \infty$.

- 8 Formel (8). - $u\,Fc(u+1)$ - $Fc(u+1)$.

- 9 Formel (16). - $\lim\limits_{n=\infty}$ statt $\lim\limits_{n-\infty}$.

- 11 Zeile 5 v. o., muss statt des *Punctes* hinter $\frac{Fc\left(\frac{u}{a}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x} + y\right)}$ ein *Comma* stehn.

- 11 - 4 v. u., fehlt (10) hinter *Formel*.

- 13 - 4 - l. $(u, + x)^y$ statt $(u + x)^y$.

- 13 - 11 - fehlt $\varphi(u)$ hinter *Function*.

- 14 - 13 v. o., l. *wenn* x in $-x$ st. $-x$ in x.

- 18 - 15 - - *echte Brüche* statt *reelle Grössen*.

- 19 - 15 - - Q_n st. P_n.

- 19 - 18 - - P_n st. Q_n.

- 22 - 8 v. u., - n^3 st. n_3 und n^2 st. n_2.

- 23 - 10 - muss es heissen: *für alle Grössen, von einer bestimmten an.*

- 23 - 11 - l. *diese* st. *die*.

- 23 - 2 - - u_n st. u^n.

- 28 - 12 v. u., - n^2 st. n_2.

- 29 No. II. muss es heissen: Wenn ..... mag, nähert sich jedoch keiner bestimmten Gränze, wenn ..... ist; und divergirt .....

- 30 Zeile 7 v. u., l. $t^1{}_1$ st. $1^1{}_1$.

- 31 - 2 - - $P_n\, x^{n+1}$ st. $P_n\, x^{-1}$.

- 33 Formel (44) l. n^{-u} st. n^{n-u} u. $\left(1 + \frac{u}{n-1}\right)$ st. $\left(\frac{u}{n-1}\right)$.

- 34 Zeile 2 v. o., l. *diese* st. *die*.

- 34 - 8 - muss es heissen: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{F\left(\frac{u}{x} + n\right)}{F\left(\frac{u}{x} + y + n\right)} = \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x} + y\right)}$.

- 34 - 11 - l. $Fc\left(\frac{u}{x}\right)$ statt $Fc\left(\frac{n}{x}\right)$.

- 34 - 6 v. u., l. (48) st. (46).

- 36 in No. II. muss es heissen: Es giebt ..... *Function, welche der Gleichung*
(57) ....,
in der sich ..... ist, genügt; und zugleich die in der Formel
(58) ....,
..... *bedeutet, ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Ihr allgemeiner Ausdruck ist* .....

- 37 Zeile 6 und 7 v. u., ist nach *folgt* zu lesen: *mittels der andern* (58) *unmittelbar zu dem Ausdrucke von* $(u, + x)^y$ *durch das unendliche Product* (66) *führt, dessen* .....

- 40 - 1 u. 4 v. u. lies ξ_0 statt ζ_0.

- 41 - 2, 3, 6 v. o. - ξ - ζ.

- 44 - 3 v. o. gehört $\alpha = 0 \ldots\ldots \infty$ unter $\Sigma a_\alpha x^\alpha$.

- 44 - 1 v. u. muss unter dem ersten Producte $\alpha = m \ldots\ldots \infty$ stehen.

- 45 - 5 v. o. lies $\varphi_\alpha(u)$ statt $\varphi^\alpha(u)$.

- 45 - 8 - - $\psi_\alpha(u)$ - $\psi_a(u)$.

- 45 - 1 - muss unter dem ersten Product $\alpha = 0 \ldots\ldots \infty$ statt $a = \ldots\ldots$ stehen.

- 46 - 4 v. u. lies *auch nur* statt *auch, und.*

- 48 - 13 - - $Fc^\nu(u + y)$ - $Fc(u^\nu + y)$.

- 52 - 3 v. o. fehlt *daher* (noch *hat*).

- 57 Formel (98) lies $\Delta^{n-1} \log u$ statt $\Delta^{-1} \log u$.

- 58 Zeile 9 v. o. - *Functionen* - Function.

- 58 - 15 - *ganz* statt *ganze*.

- 59 - 1 - müssen die Worte *und daraus* wegfallen.

- 59 - 2 - lies e^{nui} statt e^{mi}.

5.

Elementary Theorems relating to Determinants.

(By Mr. *William Spottiswoode* Esq. M. A., J. R. S.)

Second edition, rewritten and much enlarged by the Author.

In the year 1851 *the author of the following paper published a tract called „Elementary theorems relating to Determinants" and on the request of the Editor of this journal to reproduce it, he requested permission to revise the work. The subject had however been so extensively developed in the interim, that it proved necessary not merely to revise but entirely to rewrite the work. The result is given in the following pages.*

Spottiswoode.

Preface.

The variety of problems to which the Theory of Determinants has recently been applied renders it desirable that this branch of analysis should be made generally accessible. But although the principal theorems are familiar to the more advanced mathematicians, there has hitherto been no elementary work upon the subject, to which reference can be readily made by the student.

The Theory is neither lengthy nor intricate, being in fact little else than a method of arrangement, by means of which the results of certain long algebraic processes may be discovered without actually effecting the operations; and indeed, with the exception of a few theorems relating to the addition, multiplication, etc. of determinants, it may be said to consist entirely in its application. Like all similar calculi, it may be carried out into very numerous details; but although this has not been attempted in the present investigations, the principal modifications of form and varieties of combination have been noticed, and the theorems throughout illustrated by examples. The reader will be thereby enabled generally to apply the processes whenever opportunity occurs, and to comprehend any new

theorems which may hereafter be proposed. The demonstrations here offered are principally original, although perhaps not different from such as may have occurred to others who have paid attention to the subject.

The functions which are the subject of the present paper, or cases of them more or less general, have for many years been an object of interest to mathematicians; in fact so long ago as the year **1750**, *cramer*, in his *Introduction à l' Analyse des lignes Courbes* (Appendix), has exhibited the determinants arising from linear equations in the case of two or three variables, and has indicated the law according to which they would be formed in the case of a greater number. In the *Histoire de l' Académie Royale des Sciences*, *Année* 1764 (published in 1767) *Bézout* has investigated the degree of the equation resulting from the elimination of unknown quantities from a given system of equations, and has at the same time noticed several cases of determinants, without howewer entering upon the general law of formation, or the properties of these functions. The *Hist. de l'Académie*, *An.* 1772, Part II. (published in 1776) contains papers by *Laplace* and *Vandermonde* relating to determinants of the second, third, fourth etc. order. The former, in discussing a system of simultaneous differential equations, has given the law of formation, and shown that when two horizontal or vertical rows (according to the notation of the present work) are interchanged, the sign of the determinant is changed. *Vandermonde's* paper is upon elimination, and considering the period at which it was written, is remarkable for its elegance; the notation, which is worth noticing, is as follows; the system of quantities being thus represented:

$$\begin{matrix} {}^1 1 & {}^1 2 & \ldots & {}^1 n \\ {}^2 1 & {}^2 2 & \ldots & {}^2 n \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ {}^n 1 & {}^n 2 & \ldots & {}^n n. \end{matrix}$$

a determinant of the nth order is written thus:

$$\frac{1 \mid 2 \mid \ldots \mid n}{1 \mid 2 \mid \ldots \mid n}$$

so that

$$\frac{1 \mid 2}{1 \mid 2} = {}^1 1 \; {}^2 2 - {}^2 1 \; {}^1 2$$

and so on for other orders.

In the *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773, *Lagrange* has demonstrated that the square of a determinant of the third order is itself a determinant;

these formulae he applies to the establishment of theorems relating to triangular pyramids, and to the problem of the rotation of a solid body. Subsequently to this, *Gauss*, in his *Disquisitiones Arithmeticae*, has shown (Sect. V. N. 159 and 270) that the product of two determinants is itself a determinant in the cases of the second and third orders. The whole of this section, which forms a large portion of the work, is devoted to these functions. The case of determinants of the second order arising from quadratic functions of two variables, i.e. of the form $b^2 - ac$, or adopting his notation, (a, b, c), is very completely discussed. And besides the theorem above noticed, the following problem, which has some connexion with determinants of determinants, is solved: „Given any three whole numbers a, a', a'', (which are not all $= 0$), to find six others, B, B', B'', C, C', C'', such that $B'C'' - B''C' = a$, $B''C - BC'' = a'$, $BC' - B'C = a''$." This mathematician appears to have also introduced the term *Determinant.*

In 1812 *Binet* published a memoire upon this subject, and established all the principal theorems for determinants of the second, third and fourth orders; and has further applied his formulae to the discussion of rhomboïds, surfaces of the second order, and properties of solid bodies. See *Journal de l'Ecole Politechnique tome* IX. *cahier* 16. The next volume of this series contains a paper by *Cauchy*, written at the same time, on functions which only change sign when the variables which they contain are transposed. The second part of this paper refers immediately to determinants, and contains a large number of very general theorems. Amongst them is noticed a property of a class of functions closely connected with determinants, first given, so far as I am aware, by *Vandermonde;* if in the development of the expression

$$a_1\, a_2 \,..\, a_n (a_2 - a_1)\,(a_3 - a_1)\,(a_n - a_1)\,(a_3 - a_2)\,..\,(a_n - a_2)\,(a_n - a_{n-1})$$

the indices be replaced by a second series of suffixes, the result will be the determinant

$$S(\pm a_{1,1}\, a_{2,2} \,..\, a_{n,n}).$$

Several papers appeared subsequently from time to time upon various points connected with the subject; but by far the most complete are two by M. *Jacobi* (Crelle, tom. XXII.) *De formâ et proprietatibus Determinantium*, and *De Determinantibus Functionalibus.* In the same Journal (tom. XXXII. and XXXVIII.) there are two memoires by Mr. *Cayley*, *Sur les Determinants gauches*, which expression has been rendered *Skew Determinants*, the term being adopted from the corresponding translation in Geometry. The principal contributions to the

subject subsequently to the above (since the publication of my Tract, London, 1851) have been made by J. J. *Sylvester* Esq. J. R. S., to whose papers references will be found in the present work.

References will be found in the course of this work to other papers in which Determinants have been employed, all of which may be consulted with advantage. Besides these, there may be mentioned the following; „On the Theory of Elimination," by Mr. *Cayley*, *Camb. & Dub. Math. Journal*, vol. III. Some papers by Mr. *Boole* in the same Journal. „On a new Class of Theorems, etc." by Mr. *Sylvester*, *Phil. Mag.* vol. XXXVII.; „Extraits de lettres de M. Ch. *Hermite*, à M. C. G. J. *Jacobi*, sur differents objects de la théorie des nombres," (Crelle, tom. XL.) *Sur une question relative aux Déterminants.* Par M. *Bazin.* Liouville Tom. XVI. p. 145. — *Mémoire sur le Déterminant d'un Systéme de Fonctions.* Par M. J. Bertrand. Liouville Tom. XVI. p. 212. — *Sur un Déterminant d'integrales, définies.* Par M. A. *Tissot.* Liouville Tom. XVII. p. 97 etc.

Besides that which is here discussed, there is another very interesting and apparently important theory lately proposed by Mr. *Cayley* relating to functions, which he calls *Hyperdeterminants.* The general question therein proposed is, „,To find all the derivatives of any number of functions which have the property of preserving their forms unaltered after any linear transformations of the variables.' By derivative is to be understood a function deduced in any manner whatever from the given function, and by hyperdeterminant derivative, or simply hyperdeterminant, those derivatives which have the property above enunciated." Of this nothing has been here said, but those who are desirous of pursuing the subject will find the principles of it laid down in two papers, *Camb. Math. Journal*, vol. IV., and *Camb. and Dub. Math. Journal*, vol. I., or in *Crelle*, tom XXX.

This Theory has been since extended by Mr. *Sylvester* in several papers in the London and Edinburgh Philosophical Magazine for 1851, and the whole subject remodelled and developed in several ways by that gentleman Mr. *Cayley*, in a series of articles entitled, *The Calculus of Forms*, and *The Theory of Permutants*, *Commutants*, *etc.* in the Cambridge and Dublin Mathematical Journal for 1852 — 1853.

---

§. 1.

On the formation of Determinants.

In order to designate a certain system of objects, quantitative or other, it is usual to employ either different letters, such as

$$a, b, c, \ldots..$$

or the same letter with accents or suffixes, as

$$k, k', k'', \ldots..$$
$$k, k_1, k_2, \ldots..$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

a second suffix being introduced when necessary, as

$$k_{11}, k_{12}, \ldots..$$
$$k_{21}, k_{22}, \ldots..$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

This notation being especially useful when the number of letters is of the form mn since they may then be arranged in m vertical and n horizontal, or n vertical and m horizontal rows; in the case when m and n are equal, the letters may of course be arranged in a square. It is however more simple and not less general to write down only the suffixes omitting the letters to which they might have been appended; so that instead of a system of mn letters the following may be used:

$$(1.\ 1)\ (1.\ 2) \ldots..\ (1.\ m),$$
$$(2.\ 1)\ (2.\ 2) \ldots..\ (2.\ m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n\ 1)\ (n\ 2) \ldots..\ (n.\ m).$$

These symbols which are perfectly general, have no reference to any numerical value or physical signification; but merely indicate their position in some primary arrangement of the system to which they severally belong. Thus, any symbol (p, q) in such a system would be that which originally stood in the pth horizontal and qth vertical row, counting from the top and the left hand respectively. Similarly the symbol (q, p) would be that which originally stood in the qth horizontal and pth vertical row; but since the numbers employed in these symbols have nothing whatever to do with the nature of the quantity or operation

whose position they determine, the symbols (p, q) and (q, p) have in general no relation or connexion with one another.

A rectangular array of mn symbols, as above, is called a *Matrix*, which may be either square or oblong, according as m is equal to, or not equal to n.

A *Determinant* is a function formed from a square *matrix*, according to a certain law explained below, and the symbols constituting that Matrix are called *the constituents of the Determinant.* When the Matrix consists of n vertical and n horizontal rows, the Determinant is said to be of the *nth degree*; because as will be hereafter seen, it consists of an assemblage of terms each of which is of that degree in the constituents. If the Determinant (supposed to be of the nth order) be perfectly general the matrix, will consist of n perfectly independent constituents; but the independence of the constituents is not essential. In fact, any relation whatever may subsist between any or all the constituents, and a Determinant be nevertheless formed from them; but the Determinant so formed will, as might be expected, possess different properties according to the nature of those relations. The principal varieties so arising will be noticed in the course of this work.

It will be noticed that the constituents $(1, 1)$, $(2, 2)$, .. (n, n) will then form the diagonal row passing from the upper left hand to the lower right hand corner. These constituents are called the *Principal Constituents*; and the diagonal the *Principal Diagonal*; and it may further be remarked that to pass from a horizontal to a vertical row, or vice versâ, it is only necessary to interchange the two numbers in each of the constituents, i. e. to write (q, p) for (p, q) or, (p, q) for (q, p). In any constituent, such as (p, q), the number p may be termed the horizontal and q the vertical index; because the first symbolical number of any constituent always indicates the horizontal row, and the second the vertical row to which it belongs in the primary arrangement of the system. The Constituents (p, q) and (q, p) may be called *Conjugate Constituents.*

There are various symbolical forms for expressing a Determinant suggested by the various ways in which the function may be regarded; sometimes the constituents are written in full, sometimes merely indicated by symbols to be combined in a particular manner, but when the former is the case, they will generally be expressed by the notation used above. Thus the square Matrix, forming the subject of the present considerations and arranged in its natural order, will be as follows:

$$(1.)\qquad \begin{vmatrix} (1.\ 1) & (1.\ 2) & \dots\dots & (1\ n) \\ (2.\ 1) & (2.\ 2) & \dots\dots & (2\ n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n\ 1) & (n\ 2) & \dots\dots & (n.\ n), \end{vmatrix}$$

and the same matrix with a vertical line on either side of it thus:

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} (1.\ 1) & (1.\ 2) & \dots\dots & (1\ n) \\ (2.\ 1) & (2.\ 2) & \dots\dots & (2\ n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n\ 1) & (n\ 2) & \dots\dots & (n.\ n) \end{vmatrix}$$

is used to indicate the Determinant formed from those n^2 Constituents. It is sometime convenient to represent the group of Determinants, which may be formed from an oblong Matrix, by a single formula; this is done by arranging the Matrix so that its longest side is horizontal adding a double instead of a single vertical line on either side of it so placed, thus, supposing that $m > u$, the formula

$$(3.)\qquad \left\Vert \begin{matrix} (1,\ 1) & (1,\ 2) & \dots\dots & (1,\ m) \\ (2,\ 1) & (2,\ 2) & \dots\dots & (2,\ m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,\ 1) & (n,\ 2) & \dots\dots & (n,m) \end{matrix} \right\Vert$$

will represent all the Determinant which can be formed by selecting n out of the m vertical rows from the matrix.

Any Determinant formed from a less number of these constituents is called a *Minor Determinant* of the determinant (2), and is said to be a *first*, *second* ..... *Minor*, according as it consists of $(n-1)^2{}_1$ $(n-2)^2{}_1$ ..... of the given n^2 Constituents. Thus a first Minor of the above Determinant would be formed by omitting *any one* horizontal and *any one* vertical row from the Matrix. Similarly a second Minor would be formed by omitting *any two* vertical and *any two* horizontal rows from the Matrix; and so on. Until an i th Minor would be formed by omitting *any* i horizontal and *any* i vertical rows from the Matrix. The following are examples of First, Second ..... Minors of the above Determinant:

$$\begin{vmatrix} (2.\ 2) & (2.\ 3) & \dots\dots & (2\ n) \\ (3.\ 2) & (3.\ 3) & \dots\dots & (3\ n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n\ 2) & (n\ 3) & \dots\dots & (n.\ n) \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} (2.\ 3) & (2.\ 4) & \dots\dots & (2.\ 1) \\ (3.\ 3) & (3.\ 4) & \dots\dots & (3.\ 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n\ 3) & (n\ 4) & \dots\dots & (n\ 1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (3.3) & (3n) & \ldots\ldots & (3\ n) \\ (4.3) & (n.n) & \ldots\ldots & (n.\ n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n\ 3) & (n.n) & \ldots\ldots & (n.\ n) \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} (1.1) & (1.2) & \ldots\ldots & (1, n-2) \\ (2.1) & (2.2) & \ldots\ldots & (2, n-2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n-2.1) & (n-2.2) & \ldots\ldots & (n-2, -n-2) \end{vmatrix}$$

in which the Constituents are supposed to be reckoned in their cyclic order.

And generally speaking, if

$$n_1, n_2, \ldots n_i,$$

be any i numbers of the series

$$1, 2 \ldots\ldots n$$

and

$$n_1', n_2', \ldots\ldots n_i',$$

also any i numbers of the same series, an ith Minor of the Determinant will be represented by

$$(4.) \qquad \begin{vmatrix} (n_1, n_1') & (n_1, n_2') & \ldots\ldots & (n_1, n_i') \\ (n_2, n_1') & (n_2, n_2') & \ldots\ldots & (n_2, n_i') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n_i, n_1') & (n_i, n_2') & \ldots\ldots & (n_i, n_i') \end{vmatrix}$$

and it may be here noticed, that the $(n-1)$th Minors are the Constituents of the Determinant themselves. But as there are n horizontal and n vertical rows in a Determinant of the nth degree, there will be n First Minors formed by the omission of the n horizontal rows in turn, and the same number by the omission of the n vertical rows in turn; so that there will be n^2 First Minors of a Determinant of the nth degree. In the same way there will be

$$n^2 \text{ first Minors,}$$

$$\left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right) \text{ second Minors,}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i}\right)^2, \; i\text{th Minors.}$$

In order to form *all* the first Minors of a Determinant of the nth degree, e. g. we must omit all the horizontal rows in turn, which we emit each one of the vertical rows in turn; or, what is the same thing, we must take all the combinations of the horizontal rows, taken $(n-1)$ and $(n-1)$ together with each of the Combinations of the vertical rows, taken $(n-1)$ and $(n-1)$ together. The

$i$the Minor consisting of any i horizontal and any i vertical rows, and the $(n-i)$the Minor consisting of the remaining $(n-i)$ horizontal and the remaining $(n-i)$ vertical rows may be called *Complementary Minors.*

The actual form of a Determinant, i. e. the developed function of which (1) is a symbol, will be best explained by writing down the full expressions for the degrees 1, 2, 3, 4, and the successive steps by which those expressions are obtained. The following equations, which must be regarded as one definition of a Determinant (as far as concerns the degrees 1, 2, 3, 4), deserve study, since from them the whole structure of a Determinant may be learnt.

$$(5.)\quad \left\{ \begin{aligned} &|(1.1)| = (1.1) \\ &\begin{vmatrix} (1.1) & (1.2) \\ (2.1) & (2.2) \end{vmatrix} = (1.1)\,|(2.2)| - (1.2)\,|(2.1)| = (1.1)(2.2) - (1.2)(2.1) \end{aligned} \right.$$

$$(6.)\quad \left\{ \begin{aligned} &\begin{vmatrix} (1.1) & (1.2) & (1.3) \\ (2.1) & (2.2) & (2.3) \\ (3.1) & (3.2) & (3.3) \end{vmatrix} = (1.1) \begin{vmatrix} (2.2) & (2.3) \\ (3.2) & (3.3) \end{vmatrix} + (1.2) \begin{vmatrix} (2.3) & (2.1) \\ (3.3) & (3.1) \end{vmatrix} + (1.3) \begin{vmatrix} (2.1) & (2.2) \\ (3.1) & (3.2) \end{vmatrix} \\ &= (1.1)\ \ (2.2)(3.3) - (3.2)(2.3) \quad = (1.1)(2.2)(3.3) - (1.1)(3.2)(2.3) + (1.2)(2.3)(3.1) \\ &+ (1.2)\ \ (2.3)(3.1) - (3.3)(2.1) \quad - (1.2)(3.3)(2.1) + (1.3)(2.1)(3.2) - (1.3)(3.1)(2.2) \\ &+ (1.3)\ \ (2.1)(3.2) - (3.1)(2.2) \end{aligned} \right.$$

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\begin{vmatrix} (1.1) & (1.2) & (1.3) & (1.4) \\ (2.1) & (2.2) & (2.3) & (2.4) \\ (3.1) & (3.2) & (3.3) & (3.4) \\ (4.1) & (4.2) & (4.3) & (4.4) \end{vmatrix} = (1.1) \begin{vmatrix} (2.2) & (2.3) & (2.4) \\ (3.2) & (3.3) & (3.4) \\ (4.2) & (4.3) & (4.4) \end{vmatrix} - (1.2) \begin{vmatrix} (2.3) & (2.4) & (2.1) \\ (3.3) & (3.4) & (3.1) \\ (4.3) & (4.4) & (4.1) \end{vmatrix} \\ &\qquad + (1.3) \begin{vmatrix} (2.4) & (2.1) & (2.2) \\ (3.4) & (3.1) & (3.2) \\ (4.4) & (4.1) & (4.2) \end{vmatrix} - (1.4) \begin{vmatrix} (2.1) & (2.2) & (2.3) \\ (3.1) & (3.2) & (3.3) \\ (4.1) & (4.2) & (4.3) \end{vmatrix} \\ &= (1.1)(2.2)(3.3)(4.4) - (1.1)(2.2)(3.4)(4.3) + (1.1)(2.3)(3.4)(4.2) \\ &- (1.1)(2.3)(3.2)(4.4) + (1.1)(2.4)(3.2)(4.3) - (1.1)(2.4)(3.2)(4.3) \\ &- (1.2)(2.3)(3.4)(4.1) + (1.2)(2.3)(3.1)(4.4) - (1.2)(2.4)(3.1)(4.3) \\ &+ (1.2)(2.4)(3.3)(4.1) - (1.2)(2.1)(3.3)(4.4) + (1.2)(2.1)(3.4)(4.3) \\ &+ (1.3)(2.4)(3.1)(4.2) - (1.3)(2.4)(3.2)(4.1) + (1.3)(2.1)(3.2)(4.4) \\ &- (1.3)(2.1)(3.4)(4.2) + (1.3)(2.2)(3.4)(4.1) - (1.3)(2.2)(3.1)(4.4) \\ &- (1.4)(2.1)(3.2)(4.3) + (1.4)(2.1)(3.3)(4.2) - (1.4)(2.2)(3.3)(4.1) \\ &+ (1.4)(2.2)(3.1)(4.3) - (1.4)(2.3)(3.1)(4.2) + (1.4)(2.3)(3.2)(4.1) \end{aligned} \right.$$

The law of formation of these functions will be sufficiently obvious, if it be noticed that when that number of rows (horizontal or vertical) is *odd,* the terms in the first stage of the development are all *positive,* and when the number is *even,* the terms are alternately *positive* and *negative.*

The construction of Determinants of the nth order is precisely the same a

that of the particular cases above noticed, and since the law by which determinants of the orders 1, 2, ... are constructed is *sufficient* for the formation of a determinant of the order n, we may proceed to construct a function of the same kind as those of the orders 1, 2 ..... The function in question will therefore be written thus:

$$(8.)\quad \left\{ \nabla = \begin{vmatrix} (1.1)\,(1.2)\,.....\,(1.n) \\ (2.1)\,(2.2)\,.....\,(2.n) \\ .... \\ (n.1)\,(n.2)\,.....\,(n.n) \end{vmatrix} \right.$$

the law of formation being as follows:

$$(9.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla = (1.1) \begin{vmatrix} (2.2)\,(2.3)\,.....\,(2.n) \\ (3.2)\,(3.3)\,.....\,(3.n) \\ .... \\ (n.2)\,(n.3)\,.....\,(n.n) \end{vmatrix} \pm (1.2) \begin{vmatrix} (2.3)\,(2.4)\,.....\,(2.1) \\ (3.3)\,(3.4)\,.....\,(3.1) \\ .... \\ (n.3)\,(n.4)\,.....\,(n.n) \end{vmatrix} \\ \qquad + \,.....\, \pm (1.n) \begin{vmatrix} (2.1)\,(2.2)\,.....\,(2.n-1) \\ (3.1)\,(3.2)\,.....\,(3.n-1) \\ .... \\ (n.1)\,(n.2)\,.....\,(n.n-1) \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

the upper signs being taken when the number of rows is *odd*, and the lower when it is *even*. It will be observed that at each stage of the development the expression consists of an assemblage of terms formed by the product of a certain number of Constituents multiplied by a Minor, whose degree of minority is equal to the number of Constituents in that product, and moreover, that in the development of any Determinant for the coefficient of any Constituent that Minor is selected which does not involve either the horizontal or the vertical row to which the Constituent belongs. And as this rule holds good throughout the development, i. e. in developing each Minor in succession, it follows that each horizontal and each vertical row will be represented once, and only once, in each term of the final expression. In other words, the final expression will be an assemblage of products, each consisting of n Constituents such that each of the symbolical numbers 1, 2..n, will appear once, and only once, as the horizontel index, and once, and only once, as vertical index.

It remains however to determine the rule for the sign of each term in the final expression. In the first place, it will be observed that each successive factor, reckoned from the left hand in each term of the result is taken from a Determinant whose degree is alternately *odd* and *even*. Now in the first stage of the de-

velopment of a Determinant of an odd degree, every term is positive; or, in other words, every horizontal index in the first horizontal row, gives rise to a positive sign: while in the first stage of the development of a Determinant of an *even* degree, the terms are alternately positive and negative; in other words, in every horizontal row, every *odd* horizontal index gives rise to a *positive*, and every *even* horizontal index to a negative sign.

In the first example given above, the first term (1, 1) (2, 2) is *positive* as is invariably the case; and the second (1, 2) (2, 1) *negative*, because the horizontal index of the first factor is *even*. Similarly in the second example, the first term (1, 1) (2, 2) (3, 3) is positive, because the horizontal index of (1, 1) belonging to a Determinant of an *odd* degree, gives rise to a *positive* sign, that of (2, 2) considered as belonging to the Determinant

$$\begin{vmatrix} (2,2) & (2,3) \\ (3,2) & (3,3) \end{vmatrix}$$

is *odd* and gives rise to a *positive* sign; and that of (3, 3), considered as belonging to

$$|\,(3,3)\,|,$$

a determinant of an *odd* degree gives rise to a *positive* sign. In the same example, the term (1, 1) (3, 2) (2, 3) is negative, because (1, 1) belongs to a Determinant of an *odd* degree and gives rise to a *positive* sign; the horizontal index of (3, 2), considered as belonging to the Determinant of an *even* degree

$$\begin{vmatrix} (2,2) & (2,3) \\ (3,2) & (3,3) \end{vmatrix}$$

is *even* and gives rise to a *negative* sign: while (3, 2), considered as belonging to

$$|\,(3,2)\,|$$

a Determinant of an *odd* degree gives rise to a *positive* sign. There will thus be two positive and one negative signs, giving a negative result. And similarly for the other terms.

It hence appears, and the remark is obviously general, that in calculating the sign of any term in any Determinant, it is necessary to pay attention only to the factor in that term which are to be considered as belonging to Determinants of *even* degree, i. e. to the 1st, 3rd.. nth if n be *even*, to the 2d, 4th... nth if n be *odd*. Thus taking any term from the third example e. g.

$$(1,3)(2,4)(3,1)(4,2),$$

we need consider only $(1,3)$ and $(3,1)$; the first of these, having an *odd* horizontal index, gives rise to a positive sign, and the second having likewise an *odd* horizontal index, also gives rise to a positive sign; the resulting sign will consequently be positive.

Now in all the investigations here considered, the numbers are always to be reckoned in their cyclic order i. e. considering

$$1, 2 \ldots\ldots n$$

as the natural order; the same order is to be preserved whatever number be selected as the first; thus if i be selected as the first, the cyclic order will be

$$i, i+1, \ldots\ldots n, 1, 2, \ldots\ldots i-1.$$

This being understood, it will be possible to determine whether any given constituent factor in any term of the final result, have an *odd* or an *even* horizontal index in the Determinant towhich it is supposed to belong by considering, whether its horizontal index be an *odd* or an *even* number of places beyond the horizontal index of the constituent factor immediately preceeding; it being always understood that the factors in the term are so arranged that the vertical indices stand in their natural order.

The rule then comes to this. Arrange the constituent factor in each term so that the vertical indices stand in their natural order, and selecting the 1st, 3rd.. or 2nd, 4th.. (according as the given Determinant be of an even or an odd order), determine whether the horizontal indices of those factors are an odd or an even number of places from those of their immediate predecessors respectively; the terms, in which the number of places is *odd*, are to be taken *positively*, those in which it is *even*, *negatively*; the product of the signs will give the sign of the result.

It has been seen above by the law of its formation, that a Determinant is the sum of a series of homogenous products, and M. *Jacobi* and others have in consequence adopted the following notation

$$\nabla = \Sigma \pm (1, 1)(2, 2) \ldots\ldots (n, n),$$

so that by the right-hand side of this equation is indicated the sum of terms formed by all possible interchange of the first (or second) members of the binary combinations $(1, 1)(2, 2) \ldots\ldots (n, n)$, subject to the condition that in each product

all the first members shall be different, and likewise all the second members. The term (1, 1) (2, 2) ..... (n, n) may be called the ***Principal Term.***

With respect to the rule of signs in this case, it is to be observed that when the horizontal indices of two consecutive factors in the final result are an ***odd*** number of places apart, those indices must have been permuted trough an ***even*** number of places (zero being here considered as an *even* number), to bring them into contact, and that when they are an *even* number of places apart, they must have been permuted over an *odd* number of places; and consequently, when the number of permutations, necessary to be performed upon the natural order to produce the order in the term in question, is *even*, the sign will be +, and when it is *odd* it will be —. And thus the rule may be expressed in the usual form: The sign of each term will be + or —, according as it is deducted from

$$(1, 1)\ (2, 2)\ \ldots\ldots\ (n, n)$$

by and even or odd number of interchanges of the horizontal indices.

The notion of permutations in the formation of a Determinant suggested an abbreviated notation to the mind of Mr. *Sylvester*. To quote his words: „My method consists in expressing the quantities literally as below:

$$\begin{array}{l} a,\ \mathrm{a},\ a_1\ \mathrm{a}_2\ \ldots\ldots\ a_1\ \mathrm{a}_n \\ a_2\ \mathrm{a},\ a_2\ \mathrm{a}_2\ \ldots\ldots\ a_1\ \mathrm{a}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\ \mathrm{a},\ a_n\ \mathrm{a}_n\ \ldots\ldots\ a_n\ \mathrm{a}_n \end{array}$$

„Each quantity is now represented by two letters: the letters themselves taken „separately, being symbols neither of quantity nor of operation but mere *umbrae* „or ideal *elements* of quantitative symbols. We have now a mean of representing the „Determinant above given in a compact form; for this purpose we need but to „write one set of *umbrae* over the other as follows:

$$\begin{array}{c} a_1\ a_2\ \ldots\ldots\ a_n \\ \mathrm{a}_1\ \mathrm{a}_2\ \ldots\ldots\ \mathrm{a}_n \end{array}$$

„If we now wish to obtain the algebraic value of this Determinant, it is only ne- „cessary to take a_1, a_2, ... a_n in all its 1. 2 ..... n different positions and we „shall have

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1\ a_2\ \ldots\ldots\ a_n \\ \mathrm{a}_1\ \mathrm{a}_2\ \ldots\ldots\ \mathrm{a}_n \end{array} \right\}$$

$$= \Sigma \pm \left(a_1\, \mathrm{a}_{\theta_1},\ a_2\, \mathrm{a}_{\theta}\ \ldots\ldots\ a_n\, \mathrm{a} \right),$$

„in which expression θ_1, θ_2 ..... θ_n represents some order of the numbers „1, 2 ..... n." (Phil. Mag. April 1851.)

Dropping the subject and writing i for θ, as before, we have

$$(10.)\qquad \nabla = \begin{Bmatrix} 1, 2 \ldots\ldots n \\ 1, 2 \ldots\ldots n \end{Bmatrix}$$

$$(11.)\qquad = \Sigma \pm |(1, i_1)(2, i_2) \ldots\ldots (n, i_n)|,$$

the rule of signs remaining as before; suppose however that the horizontal indices of the constituent factors in each term of the final result, instead of the vertical, be arranged in their natural order. To produce this new arrangement it is clear that the same number of permutations (but performed in an inverse manner), as that by which the original was produced, is necessary; and consequently the rule of signs will still hold good. This change, it will be observed, is equivalent to developing the Determinant, by the law given above, according to its horizontal, instead of its vertical row. It therefore follows that

Theorem I. *The developed expression of a Determinant remains unchanged, whether it be developed according to its horizontal or its vertical rows.*

A result which may be thus algebraically expressed:

$$(12.)\qquad \begin{vmatrix} (1,1)\,(2,2) \ldots\ldots (1,n) \\ (2,1)\,(2,2) \ldots\ldots (2,n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n,1)\,(n,2) \ldots\ldots (n,n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1,1)\,(2,1) \ldots\ldots (n,1) \\ (1,2)\,(2,2) \ldots\ldots (n,2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1,n)\,(2,n) \ldots\ldots (n,n) \end{vmatrix}$$

$$\Sigma \pm \{(1, i_1)(2, i_2) \ldots\ldots (n, i_n)\} = \Sigma \pm \{(i_1, 1)(i_2, 2) \ldots\ldots (i_n, n)\}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n \\ \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2 \ldots\ldots \mathfrak{a}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2 \ldots\ldots \mathfrak{a}_n \\ a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n \end{Bmatrix}$$

The above principles enable us also to establish an other theorem. Consider the determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, 2 \ldots\ldots n \\ 1, 2 \ldots\ldots n \end{vmatrix}$$

and let α, β ..... ν, k be any whole numbers such that

$$\alpha + \beta + \ldots\ldots + \nu + k = n;$$

then by taking α vertical rows out of the first α horizontal rows, and forming the determinant

$$\begin{Bmatrix} 1\ 2 \ldots\ldots \alpha \\ 1\ 2 \ldots\ldots \alpha \end{Bmatrix}$$

and, similarly, taking the next β vertical rows out of the next β horizontal rows, and forming the determinant

$$\begin{Bmatrix} \alpha+1 & \alpha+2 & \cdots & \alpha+\beta \\ \alpha+1 & \alpha+2 & \cdots & \alpha+\beta \end{Bmatrix}$$

and so on, until last k vertical rows be taken out of the last k horizontal rows; then forming the determinant

$$\begin{Bmatrix} \alpha+\beta+\cdots\rho+1 & \alpha+\beta+\cdots\rho+2 & \cdots & \alpha+\beta+\cdots\rho+k \\ \alpha+\beta+\cdots\rho+1 & \alpha+\beta+\cdots\rho+2 & \cdots & \alpha+\beta+\cdots\rho+k \end{Bmatrix},$$

it is clear that the product of the Determinants will give all the terms arising from the Constituents which lie on the squares about the diagonal of ∇, and by extending the sign of summation to all combinations in which no vertical row is twice employed, all the combinations in the determinant ∇ will be produced; and if moreover the sign of the product be made positive or negative, according as it requires an even or odd number of interchanges of vertical rows in ∇, to bring the determinants so formed all upon the diagonal of ∇, there will result

$$(13.)\quad \begin{Bmatrix} 1\,2\cdots n \\ 1\,2\cdots n \end{Bmatrix} = \Sigma\pm \begin{Bmatrix} 1\,2\cdots\alpha \\ 1\,2\cdots\alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha+1 & \alpha+2 \cdots \beta \\ \alpha+1 & \alpha+2 \cdots \beta \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} \nu+1 & \nu+2\cdots k \\ \nu+1 & \nu+2\cdots k \end{Bmatrix}$$

Hence the following theorem:

Theorem II. *If in a determinant of the nth order*, $\alpha, \beta, \ldots k$ *be whole numbers such that* $\alpha+\beta\cdots+k=n$, *the determinant may be expressed as the sum of the products of the determinants formed from all the groups of* α *vertical rows in the first* α *horizontal rows, from all the groups of* β *vertical rows in the next* β *horizontal rows, and so on, it being observed that no vertical row is to be twice employed.*

Thus for example:

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (1,1)(1,2) \\ (2,1)(2,2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (3,3)(3,4) \\ (4,3)(4,4) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (1,3)(1,4) \\ (2,3)(2,4) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (3,1)(3,2) \\ (4,1)(4,2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (1,1)(1,4) \\ (2,1)(2,4) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (3,2)(3,3) \\ (4,2)(4,3) \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} (1,1)(1,3) \\ (2,1)(2,3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (3,2)(3,4) \\ (4,2)(4,4) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (1,2)(1,3) \\ (2,2)(2,3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (3,4)(3,1) \\ (4,4)(4,1) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (1,2)(1,4) \\ (2,2)(2,4) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (3,1)(3,3) \\ (4,1)(4,3) \end{vmatrix}$$

In this way, if

$$a = \beta = \ldots\ldots = k = \tfrac{1}{2}n,$$

we have

$$(13.)\ \begin{Bmatrix} 12\ldots\ldots n \\ 12\ldots\ldots n \end{Bmatrix} = \Sigma \pm \begin{Bmatrix} 12\ldots\ldots a \\ 12\ldots\ldots a \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} a+1\ a+2\ldots\ldots 2a \\ a+1\ a+2\ldots\ 2a \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} (r-1)a(r-1)\ a+1\ldots\ldots n \\ (r-1)a(r-1)a+1\ldots\ldots n \end{Bmatrix}$$

aud, by making r equal to the various divisors of n in succession, we have all the possible forms in which the Determinant can be exhibited as an assemblage of products formed from factors of the same order. Thus:

$$\begin{aligned} &\Sigma \pm \{ (1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)(6,6) \} \\ = &\Sigma \pm \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1\,2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 3\,4 \\ 3\,4 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 5\,6 \\ 5\,6 \end{Bmatrix} \\ = &\Sigma \pm \begin{Bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 4\,5\,6 \\ 4\,5\,6 \end{Bmatrix} \\ = &\quad \begin{Bmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,2\,3\,4\,5\,6 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

It follows also from this that Determinants, whose order is a *prime* number, can be exhibeted in only one form.

It was seen from the expressions developod above, that in determinants of the orders $1, 2, \ldots\ldots$, if two vertical (or horizontal) rows be interchanged, the sign of the determinant itself is changed; and if this hold good for determinants of the $(n-1)$th order, the signs of all the determinants on the right-hand side of the expression for ∇, with the exception of the two consecutives, each of which contains only one of the rows in question, will always be changed.

The pair of terms (before the interchange of rows) is

$$(1,i-1)\begin{vmatrix} (1,i)(1,i+1)\cdots(1,i-2) \\ (2,i)(2,i+1)\cdots(2,i-2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,i)(n,i+1)\cdots(n,i-2) \end{vmatrix}(\alpha) \qquad (1,i)\begin{vmatrix} (1,i+1)(1,i+2)\cdots(1,i-1) \\ (2,i+1)(2,i+2)\cdots(2,i-1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,i+1)(n,i+2)\cdots(n,i-1) \end{vmatrix}(\beta)$$

aud have the same or different signs, according as n is odd or even. They become by the interchange

$$(1,i)\begin{vmatrix} (1,i-1)(1,i+1)..(1,i-2) \\ (2,i-1)(2,i+1)..(1,i-2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,i-1)(n,i+1)..(n,i-2) \end{vmatrix}(\alpha') \qquad (1,i-1)\begin{vmatrix} (1,i+1)(1,i+2)\cdots(1,i) \\ (2,i+1)(2,i+2)\cdots(2,i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,i+1)(n,i+2)\cdots(n,i) \end{vmatrix}(\beta')$$

Now if n be *odd*, these expressions have in their present forms the same explicit signs (both $+$) as (α) and (β); but when we remove the first vertical row in each determinant to the end, their sign is changed. If n be *even*, the removal of the first row to the end does not change the sign, but then (α') and (β') acquire opposite signs to (α) and (β) by the first interchange of rows.

So that whether n be odd or even, the result will be a change of sign, and consequently the sign of the whole determinant will be changed; and since this is the case for any two consecutive rows, it will be the case for any other pair of rows, since one of the pair will have to make an odd number and the other an even number of interchanges; hence finally,

$$\begin{vmatrix} (1,1)\,(1,2)..(1,i)..(1,j)..(1,n) \\ (2,1)\,(2,2)..(2,i)..(2,j)..(2,n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)\,(n,2)..(n,i)..(n,j)..(n,n) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} (1,1)\,(1,2)..(1,j)..(1,i)..(1,n) \\ (2,1)\,(2,2)..(2,j)..(2,i)..(2,n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)\,(n,2)..(n,j)..(n,i)..(n,n) \end{vmatrix}$$

$$\text{or } \begin{Bmatrix} 1\;2..i..j..n \\ 1\;2..i..j..n \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 1\;2..j..i..n \\ 1\;2..j..i..n \end{Bmatrix}$$

Hence

Theorem III. *If two vertical or horizontal rows are interchanged, the signs of the determinant is changed,*

and consequently, when two vertical (or horizontal) rows become identical, the determinant will be equal to itself with its sign changed; in other words it will vanish, i. e.

$$(15.)\qquad \begin{vmatrix} (1,1)\,(1,2)..(1,i)..(1,i)..(1,n) \\ (2,1)\,(2,2)..(2,i)..(2,i)..(2,n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)(n,2)..(n,i)..(n,i)..(n,n) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{or } \begin{Bmatrix} 1\;2..i..i..n \\ 1\;2..i..i..n \end{Bmatrix} = 0.$$

Hence

Theorem IV. *If two vertical or horizontal rows become identical, the determinant vanishes.*

The same properties may be proved more concisely as follows:

$$\left\{\begin{matrix}1\,2\,..\,n\\1\,2\,..\,n\end{matrix}\right\} = \Sigma \pm \left[\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\,2\end{matrix}\right\} . \left\{\begin{matrix}3\,4\,..\,n\\3\,4\,..\,n\end{matrix}\right\}\right]$$

$$= - \Sigma \pm \left[\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\,1\end{matrix}\right\} . \left\{\begin{matrix}3\,n\,..\,n\\3\,n\,..\,n\end{matrix}\right\}\right]$$

since

$$\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\,2\end{matrix}\right\} = - \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\,1\end{matrix}\right\}$$

and

$$\left\{\begin{matrix}1\,2\,..\,i\,..\,i\,..\,n\\1\,2\,..\,i\,..\,i\,..\,n\end{matrix}\right\}$$

$$= \pm \Sigma \left\{\begin{matrix}i\,..\,i\\i\,..\,i\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}1\,2\,..\,n\\1\,2\,..\,n\end{matrix}\right\} = 0$$

since

$$\left\{\begin{matrix}i\,..\,i\\i\,..\,i\end{matrix}\right\} = 0.$$

In certain cases a determinant degenerates into the product of two others; thus, if

$$\begin{array}{lll}(i,1) = 0, & (i,2) = 0, & \dots\dots (i, i-1) = 0\\ (i+1,1) = 0, & (i+1,2) = 0 & \dots\dots (i+1,\ i-1) = 0\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\\ (n,1) = 0, & (n,2) = 0, & \dots\dots (n, i-1) = 0,\end{array}$$

then the determinant

$$= \left|\begin{array}{llllll}(1,1) & (1,2) & \dots\dots (1,i) & \dots\dots (1,n) & & \\ (2,1) & (2,2) & \dots\dots (2,i) & \dots\dots (2,n) & & \\ \dots\dots & & & & & \\ (i-1,1) & (l-1,2) & \dots\dots (i-1,i) & \dots\dots (i-1,n) & & \\ \cdot & \cdot & \dots\dots (i,i) & \dots\dots (i,n) & & \\ \dots\dots & & & & & \\ \cdot & \cdot & \dots\dots (n,i) & \dots\dots (n,n) & & \end{array}\right|$$

may be successively reduced until the determinant

$$\left|\begin{array}{lll}(i,i) & (i,i+1) & \cdot\cdot\ (i,n)\\ (i+1,i) & (i+1,i+1) & \cdot\cdot\ (i+1,n)\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\\ (n,i) & (n,i+1) & \cdot\cdot\ (n,n)\end{array}\right|$$

is a common factor of all the terms, the other determinants of the order $(n-i)$ vanishing, for at the $(i-1)$th stage of reduction there will remain only the determinants formed from $(n-i+1)$ lower rows: but since there are only $(n-i+1)$ vertical rows in this group, there can be only one determinant, viz. that mentioned above. Again, taking the first vertical row as the primary, and developing, it would be found that the determinant may be reduced until

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,i-1) \\ (2,1) & (2,2) & .. & (2,i+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (i-1,1) & (i-1,2) & .. & (i-1,i-1) \end{vmatrix}$$

is a common factor; but as the whole determinant is homogeneous, and of the order n, it follows that its absolute value is equal to the product of these two last determinants; moreower the sign of the product will be the same as that of the given determinant, since the signs of the terms

$$\begin{matrix} (1,1) & (2,2) & .. & (n,n) \\ (1,1) & (2,2) & .. & (i-1,i-1) \\ (i,i) & (i+1,i+1) & .. & (n,n) \end{matrix}$$

are all +; hence

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,i) & .. & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & .. & (2,i) & .. & (2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (i-1,1) & (i-1,2) & .. & (i-1,i) & .. & (1-1,n) \\ * & * & .. & (i,i) & .. & (i,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & .. & (n,i) & .. & (n,n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,i-1) \\ (2,1) & (2,2) & .. & (2,i-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (i-1,1) & (i-1,2) & .. & (i-1,i-1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (i,i) & (i,i+1) & .. & (i,n) \\ (i+1,i) & (i+1,i+1) & .. & (i+1,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,i) & (n,i+1) & .. & (n,n) \end{vmatrix}$$

and similarly, if another set of constituents vanished, one of these latter determinants would be equal to the product of two others, and the whole determinant would be equal to the product of three determinants, and so on. The same result is also immediately deducible from Theorem II.

Hence,

Theorem V. *If in the last* (n — i) *horizontal rows of a determinant all, excepting the last* (n — i) *vertical rows, vanish, the determinant will be equal to the product of the determinants formed respectively from the first* i *and the last* (n — i) *horizontal and vertical rows.*

This theorem involves also the following:

Theorem VI. *If in one of the parallelograms which is a complement of two squares about the diagonal of a determinant all the Constituents vanish, then all those in the other complement may be put* = 0, *without altering the value of the determinant.*

Amongst other particular cases the following may be noticed:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & 1 & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ \cdot & \cdot & \ldots & (1,1) & (1,2) & \ldots & (1,n) \\ \cdot & \cdot & \ldots & (2,1) & (2,2) & \ldots & (2,n) \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ \cdot & \cdot & \ldots & (n,1) & (n,2) & \ldots & (n,n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \ldots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \ldots & (2,n) \\ \cdots & & & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & \ldots & (n,n) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \ldots & (1,n) \\ \cdot & (2,2) & \ldots & (2,n) \\ \cdots & & & \cdots \\ \cdot & \cdot & \ldots & (n,n) \end{vmatrix} = (1,1).(2,2)\ldots(n,n),$$

which will suggest many others.

The properties above established may be thus enunciated:

Theorem VII. *The value of a Determinant of the* n*th degree is not altered by considering it as a Determinant of the* $(n+i)$ *th degree, having units on the Principal Diagonal, und zeros in all other places in the first* i *horizontal and vertical rows.*

Theorem VIII. *A Determinant, all of whose Constituents on one side of its Principal Diagonal vanish, consists of only its Principal Term.*

It will probably have been noticed by the reader (as will be proved generally in §. III.) that in the cases of $n = 1, 2, \cdots\cdots$ the result of the elimination of $x_1, x_2, \cdots\cdots$ from the equations

$$(1,1)\,x_1 + (1,2)\,x_2 = 0,$$
$$(2,1)\,x_1 + (2,2)\,x_2 = 0,$$
$$(1,1)\,x_1 + (1,2)\,x_2 + (1,3)\,x_3 = 0,$$
$$(2,1)\,x_1 + (2,2)\,x_2 + (2,3)\,x_3 = 0,$$
$$(3,1)\,x_1 + (3,2)\,x_2 + (3,3)\,x_3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

is identical with the Determinant

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) \\ (2,1) & (2,2) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{vmatrix} = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

At all events, if this (which is easily verified) be assumed, the following example will illustrate the Theorem above established.

If there exist the three relations

$$lx + my + nz = u = 0,$$
$$l_1x + m_1y + n_1z = u_1 = 0,$$
$$l_2x + m_2y + n_2z = u_2 = 0,$$

then

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0;$$

but, on the other hand, we may employ three indeterminate multipliers λ, λ_1, λ_2, and form the equation

$$\lambda u + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0,$$

whence, equating to zero the coefficient of x, y, z, respectively and eliminating λ, λ_1, λ_2, we have the Determinant

$$\begin{vmatrix} l & l_1 & l_2 \\ m & m_1 & m_2 \\ n & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

which must be identical with the former result; in accordance with Theorem I.

Again any system such as

$$\begin{array}{rrr} (1,1)x_1 + & (1,2)x_2 + & (1,3)x_3 = 0 \\ * & (2,2)x_2 + & (2,3)x_3 = 0 \\ * & * & (3,3)x_3 = 0 \end{array}$$

involves either

$$(3,3) = 0, \quad \text{or} \quad x_3 = 0,$$

the latter supposition involves either

$$(2,2) = 0, \quad \text{or} \quad x_2 = 0,$$

the latter supposition involves either

$$(1,1) = 0, \quad \text{or} \quad x_1 = 0,$$

which coïncide with the result given by Theorem VII, viz.

$$(1,1)\,(2,2)\,(3,3) = 0,$$

The following are examples of the application of these theorems:

Let there be four *planes* intersecting in a *point*, two of them passing through the axis of z, their equations will then be:

$$\begin{aligned} lx + my + nz + k &= 0, \\ l_1x + m_1y + n_1z + k_1 &= 0, \\ l_2x + m_2y \qquad\quad &= 0, \\ l_3x + m_3y \qquad\quad &= 0, \end{aligned}$$

and the determinant formed from them will degenerate into the product of two others, thus,

$$\begin{vmatrix} l_2 & m_3 \\ l_3 & m_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n & k \\ n_1 & k_1 \end{vmatrix} = 0,$$

which is satisfied by either of the following equations,

$$\begin{vmatrix} l_2 & m_2 \\ l_3 & m_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} n & k \\ n_1 & k_1 \end{vmatrix} = 0,$$

the first of which is the condition that the third and fourth planes shall coïncide; the second expresses that the four planes intersect in the axis of z at a point where

$$-z = \frac{k}{n} = \frac{k_1}{n_1}.$$

Hence, either the four planes intersect in this point, or the third and fourth coïncide.

As another example; the equations to a *cone* and its *reciprocal* have been shown to be

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(Fyz + Gzx + Hxy) = 0$$

$$\begin{vmatrix} A & H & G & \xi \\ H & B & F & \eta \\ G & F & C & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

and if

$$A = 0,\ B = 0,\ H = 0,$$

the first degenerates into the two planes

$$z = 0,\quad 2Gx + 2Fy + Cz = 0$$

and the second into the two coïncident planes,

$$\begin{vmatrix} G & \xi \\ F & \eta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} G & F \\ \xi & \eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G & \xi \\ F & \eta \end{vmatrix}^2 = 0,$$

which are perpendicular to both of the former planes, as they should be.

§. II.

On the addition and subtraction of Determinants.

Suppose that there be two determinants having i rows (vertical or horizontal) in the one equal to i rows in the other respectively; and suppose the rows to have been so transposed (Theorem III.) that the i rows in question are concurrent; thus, if the i rows be brought on to the highest level:

$$\nabla = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,i) & (1,i+1) & .. & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & .. & (2,i) & (2,i+1) & .. & (2,n) \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & .. & (n,i) & (n,i+1)' & .. & (n,n)' \end{vmatrix}$$

$$\nabla = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,i) & (1,i+1)' & .. & (1,n)' \\ (2,1) & (2,2) & .. & (2,i) & (2,i+1)' & .. & (2,n)' \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & .. & (n,i) & (n,i+1) & .. & (n,n) \end{vmatrix}$$

where $(1,i+1)'$, $(1,i+2)'$ .....$(1,n)'$ ..... represent Constituents different from $(1,i+1)$, $(1,i+2)$ ..... $(1,n)$ .....; these may be also thus expressed:

$$\nabla = \begin{Bmatrix} 1\, 2 \cdots i(i+1) \cdots n \\ 1\, 2 \cdots i(i+1) \cdots n \end{Bmatrix}$$

$$\nabla' = \begin{Bmatrix} 1\, 2 \cdots i(i+1)' \cdots n' \\ 1\, 2 \cdots i(i+1)' \cdots n' \end{Bmatrix}$$

if it be understood that the combination of any two *umbrae*, such as h', g' produces the Constituent $(h, g)'$.

Then by (theorem II):

$$\nabla = \Sigma \pm \begin{Bmatrix} 1\, 2 \,..\, i \\ 1\, 2 \,..\, i \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} (i+1) \,..\, n \\ (i+1) \,..\, n \end{Bmatrix}$$

$$\nabla' = \Sigma \pm \begin{Bmatrix} 1\, 2 \,..\, i \\ 1\, 2 \,..\, i \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} (i+1)' \,..\, n' \\ (i+1)' \,..\, n' \end{Bmatrix}$$

and consequently, the first factor being the same in both:

$$(1.)\quad \nabla \pm \nabla' = \Sigma \pm \begin{Bmatrix} 1\, 2 \,..\, i \\ 1\, 2 \,..\, i \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} (i+1) \,..\, n \\ (i+1) \,..\, n \end{Bmatrix} \pm \begin{Bmatrix} (i+1) \,..\, n \\ (i+1)' \,..\, n' \end{Bmatrix} \right],$$

which is the most general form for the addition and subtraction of Determinants.

This result may be enunciated thus:

Theorem IX. The *sum* of two Determinants, in which i rows (on a certain level) are respectively equal, is equal to the Determinant, whose ith Minors on the aforesaid level are identical with the corresponding ith Minors of each of the two given Determinants, and whose $(n-i)$th complementary Minors are respectively the sum of the complementary Minors of the given Determinants.

When two determinants differ in only one row of the Constituents, this reduces itself to the ordinary formula, viz.

$$(2.)\quad \nabla \pm \nabla' = \begin{vmatrix} (1,1)\ (1,2) \cdots (1,n) \pm (1,n)' \\ (2,1)\ (2,2) \cdots (2,n) \pm (2,n)' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)\ (n,2) \cdots (n,n) \pm (n,n)' \end{vmatrix} = \nabla''$$

Inversely, a Determinant of the form ∇'' may be resolved into the sum of two of the form ∇ and ∇'.

A more general form of this is easily seen to be true; thus,

$$(3).\quad \begin{vmatrix} (1,1)+(1,1)'+\cdots & (1,2)+(1,2)'+\cdots & \cdots & (1,n)+(1,n)'+\cdots \\ (2,1)+(2,1)'+\cdots & (2,2)+(2,2)'+\cdots & \cdots & (2,n)+(2,n)'+\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1)+(n,1)'+\cdots & (n,2)+(n,2)'+\cdots & \cdots & (n,n)+(n,n)'+\cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,n) \\ \cdots & & & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & \cdots & (n,n) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (1,1)' & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ (2,1)' & (2,2) & \cdots & (2,n) \\ \cdots & & & \cdots \\ (n,1)' & (n,2) & \cdots & (n,n) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} (1,1)' & (1,2)' & \cdots & (1,n)' \\ (2,1)' & (2,2)' & \cdots & (2,n)' \\ \cdots & & & \cdots \\ (n,1)' & (n,2)' & \cdots & (n,n)' \end{vmatrix} + \cdots$$

Hence the following theorem may be enunciated:

Theorem X. *The determinant each of whose constituents is the sum of several others, is equal to the sum of the determinants formed by all possible combinations of vertical rows, one being taken out of each pair found in the given determinant.*

If the number of terms in the first vertical row be p, that in the second q, and so on, the number of determinants will be $p.\ q\ \ldots$

It may further be observed that if any vertical row of constituents, such as $(1,1)', (2,1)', \ldots$, be identical with any other, such as $(1,2)', (2,2)', \ldots$, the determinant containing those rows will vanish.

If

$$\begin{array}{l} (1,1)=(1,1)'=\cdots,(1,2)=(1,2)'=\cdots,\cdots(1,n)=(1,n)'=\cdots \\ (2,1)=(2,1)'=\cdots,(2,2)=(2,2)'=\cdots,\cdots(2,n)=(2,n)'=\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)=(n,1)'=\cdots,(n,2)=(n,2)'=\cdots,\cdots(n,n)=(n,n)'=\cdots \end{array}$$

we have the relations

$$(4.)\quad m\,\nabla = \begin{vmatrix} m\,(1,1) & (1,2) & \ldots & (1,n) \\ m\,(2,1) & (2,2) & \ldots & (2,n) \\ \cdots & & & \cdots \\ m\,(n,1) & (n,2) & \ldots & (n,n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1,1) & m\,(1,2) & \ldots & (1,n) \\ (2,1) & m\,(1,2) & \ldots & (2,n) \\ \cdots & & & \cdots \\ (n,1) & m\,(n,2) & \ldots & (n,n) \end{vmatrix} = \ldots,$$

hence

Theorem XI. *If the whole of a vertical or horizontal row be multiplied by the same quantity, the Determinant is multiplied by that quantity.*

§. III.

On the connexion between Determinants and linear Equations.

On examining the form of the function resulting from the elimination of 1, 2, 3 ····· variables from the same number of homogenous linear equations, it will be found that it is identical with that of a *Determinant* of the degree 1, 2, 3.. respectively. Thus, by eliminating x_1, x_2 from the equations

$$(1,1)\,x_1 + (1,2)\,x_2 = 0$$
$$(2,1)\,x_1 + (2,2)\,x_2 = 0,$$

we find

$$(1,1)\,(2,2) - (1,2)\,(2,1) = 0$$

i. e.

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) \\ (2,1) & (2,2) \end{vmatrix} = 0$$

or

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} = 0,$$

and the same would readily be found in the case of three variables and equations. Suppose that this holds good for n variables and equations, then

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & .. & (2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & .. &)n,n) \end{vmatrix} = 0$$

will be the result of the elimination of x_1, x_2 ····· x_n from the equations

$$(1.)\quad \begin{cases} (1,1)x_1 + (1,2)x_2 + \cdots + (1,n)x_n = 0 \\ (2,1)x_1 + (2,2)x_2 + \cdots + (2,n)x = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)x_1 + (n,2)x_1 + \cdots + (n,n)x_1 = 0 \end{cases}$$

If, however, the second members of these equations, instead of being zero, are u_1, u_2, ···· u_n, the system may be written thus:

$$\left((1,1) - \frac{u_1}{x_1}\right) x_1 + (1,2)x_2 + \cdots + (1,n)x_n = 0$$
$$\left((2,1) - \frac{u_2}{x_1}\right) x_1 + (2,2)x_2 + \cdots + (2,n)x_n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left((n,1) - \frac{u_n}{x_1}\right) x_1 + (n,2)x_2 + \cdots + (n,n)x_n = 0$$

and the following determinant deduced,

$$\begin{vmatrix} (1,1)-\frac{u_1}{x_1}\,(1,2)\cdots(1,n) \\ (2,1)+\frac{u_2}{x_1}\,(2,2)\cdots(2,n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)-\frac{u_n}{x_1}\,(n,2)\cdots(n,n) \end{vmatrix}=0.$$

or, by Theorem IX.

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} (1,1)\;(1,2)\cdots(1,n) \\ (2,1)\;(2,2)\cdots(2,n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)\;(n,2)\cdots(n,n) \end{vmatrix}\,x_1=\begin{vmatrix} u_1\;(1,2)\cdots(1,n) \\ u_2\;(2,2)\cdots(2,n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n\;(n,2)\cdots(n,n) \end{vmatrix}$$

with similar expressions for x_2, x_3, ·· x_n; so that the given equations are completely solved. If moreover

$$u_1=-(1,0)x,\quad u_2=-(2,0)x\;\ldots\ldots,\quad u_n=-(n,0)x,$$

it would be found, by the method employed above, and by Theorem IV., that

$$x:x_n:\cdots x_n$$

$$(3.)\quad = \begin{vmatrix} (1,1)(1,2)\cdots(1,n) \\ (2,1)(2,2)\cdots(2,n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)(n,2)\cdots(n,n) \end{vmatrix} :\pm \begin{vmatrix} (1,2)(1,3)\cdots(1,0) \\ (2,2)(2,3)\cdots(2,0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,2)(n,3)\cdots(n,0) \end{vmatrix} :\cdots\pm \begin{vmatrix} (1,0)(1,1)\cdots(1,n-1) \\ (2,0)(2,1)\cdots(2,n-1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,0)(n,1)\cdots(n,n-1) \end{vmatrix},$$

the upper or lower signs being taken according as $(n+1)$ is odd or even. And if in addition to the given equations there exist the relation

$$(0,0)x+(0,1)x_1+\cdots+(0,n)x_n=0\,,$$

the substitution of the values of the ratios $x:x_1:\ldots x_n$ from the previous equations will give rise to the determinant

$$\begin{vmatrix} (0,0)\,(0,1)\cdots(0,n) \\ (1,0)\,(1,1)\cdots(1,0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,0)\,(n,1)\cdots(n,n) \end{vmatrix}=0,$$

wich is therefore the result of the elimination of x, x_1, .. x_n from the $(n+1)$ linear equations

$$(5.)\quad \begin{array}{l} (0,0)x + (0,1)x_1 + \cdots + (0,n)x_n = 0 \\ (1,0)x + (1,1)x_1 + \cdots + (1,n)x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,0)x + (n,1)x_1 + \cdots + (n,n)x_n = 0. \end{array}$$

And as it has been shown that this holds good in the cases where $n=1$, $n=2,\ldots$, it follows

Theorem XII. *A determinant of the order* n *is in general the result of the elimination of* n *variables from* n *linear equations, whose coefficients are the constituents of the determinant.*

Conversely,

Theorem XIII. *If a determinant of the* n*th order vanishes, a system of* n *homogeneous linear equations, the coefficients of which are the constituents of the given determinant, may always be established.*

By Theorem I it also appears that this theorem holds good whether the determinant be resolved according to its vertical or its horizontal rows.

Besides the cases noticed in the introductory section, the following are examples of this theorem.

The condition that three straight lines may be parallel to one plane, will be given by the elimination of x, y, z, from the equations

$$\begin{array}{l} lx + my + nz = 0 \\ l_1x + m_1y + n_1z = 0 \\ l_2x + m_2y + n_2z = 0, \end{array}$$

i. e. by the determinant

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

The condition that four planes may pass through a point, will be given by the elimination of x, y, z, from the equations

$$\begin{array}{l} lx + my + nz + k = 0 \\ l_1x + m_1y + n_1z + k_1 = 0 \\ l_2x + m_2y + n_2z + k_2 = 0 \\ l_3x + m_3y + n_3z + k_3 = 0, \end{array}$$

i. e. by the determinant

$$\begin{vmatrix} l & m & n & k \\ l_1 & m_1 & n_1 & k_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & k_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 & k_3 \end{vmatrix} = 0$$

all of which, when developed, will be found to agree with the usual conditions.

The following example is of frequent occurrence in geometrical questions. To find the equation to the *cone reciprocal* to the *cone*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2\,(Fyz + Gzx + Hxy) = 0.$$

If ξ, η, ζ be the co-ordinates of a point on the reciprocal cone, the conditions that the radius vector of this point shall be perpendicular to the tangent plane along the line containing the point (x, y, z), will be:

$$\begin{aligned} Ax + Hy + Gz + \theta\xi &= 0 \\ Hx + By + Fz + \theta\eta &= 0 \\ Gx + Fy + Cz + \theta\zeta &= 0 \\ \xi x + \eta y + \zeta z \quad &= 0. \end{aligned}$$

Hence eliminating x, y, z, θ, together, the equation to the reciprocal cone will be:

$$\begin{vmatrix} A & H & G & \xi \\ H & B & F & \eta \\ G & F & C & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

The equation to the given cone may also be thrown into the form of a determinant; for writing the above equations in the following manner:

$$\begin{aligned} \theta\xi + 0 \; + 0 + Ax + Hy + Gz &= 0 \\ 0 + \theta\eta + 0 + Hx + By + Fz &= 0 \\ 0 + 0 \; + \theta\zeta + Gx + Fy + Cz &= 0 \\ \theta(x\xi + y\eta + z\zeta) \quad + 0 \qquad &= 0, \end{aligned}$$

and eliminating $\theta\xi$, $\theta\eta$, $\theta\zeta$, there results

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & Ax + Hy + Gz \\ 0 & 1 & 0 & Hx + By + Fz \\ 0 & 0 & 1 & Gx + Fy + Cz \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

The same method is obviously applicable to any surface of the second order, and the equation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2(Fyz+Gzx+Hxy)+Lx+My+Nz-K=0$$

may be written in either of the following ways:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & Ax+Hy+Cz+L \\ 0 & 1 & 0 & Hx+By+Fz+M \\ 0 & 0 & 1 & Gz+Fy+Cz+N \\ x & y & z & K \end{vmatrix} = 0$$

or

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Ax+Hy+Gz \\ 0 & 1 & 0 & 0 & Hx+By+Fz \\ 0 & 0 & 1 & 0 & Gx+Fy+Cz \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Lx+My+Nz \\ x & y & z & 1 & K \end{vmatrix} = 0.$$

Another form of the equation to a surface of the second order, similar to that to the reciprocal cone, will be given hereafter.

§. IV.

On the Multiplication of Determinants.

Let it be required to multiply together the two Determinants

$$= \nabla \begin{Bmatrix} 1\ 2\ ..\ n \\ 1\ 2\ ..\ n \end{Bmatrix}, \quad \nabla' = \begin{Bmatrix} 1'\ 2'\ ..\ n' \\ 1'\ 2'\ ..\ n' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & .. & (2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & .. & (n,n) \end{vmatrix}, \quad = \begin{vmatrix} (1,1') & (1,2') & .. & (1,n') \\ (2,1') & (2,2') & .. & (2,n)' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1') & (n,2') & .. & (n,n)' \end{vmatrix}$$

Now by what has gone before (Theorem V), we have

$$-\nabla\nabla' = \left|\begin{matrix} * & * & .. & * & (1.\,1) & (1.\,2) & .. & (1.\,n) \\ * & * & .. & * & (2.\,1) & (2.\,2) & .. & (2.\,n) \\ \cdots & & & & & & & \cdots \\ * & * & .. & * & (n.\,1) & (n.\,2) & .. & (n.\,n) \\ (1.1') & (1.2') & .. & (1.n') & * & * & .. & * \\ (2.1') & (2.2') & .. & (2.n') & * & * & .. & * \\ \cdots & & & & & & & \cdots \\ (n.1') & (n.2') & .. & (n.n') & * & * & .. & * \end{matrix}\right| \qquad (1.)$$

which is one form in which the product of the two determinants may be exhibited. But it is clear that for the term

$$\left\{\begin{matrix}1\ 2\ ..\ n\\ 1\ 2\ ..\ n\end{matrix}\right\}(1.\,1')\cdot\left\{\begin{matrix}2'\ 3'\ ..\ n'\\ 2'\ 3'\ ..\ n'\end{matrix}\right\}$$

we may subsitute

$$\left|\begin{matrix} * & * & .. & * & (1,1) & (1,1')\cdot(1,2) & .. & (1,n) \\ * & * & .. & * & (2,1) & (1,1')\ (2,2) & .. & (2,n) \\ \cdots & & & & & & & \cdots \\ * & * & .. & * & (n,1) & (1,1')\ (n,2) & .. & (n,n) \\ (2,2') & (2,3') & .. & (2,n') & * & * & .. & * \\ (3,2') & (3,3) & .. & (3,n') & * & * & .. & * \\ \cdots & & & & & & & \cdots \\ (n,2') & (n,3') & .. & (n,n') & * & * & .. & * \end{matrix}\right|$$

or, as it may be also written:

$$\left\{\begin{matrix}1\,.\,(1,1')\ 2\ ..\ n\\ 1\qquad\quad 2\ ..\ n\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}2'\ 3'\ ..\ n'\\ 2'\ 3'\ ..\ n'\end{matrix}\right\},$$

it being understood, that by the combination of two *umbrae* such as i', **1**, **(1, 1')**, the product $(i', 1).(1, 1)'$ is formed.

Similarly for

$$\left\{\begin{matrix}1\ 2\ ..\ n\\ 1\ 2\ ..\ n\end{matrix}\right\}\cdot(1,2)\left\{\begin{matrix}3'\ 4'\ ..\ 1'\\ 2'\ 3'\ ..\ n'\end{matrix}\right\}$$

we may substitute

$$\left\{\begin{matrix}1\,.\,(1,2')\ 2\ ..\ n\\ 1\qquad\quad 2\ ..\ n\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}3'\ 4'\ ..\ 1'\\ 2'\ 3'\ ..\ n'\end{matrix}\right\};$$

and thus by continuing the transformation trough all the rows, we should substitute lastly for

$$\begin{Bmatrix} 1\ 2\ ..\ n \\ 1\ 2\ ..\ n \end{Bmatrix} \cdot (1,n') \begin{Bmatrix} 1'\ 2'\ ..\ (n-1)' \\ 2'\ 3'\ ..\quad n' \end{Bmatrix}$$

the following:

$$\begin{Bmatrix} 1.(1,n)\ 2\ ..\ n \\ 1 \qquad\ \ 2\ ..\ n \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1'\ 2'\ ..\ (n-1) \\ 2'\ 3'\ ..\quad n' \end{Bmatrix}.$$

And thus, taking the sum of all these terms, we have

$$\nabla\nabla' = \Sigma_{\prime} \pm \left[\begin{Bmatrix} 1.(1,i)'\ 2\ ..\ n \\ 1 \qquad\quad 2\ ..\ n \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} (i+1)'\ (i+2)'\ ..\ (i+1)' \\ 2' \qquad 3' \qquad ..\quad n' \end{Bmatrix} \right]$$

with the usual rule of signs; or, as it may be also expressed:

$$(2.)\quad = \begin{vmatrix} (1,1)\,(1,1)'\ (1,1)\,(1,2)'\ ..\ (1,1)\,(1,n)'\ (1,2)\ (1,3)\ ..\ (1,n) \\ (2,1)\,(1,1)'\ (2,1)\,(1,2)'\ ..\ (2,1)\,(1,n)'\ (2,2)\ (2,3)\ ..\ (2,n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)\,(1,1)'\ (n,1)\,(1,2)'\ ..\ (n,1)\,(1,n)'\ (n,2)\ (n,3)\ ..\ (n,n) \\ (2,1)' \qquad (2,2)' \quad ..\quad (2,n)' \qquad * \quad * \ ..\ * \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)' \qquad (n,2) \quad ..\quad (n,n)' \qquad * \quad * \ ..\ * \end{vmatrix},$$

which is a second form in which the product may be exhibited.

Similarly, if Σ_2 indicates the sign of summation where the rows (1, 1), (1 1), are taken two and two, we may by another transformation reduce the product to

$$\nabla\nabla' = \Sigma \pm \left[\begin{Bmatrix} 1.\ (1.i')2.(2.i_{\prime})'\,..\,n \\ 1 \qquad 2 \qquad ..\,n \end{Bmatrix} .. \begin{Bmatrix} (i_{\prime}+1')(i_{\prime}+z_{\prime})\,..\,(i-1')(i+1')\,..\,(i_{\prime}-1') \\ 3' \qquad 4'\ .. \qquad\quad .\quad .\quad n' \end{Bmatrix} \right]$$

This expression, however, admits of some simplification, in virtue of the method of the addition of Determinants (Theorem IX), as we now proceed to shew.

Suppose, that a, β, be any two numbers not greater than n, then in the two cases

$$\begin{matrix} i_{\prime} = a & , & i = \beta \\ i_{\prime} = \beta & , & i = a \end{matrix}$$

the second factor becomes successively

$$A_{,}=\left\{\begin{matrix}(\alpha+1)' & (\alpha+2)' & .. & (\beta-1') & (\beta+1') & .. & (\alpha+1)' \\ 3' & n' & .. & ..... & & ..... & n'\end{matrix}\right\}$$

$$B_{,}=\left\{\begin{matrix}(\beta+1') & (\beta+2') & .. & (\alpha-1') & (\alpha+1') & .. & (\beta-1') \\ 3' & n' & .. & ..... & & ..... & n'\end{matrix}\right\}$$

and the first factor

$$A=\left\{\begin{matrix}1.(1.\beta)' & 2.(2.\alpha)' & .. & n \\ 1 & 2 & & n\end{matrix}\right\}$$

$$B=\left\{\begin{matrix}1.(1.\alpha)' & 2.(2.\beta)' & .. & n \\ 1 & 2 & & n\end{matrix}\right\}.$$

In order to exhibit the sum of these two terms, $AA_{,}$ $BB_{,}$ we must determine their signs relatively to one another, when both the second factors are made to begin with $(\alpha+1)'$ or $(\beta+1')$.

(1.) Suppose that α and β are an *odd* number of places apart; then the difference between the number of permutations required to bring the first factors respectively on to the principal diagonal will be an *odd* number; and thus for the terms will be of opposite signs. Now by the same permutations the second factors will have been respectively brought also on to the principal diagonal; but as they will begin with the numbers $(\alpha+1)$ and $(\beta+1)$ respectively, they must be further permuted until they both begin with $(\alpha+1)$ or $(\beta+1)$. But since between α and β, and consequently between $(\alpha+1)$ and $(\beta+1)$, there lie an *even* number of rows, the transposition of these rows in succession to the last place in the matrix, will require an *even* number of permutations, whether the total number of rows be *even* or *odd*, and will consequently not affect the signs of the terms relatively to one another. Hence, when α and β are an *odd* number of places apart, the two terms are of opposite signs.

(2.) Suppose α and β be an *even* number of places apart; then the number of permutations required to bring the first factor on the principal diagonal, will be *even*; and those required to make the second factors begin with the same row, will be *odd*; so that the terms will be of opposite signs, as before.

This being the case, the sum of the two terms $AA_{,}$, $BB_{,}$ may be expressed as a single term, thus:

$$-\left\{\begin{matrix}1.(1.\alpha)'+2.(2.\alpha)' & 1.(1.\beta)'+2.(2.\beta)' & .. & n \\ 1 & 2 & & n\end{matrix}\right\}$$

$$\times\left\{\begin{matrix}(\beta+1)' & (\beta+2)' & .. & (\alpha-1)' & (\alpha+1)' & .. & (\beta-1)' \\ 3' & 4' & .. & & & .. & n'\end{matrix}\right\}$$

and by giving to α and β all values from 1 to n inclusive and taking the sum, we have as a third form under which the product may be exhibited, the following formula:

$$\nabla\nabla' = -\Sigma\pm\left[\begin{Bmatrix} 1\,(1,\alpha)'+2,\,(2,\alpha)' & 1\,(1,\beta)'+2\,(2,\beta)' & \ldots n \\ 1 & 2 & \ldots n \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} (\beta+1)' & (\beta+2)' & \ldots & (\alpha-1)' & (\alpha+1)' & \ldots & (\beta-1) \\ 3' & 4' & \ldots & & & \ldots & n' \end{Bmatrix}\right]$$

or

$$(3.)\quad \nabla\nabla' =$$

$$\begin{vmatrix} (1,1)(1,1)'+(1,2)(2,1)' & (1,1)(1,2)'+(1,2)(2,2)' & \ldots & (1,1)(1,n)'+(1,2)(2,n)' & (1,3) & (1,4) & \ldots & (1,n) \\ (2,1)(1,1)'+(2,2)(2,1)' & (2,1)(1,2)'+(2,2)(2,2)' & \ldots & (2,1)(1,n)'+(2,2)(2,n)' & (2,3) & (2,4) & \ldots & (2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1)(1,1)'+(n,2)(2,1)' & (n,1)(1,2)'+(n,2)(2,2)' & \ldots & (n,1)(1,n)'+(n,2)(2,n)' & (n,3) & (n,4) & \ldots & (n,n) \\ (3,1)' & (3,2)' & \ldots & (3,n)' & * & * & \ldots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1)' & (n,2)' & \ldots & (n,n)' & * & * & \ldots & * \end{vmatrix}$$

By successively repeating the process, we should arrive at the formula

$$(4.)\quad \nabla\nabla' =$$

$$(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} (1,1)(1,1)'+\cdots+(1,i)(i,1)' & (1,1)(1,2)'+\cdots+(1,i)(i,2)' & \ldots & (1,1)(1,n)'+\cdots+(1,i)(i,n)' & (1,i+1) & \ldots & (1,n) \\ (2,1)(1,1)'+\cdots+(2,i)(i,1)' & (2,1)(1,2)'+\cdots+(2,i)(i,2)' & \ldots & (2,1)(1,n)'+\cdots+(2,i)(i,n)' & (2,i+1) & \ldots & (2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1)(1,1)'+\cdots+(n,i)(i,1)' & (n,1)(1,1)'+\cdots+(n,i)(i,2)' & \ldots & (n,1)(1,n)'+\cdots+(n,i)(i,n)' & (n,i+1) & \ldots & (n,n) \\ (i+1,1)' & (i+1,2)' & & (i+1,n)' & * & & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1)' & (n,2)' & & (n,n)' & * & & * \end{vmatrix}$$

Theorem XIV. *The product of two Determinants $\nabla\nabla'$, may be expressed by selecting i vertical rows from ∇, and i horizontal rows from ∇', and forming a Square-matrix of lineo-linear functions of such rows, so that the Constituents belonging to the vertical row of ∇ appear throughout the same horizontal row, and the i Constituent belonging to the same horizontal row of ∇' appear throughout the same vertical row of the matrix; this matrix bordered with the remaining $(n-i)$ vertical rows of ∇, and the $(n-i)$ remaining horizontal rows*

of ∇', will be the Matrix of the Determinant expressing the product of ∇ and Δ'.

When $n = i$, we have the usual formula

$$\begin{vmatrix} (1,1)'(1,1)+(1,2)'(2,1)+.. & (1,1)'(1,2)+(1,2)'(2,2)+.. & ..(1,1)'(1,n)+(1,2)'(2,n)+.. \\ (2,1)'(1,1)+(2,2)'(2,1)+.. & (2,1)'(1,2)+(2,2)'(2,2)+.. & ..(2,1)'(1,n)+(2,2)'(2,n)+.. \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1)'(1,1)+(n,2)'(2,1)+.. & (n,1)'(1,2)+(n,2)'(2,2)+.. & ..(n,1)'(1,n)+(n,2)'(2,n)+.. \end{vmatrix}$$

$$(5.)\quad = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & .. & (2,n) \\ \cdots & & & \\ (n,1) & (n,2) & .. & (n,n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1,1)' & (1,2)' & .. & (1,n)' \\ (2,1)' & (2,2)' & .. & (2,n)' \\ \cdots & & & \\ (n,1)' & (n,2)' & .. & (n,n)' \end{vmatrix}$$

With respect to the formation of the constituents of the product, it may be noticed that if the first member of the above equation be written thus:

$$\begin{vmatrix} (1,1)'' & (1,2)'' & .. & (1,n)'' \\ (2,1)'' & (2,2)'' & .. & (2,n)'' \\ \cdots & & & \\ (n,1)'' & (n,2)'' & .. & (n,n)'' \end{vmatrix}$$

and the equation thus:

$$\nabla'' = \nabla\nabla',$$

then $(i,j)''$ is the sum of the products formed by taking in order the terms along the ith horizontal row of ∇' and multiplying them by the terms along the jth vertical row of ∇ (or vice versâ); or since the vertical rows may be changed into horizontal, it may be said that $(i,j)''$ is the sum of the products made by taking the terms along the ith horizontal row of ∇ with those along the jth horizontal row of ∇ (or vice versâ).

In the case where

$$\begin{array}{lll} (1,1)' = (1,1) & (1,2)' = (2,1) & \cdots (1,n)' = (n,1) \\ (2,1)' = (1,2) & (2,2)' = (2,2) & \cdots (2,n)' = (n,2) \\ \cdots & & \\ (n,1)' = (1,n) & (n,2)' = (2,n) & \cdots (n,n)' = (n,n), \end{array}$$

the above expression becomes:

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} (1,1)^2 + (2,1)^2 + \cdots & (1,1)(1,2)+(2,1)(2,2)+\cdots & \cdots(1,1)(1,n)+(2,1)(2,n)+\cdots \\ (1,2)(1,1)+(2,2)(2,1)+\cdots & (1,2)^2 + (2,2)^2 + \cdots & \cdots(1,2)(1,n)+(2,2)(2,n)+\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (1,n)(1,1)+(2,n)(2,1)+\cdots & (1,n)(1,2)+(2,n)(2,2)+\cdots & (1,n)^2 + (2,n)^2 + \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & .. & (2,n) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (n,1) & (n,2) & .. & (n,n) \end{vmatrix}^2$$

Conversely the product of two determinants or the square of a determinant may be resolved into a single determinant, as above.

Hence the following:

Theorem XV. *A determinant whose constituents are linear functions of given constituents, the coefficients being the same for each horizontal row, is equal to the product of the two determinants whose constituents are the given constituents and the coefficients respectively.*

The above scale of expression for the product of two determinants may be also proved in an inverse order; and for this purpose the last formula must be first proved.

Assuming the formula, it is not difficult to see its truth: for, if for convenience we call the row

$$\begin{array}{c} (1,i)'(i,j) \\ (2,i)'(i,j) \\ \dots\dots\dots \\ (n,i)'(i,j) \end{array}$$

the ith column of the jth vertical row, it is clear that the ith column of the kth vertical row would be

$$\begin{array}{c} (1,i)'(i,k) \\ (2,i)'(i,k) \\ \dots\dots\dots \\ (n,i)'(i,k), \end{array}$$

and consequently, if the given Determinant be developed by the rule for decomposing a determinant whose constituents are sums of algebraical quantities, all the Determinants formed by the combination of more then one ith column, will vanish. In other words, the developed expression will consist of a series of all possible Determinants formed from n different columns, one being taken out of each vertical row. Now each of these columns is multiplied throughout by a single constituent, which may by the principles of the preceding section be placed outside as a multiplier of the whole Determinant to which it belongs. And if this be done with every vertical row of each of the Determinants, there will result a series of terms of the form

$$\left\{\begin{matrix} n_1' \; n_2' \, .. \, n_n' \\ 1' \; 2' \, .. \, n' \end{matrix}\right\} \cdot (n_1, 1)\,(n_2, 2)\,..\,(n_n, n),$$

where $n_1, n_2 \,..\, n_n$ are the numbers $1, 2, .. n$ arranged in any order. And if the vertical rows of the Determinant forming the first factor be interchanged so as to reduce it to

$$\nabla' = \left\{\begin{matrix} 1' \; 2' \, .. \, n' \\ 1' \; 2' \, .. \, n' \end{matrix}\right\}$$

the resulting expression will be *positive* or *negative*, according as the number of changes is *even* or *odd*. The factor ∇' will remain the same throughout, and the whole expression will therefore become:

$$\nabla' \, \Sigma \pm \{(n_1, 1)\,(n_2, 2)\,..\,(n_n, n)\}$$

with the usual rule of signs; in other words, it will become

$$\nabla'\nabla;$$

which was to be proved.

In order to arrive at the expression next in the scale to the one first established, we must write the two Determinants in the forms

$$\left|\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,n) & * \\ (2,1) & (2,2) & .. & (2,n) & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & .. & (n,n) & * \\ * & * & .. & * & 1 \end{matrix}\right|, \quad - \left|\begin{matrix} (1,1)' & (1,2)' & .. & * & (1,n)' \\ (2,1)' & (2,2)' & .. & * & (2,n)' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1)' & (n,2)' & .. & * & (n,n)' \\ * & * & .. & 1 & * \end{matrix}\right|$$

(the form of the second differs from that of the first only in the interchange of the last two vertical rows) and then apply the rule of multiplication given by the formula proved above. Similarly, by adding another row (vertical and horizontal) with a unit on the principal diagonal and zeros in all the other places, and transposing two vertical rows in the second determinant, and applying the same rule of multiplication, we should arrive at the third expression in the series. And so on, until the whole series was established. From this point of view the Theorem may be enunciated as follows.

Theorem XVI. *If the Determinants represented by two square-Matrices are to be multiplied together, any number of vertical rows may be cut off from the one Matrix and, a corresponding number of vertical rows from the other. Each of the horizontal rows in either one of the Matrices so reduced in width as afore said, being then mul-*

tiplied by each horizontal row of the other and the results of the multiplication arranged as a square-matrix and bordered with the two respective sets of vertical rows cut off, arranged symmetrically (the one set parallel to the row vertical and the other set parallel to the new horizontal row, the complete Determinant represented by the new Matrix so bordered (abstraction made of the algebraical sign) will be the product of the two original Determinants.

It should be observed that, in order to multiply together two Determinants whose degrees are not the same additional lines, both vertical and horizontal, (with units on the principal diagonal, and zeros in all other places), must be added to the Determinant of the lower degree, until the degrees are equalized, after which the rules given above become applicable.

It will perhaps be worth while to exhibit the above results in connexion with linear equations. For this purpose consider the same system of linear equations as before, and also the derived system

$$(7.)\qquad \left\{\begin{array}{l} (1,1)'u_1+(1,2)'u_2+\cdots+(1,n)'u_n=v_1\\ (2,1)'u_1+(2,2)'u_2+\cdots+(2,n)'u_n=v_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (n,1)'u_1+(n,2)'u_2+\cdots+(n,n)'u_n=v_n \end{array}\right.$$

or

$$\begin{array}{l} \{(1,1)'(1,1)+(1,2)'(2,1)+\cdots\}x_1+\{(1,1)'(1,2)+(1,2)'(2,2)+\cdots\}x_2+\cdots=v_1\\ \{(2,1)'(1,1)+(2,2)'(2,1)+\cdots\}x_1+\{(2,1)'(1,2)+(2,2)'(2,2)+\cdots\}x_2+\cdots=v_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \{(n,1)'(1,1)+(n,2)'(2,1)+\cdots\}x_1+\{(n,1)'(1,2)+(n,2)'(2,2)+\cdots\}x_2+\cdots=v_n; \end{array}$$

the latter system then gives:

$$\begin{vmatrix} (1,1)'(1,1)+(1,2)'(2,1)+\cdots & (1,1)'(1,2)+(1,2)'(2,2)+\cdots & \cdots(1,1)'(1,n)+(1,2)'(2,n)+\cdots\\ (2,1)'(1,1)+(2,2)'(2,2)+\cdots & (2,1)'(1,2)+(2,2)'(2,2)+\cdots & \cdots(2,1)'(1,n)+(2,2)'(2,n)+\cdots\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\ (n,1)'(1,1)+(n,2)'(2,1)+\cdots & (n,1)'(1,2)+(n,2)'(2,2)+\cdots & \cdots(n,1)'(1,n)+(n,2)'(2,n)+\cdots \end{vmatrix} x_1$$

$$=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_n\\ (2,1)'(1,1)+(2,2)'(2,1)+\cdots & (2,1)'(1,2)+(2,2)'(2,2)+\cdots & \cdots(2,1)'(1,n)+(2,2)'(2,n)+\cdots\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\ (n,1)'(1,1)+(n,2)'(2,1)+\cdots & (n,1)'(1,2)+(n,2)'(2,2)+\cdots & \cdots(n,1)'(1,n)+(n,2)'(2,n)+\cdots \end{vmatrix}$$

On the other hand, writing the two systems of linear equations as one system thus:

$$\begin{array}{l}
(1,1)x_1+(1,2)x_2+\cdots+(1,n)x_n - u_1 + \ast + \cdots + \ast = 0\\
(2,1)x_1+(2,2)x_2+\cdots+(2,n)x_n + \ast - u_2 + \cdots + \ast = 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(n,1)x_1+(n,2)x_2+\cdots+(n,n)x_n + \ast + \ast + \cdots - u_n = 0\\
\ast + \ast + \cdots + \ast + (1,1)'u_1+(1,2)'u_2+\ldots+(1,n)'u_n = v_1\\
\ast + \ast + \ldots + \ast + (2,1)'u_1+(2,2)'u_2+\ldots+(2,n)'u_n = v_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\ast + \ast + \ldots + \ast + (n,1)'u_1+(n,2)'u_2+\ldots+(n,n)'u_n = v_n,
\end{array}$$

there may be deduced

$$\left|\begin{array}{llllllll}
(1,1) & (2,1) & .. & (n,1) & \ast & \ast & .. & \ast\\
(1,2) & (2,2) & .. & (n,2) & \ast & \ast & .. & \ast\\
\cdots & & & & & & & \cdots\\
(1,n) & (2,n) & .. & (n,n) & \ast & \ast & .. & \ast\\
-1 & \ast & .. & \ast & (1,1)' & (2,1)' & .. & (n,1)'\\
\ast & -1 & .. & \ast & (1,2)' & (2,2)' & .. & (n,2)'\\
\cdots & & & & & & & \cdots\\
\ast & \ast & .. & -1 & (1,n)' & (2,n)' & .. & (n,n)'
\end{array}\right| x_1 = \left|\begin{array}{llllllll}
\ast & \ast & .. & \ast & v_1 & v_2 & .. & v_n\\
(1,2) & (2,2) & .. & (n,2) & \ast & \ast & .. & \ast\\
\cdots & & & & & & & \cdots\\
(1,n) & (2,n) & .. & (n,n) & \ast & \ast & .. & \ast\\
-1 & \ast & .. & \ast & (1,1)' & (2,1)' & .. & (n,1)'\\
\ast & -1 & .. & \ast & (1,2)' & (2,2)' & .. & (n,2)'\\
\cdots & & & & & & & \cdots\\
\ast & \ast & .. & -1 & (1,n)' & (2,n)' & .. & (n,n)'
\end{array}\right|$$

A comparison of the two systems reproduces the formula (5). Similarly, by using the partially derived system,

$$(8.)\quad\left\{\begin{array}{l}
\{(1,1)'(1,1)+..+(1,i)'(i,1)\}x_1+..+\{(1,1)'(1,n)+..+(1,i)'(i,n)\}x_n+(1,i+1)'u_{i+1}+..+(1,n)u_n=v_1\\
\{(2,1)'(1,1)+..+(2,i)'(i,1)\}x_1+..+\{(2,1)'(1,n)+..+(2,i)'(i,n)\}x_n+(2,i+1)'u_{i+1}+..+(2,n)u_n=v_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\{(i,1)'(1,1)+..+(i,i)'(i,1)\}x_1+..+\{(i,1)'(1,n)+..+(i,i)'(i,n)\}x_n+(i,i+1)'u_{i+1}+..+(i,n)u_n=v_i\\
\qquad\qquad (i+1,1)\ x_1+..+\qquad\qquad\qquad (i+1,n)\ x_n \qquad u_{i+1}+..+\ \ast\ =0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\qquad\qquad (n,1)\ x_1+..+\qquad\qquad\qquad (n,n)\ x_n \qquad \ast+..-u_n\ =0
\end{array}\right.$$

and proceding as before, and giving i all values in succession from 1 to n inclusive, we should obtain the scale of expressions previously established.

In order to put these results somewhat more *in evidence*, the cases of $n=2$ and $n=3$ may be written in full:

$$\left|\begin{array}{cc} a & b\\ c & d\end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} \mathrm{a} & \beta\\ \gamma & \delta\end{array}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a\alpha & a\gamma & \delta \\ c\alpha & c\gamma & \delta \\ \beta & \delta & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha+b\beta & a\gamma+b\delta \\ c\alpha+d\beta & c\gamma+d\delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 0 & a'' & b'' & c'' \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 & 0 & 0 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a\alpha' & a\alpha' & a\alpha'' & b & c \\ a'\alpha & a'\alpha' & a'\alpha'' & b' & c' \\ a''\alpha & a''\alpha' & a''\alpha'' & b' & c \\ \beta & \beta' & \beta'' & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a\alpha+b\beta & a\alpha'+b\beta & a\alpha''+b\beta'' & c \\ a'\alpha+b'\beta & a'\alpha'+b'\beta' & a'\alpha''+b'b'' & c' \\ a''\alpha+b''\beta & a''\alpha'+b''\beta' & a''\alpha''+b''\beta'' & c'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a\alpha+b\beta+c\gamma & a\alpha'+b\beta'+c\gamma' & a\alpha''+b\beta''+c\gamma'' \\ a'\alpha+b'\beta+c'\gamma & a'\alpha'+b'\beta'+c'\gamma' & a'\alpha''+b'\beta''+c'\gamma'' \\ a''\alpha+b''\beta+c''\gamma & a''\alpha'+b''\beta'+c''\gamma' & a''\alpha''+b''\beta''+c''\gamma'' \end{vmatrix}$$

The above scale gives the various ways in which the product of two Determinants, may be exhibited as a single Determinant of the degrees $2n$, $2n-1, \ldots n$ respectively. The product may however be exhibited as the sum of a series of products similar to itself: a form which is of great use for the establishment of geometrical Theorems.

Let ∇ and ∇' have the same significations as before, and let them be thus expressed:

$$\nabla = \Sigma \pm \left[\left\{ \begin{matrix} 1\,2\,..\,i \\ 1\,2\,..\,i \end{matrix} \right\} . \left\{ \begin{matrix} (i+1)\,(i+2)\,..\,n \\ (i+1)\,(i+2)\,..\,n \end{matrix} \right\} \right]$$

$$\nabla = \Sigma \pm \left[\left\{ \begin{matrix} 1'\,2'\,..\,i' \\ 1'\,2'\,..\,i' \end{matrix} \right\} . \left\{ \begin{matrix} (i+1)'\,(i+2)'\,..\,n' \\ (i+1)'\,(i+2)'\,..\,n' \end{matrix} \right\} \right]$$

it being supposed that one Matrix ∇' is cut horizontally and the other ∇ vertically.

Then one term in the product $\nabla\nabla'$ will be:

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,2\,..\,i \\ 1\,2\,..\,i \end{matrix} \right\} . \left\{ \begin{matrix} (i+1)\,(i+2)\,..\,n \\ (i+1)\,(i+2)\,..\,n \end{matrix} \right\} . \left\{ \begin{matrix} 1'\,2'\,..\,i' \\ 1'\,2'\,..\,i' \end{matrix} \right\} . \left\{ \begin{matrix} (i+1)'(i+2)'\,..\,n' \\ (i+1)'(i+2)'\,..\,n' \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} 1\,2\,..\,i \\ 1\,2\,..\,i \end{matrix} \right\} . \left\{ \begin{matrix} (i+1)'\,(i+2)'\,..\,n' \\ (i+1)'\,(i+2)'\,..\,n' \end{matrix} \right\} . \left\{ \begin{matrix} 1'\,2'\,..\,i' \\ 1'\,2'\,..\,i' \end{matrix} \right\} . \left\{ \begin{matrix} (i+1)\,(i+2)\,..\,n \\ (i+1)\,(i+2)\,..\,n \end{matrix} \right\}$$

$$= \left| \begin{matrix} (1,1)\,(1,2)\,..\,(1,i)\,(1,i+1)'\,..\,(1,n)' \\ (2,1)\,(2,2)\,..\,(2,i)\,(2,i+1)'\,..\,(2,n)' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (i,1)\,(i,2)\,..\,(i,i)\,(i,i+1)'\,..\,(i,n)' \\ *\quad *\quad ..\quad *\;(i+1,i+1)'\,..\,(i+1,n)' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ *\quad *\quad ..\quad *\;(n,i+1)'\,..\,(n,n)' \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} (1,1)'\,(1,2)'\,..\,(1,i)'\quad *\quad ..\quad * \\ (2,1)'\,(2,2)'\,..\,(2,i)'\quad *\quad ..\quad * \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (i,1)'\,(i,2)'\,..\,(i,i)'\quad *\quad ..\quad * \\ (i+1,1)'(i+1,2)'..(i+1,2)'(i+1,i+1)..(i+1,n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)'\,(n,2)'\,..\,(n,i)'\,(n,i+1)'\,..\,(n,n) \end{matrix} \right|$$

Now the other terms of ∇' will be formed by interchanging in every possible wav the vertical rows of its constituents, so that $(n-i)$ of them stand in their cyclic order in the last $(n-i)$ places, first factor of the above expression, and the remaining i in their cyclic order in the first i places of the second. If this be done, the term

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,2\,.\,i \\ 1\,2\,..\,i \end{matrix} \right\} . \left\{ \begin{matrix} (i+1)\,(i+2)\,..\,n \\ (i+1)\,(i+2)\,..\,n \end{matrix} \right\}$$

of ∇ will have been multiplied into every term of ∇'. Again, the other terms of ∇ will be formed by interchanging in every possible way the horizontal rows of its constituents, so that i of them stand in the first factor and the remaining $(n-i)$ in the second. If this be done and the various horizontal rows written in their natural places, and if, after every interchange, the interchanges, with respect to ∇', be performed as before, every term of ∇ will have been successively multiplied into every term of ∇'. But, the rows of ∇' remaining fixed, the sum of the terms formed by interchanging the horizontal rows of ∇, will be

$$= \Sigma \pm \left[\left\{ \begin{matrix} 1\,2\,..\,i \\ 1\,2\,..\,i \end{matrix} \right\} . \left\{ \begin{matrix} (i+1)'(i+2)'..n' \\ (i+1)'(i+2')..n' \end{matrix} \right\} . \left\{ \begin{matrix} 1'2'..i' \\ 1'2'..i' \end{matrix} \right\} . \left\{ \begin{matrix} (i+1)\,(i+2)..n \\ (i+1)\,(i+2)..n \end{matrix} \right\} \right],$$

the sign of summation referring only to the rows of ∇; in other words, it would be equal to

$$\nabla_1 \nabla_2,$$

where

$$\nabla_1 = \left|\begin{array}{ccccc} (1,1) & (1,2) & ..(1,t) & (1,t+1)' & ..(1,n)' \\ (2,1) & (2,2) & ..(2,t) & (2,t+1)' & ..(2,n)' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (t,1) & (t,2) & ..(t,t) & (t,t+1)' & ..(t,n)' \\ (t+1,1) & (t+1,2) & ..(t+1,t) & (t+1,t+1)' & ..(t+1,n)' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & ..(n,t) & (n,t+1)' & ..(n,n)' \end{array}\right| \quad \Delta_2 = \left|\begin{array}{ccccc} (1,1)' & (1,2)' & ..(1,t)' & (1,t+1) & ..(1,n) \\ (2,1)' & (2,2)' & ..(2,t)' & (2,t+1) & ..(2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (t,1)' & (t,2)' & ..(t,t)' & (t,t+1) & ..(t,n) \\ (t+1,1)' & (t+1,2)' & ..(t+1,t)' & (t+1,t+1) & ..(t+1,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1)' & (n,2)' & ..(n,t)' & (n,t+1) & ..(n,n) \end{array}\right|$$

And if upon this expression the interchanges, with respect to ∇', be performed, the result will be a series of products of Determinants, differing from the above only by the interchange of the vertical rows ∇'. The final result will therefore be:

$$(7.) \qquad \nabla\nabla' = \Sigma \pm \nabla_1 \nabla_2$$

It may further be remarked that if the vertical rows belonging to ∇', which stand in the factor ∇_2 be written in their natural places, the terms under the sign of summation will all be positive. Hence the following

Theorem XVII. *If there be two Determinants* A *and* B, *each of the* n*th degree, and if* A *be divided in one way into any two parts, containing* n*th and* (n — p) *vertical rows respectively, and if* B *be divided in all possible ways into two parts containing* n *and* (n — p) *vertical rows respectively: the product of the two Determinants will be equal to the sum of the products of the new conjugate Determinants, which result from the successive interchange of one of the parts of* A *with the corresponding part of* B.

(This Theorem, together with the examples relative to tetrahedra and bisangles, was given by Mr. *Sylvester*, Philosoplical Magazine Decbr. 1852.)

The following are examples of the various methods of multiplication.

Suppose that we have two tetrahedrons, whose volumes are represented respectively by one-sixth of the respective Determinants

$$\begin{array}{cccc} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & 1, \end{array}$$

x_r, y_r, z_r representing the orthogonal coordinates of the point r in one tetrahedron, and ξ_r, η_r, ζ_r the same for any point (r) in the other. Their product may be represented (striking off the last column only from each matrix) by the Determinant

$$\begin{matrix} \Sigma x_1\xi_1; & \Sigma x_1\xi_2; & \Sigma x_1\xi_3; & \Sigma x_1\xi_4; & 1 \\ \Sigma x_2\xi_1; & \Sigma x_2\xi_2; & \Sigma x_2\xi_3; & \Sigma x_2\xi_4; & 1 \\ \Sigma x_3\xi_1; & \Sigma x_3\xi_2; & \Sigma x_3\xi_3; & \Sigma x_3\xi_4; & 1 \\ \Sigma x_4\xi_1; & \Sigma x_4\xi_2; & \Sigma x_4\xi_3; & \Sigma x_4\xi_4; & 1 \\ 1; & 1; & 1; & 1; & 0 \end{matrix}$$

where, in general any such term as $\Sigma x_r . \xi_s$ represents

$$x_r . \xi_s + y_r . \eta_s + z_r . \zeta_s.$$

Again, adding

$$-\tfrac{1}{2}\Sigma x_1^2; \quad -\tfrac{1}{2}\Sigma x_2^2; \quad -\tfrac{1}{2}\Sigma x_3^2; \quad -\tfrac{1}{2}\Sigma x_4^2;$$

to the respective horizontal and

$$-\tfrac{1}{2}\Sigma\xi_1^2; \quad -\tfrac{1}{2}\Sigma\xi_2^2; \quad -\tfrac{1}{2}\Sigma\xi_3^2; \quad -\tfrac{1}{2}\Sigma\xi_4^2$$

to the respective vertical rows, the above Determinant becomes (after a change of signs, not affecting the result) the $-\frac{1}{8}$th of

$$\left\{\begin{matrix} \Sigma(x_1-\xi_1)^2; & \Sigma(x_1-\xi_2)^2; & \Sigma(x_1-\xi_3)^2; & \Sigma(x_1-\xi_4)^2; & 1 \\ \Sigma(x_2-\xi_1)^2; & \Sigma(x_2-\xi_2)^2; & \Sigma(x_2-\xi_3)^2; & \Sigma(x_2-\xi_4)^2; & 1 \\ \Sigma(x_3-\xi_1)^2; & \Sigma(x_3-\xi_2)^2; & \Sigma(x_3-\xi_3)^2; & \Sigma(x_3-\xi_4)^2; & 1 \\ \Sigma(x_4-\xi_1)^2; & \Sigma(x_4-\xi_2)^2; & \Sigma(x_4-\xi_3)^2; & \Sigma(x_4-\xi_4)^2; & 1 \\ 1; & 1; & 1; & 1; & 0 \end{matrix}\right\}$$

Or calling the angular points of the one tetrahedron a, b, c, d, and of the other p, q, r, s, 8×36, *i.e.* 288 times their product is represented by $-1\times$ the Determinant

$$\begin{matrix} (a\,p)^2; & (a\,q)^2; & (a\,r)^2; & (a\,s)^2; & 1 \\ (b\,p)^2; & (b\,q)^2; & (b\,r)^2; & (b\,s)^2; & 1 \\ (c\,p)^2; & (c\,q)^2; & (c\,r)^2; & (c\,s)^2; & 1 \\ (d\,p)^2; & (d\,q)^2; & (d\,r)^2; & (d\,s)^2; & 1 \\ 1; & 1; & 1; & 1; & 0, \end{matrix}$$

and of course, if p, q, r, s, coïncide respectively with a, b, c, d: 576 times the square of the tetrahedron $a\,b\,c\,d$ will be represented under Mr. *Cayley's* form

$$\begin{matrix} 0; & (a\,b)^2; & (a\,c)^2; & .(a\,d)^2; & 1 \\ (b\,a)^2; & 0; & (b\,c)^2; & (b\,d)^2; & 1 \\ (c\,a)^2; & (c\,b)^2; & 0; & (c\,d)^1; & 1^{*)} \\ (d\,a)^2; & (d\,b)^2; & (d\,c)^2; & 0; & 1 \\ 1; & 1; & 1; & 1; & 0, \end{matrix}$$

four out of the sixteen distances vanishing, and the remaining twelve reducing to six pairs of equal distances.

The demonstration of Mr. *Staudt's* theorem for triangles is obtained in precisely the same way by throwing the product of the two determinants

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

under the form of $-\frac{1}{4}$ th of

$$\begin{vmatrix} \Sigma(x_1-\xi_1)^2 & ; & \Sigma(x_1-\xi_2)^2 & ; & \Sigma(x_1-\xi_3)^2 & ; & -1 \\ \Sigma(x_2-\xi_1)^2 & ; & \Sigma(x_2-\xi_2)^2 & ; & \Sigma(x_2-\xi_3)^2 & ; & +1 \\ \Sigma(x_3-\xi_1)^2 & ; & \Sigma(x_3-\xi_2)^2 & ; & \Sigma(x_3-\xi_3)^2 & ; & +1 \\ 1; & & 1; & & 1; & & 0 \end{vmatrix}$$

When the two triangles coïncide, calling their angular points a, b, c, the above written determinant becomes

$$\begin{vmatrix} 0 & ; & (a\,b)^2 & ; & (a\,c)^2 & ; & 1 \\ (b\,a)^2 & ; & 0 & ; & (b\,c)^2 & ; & 1 \\ (c\,a)^2 & ; & (c\,b)^2 & ; & 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & 1 & ; & 1 & ; & \end{vmatrix}$$

or

$$(a\,b)^4+(ac)^4+(bc)^4-2(ab)^2.(ac)^2-2(ab)^2(bc)^2-2(ac)^2.(bc)^2;$$

the negative of which is the well-known form expressing the square of four times the area of the triangle *abc*.

Again for two triangles we have by the second method:

---

*) The corresponding quantity to the above determinant for the case of the triangle (hereafter given) isi dentical with the Norm to the sum of the sides. I [p. p. Sylvester] have succeeded in finding the Factor (of ten dimensions in respect of the edges) which multiplied by the above Determinant itself, expresses the Norm, to the sum of the faces, i. e. the superficial area of the Tetrahedron.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ y_1 & \eta_1 & \eta_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_3 & x_2 & x_3 \\ \eta_3 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ y_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 & x_2 & x_3 \\ \eta_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & \xi_3 & \xi_1 \\ y_1 & \eta_3 & \eta_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_2 & x_2 & x_3 \\ \eta_2 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

and consequently, if ABC, DEF be any two triangles,

$$\text{ABC} \times \text{DEF} = \text{ADE} \times \text{FBC} + \text{AEF} \times \text{DBC} + \text{AFD} \times \text{BCE}.$$

The following are examples of the usual formula for the multiplication of Determinants.

The condition that a surface of the second order has no centre, is independent of the direction of the coordinate axes. In fact, the condition is

$$\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix} = 0,$$

which by a change of the direction of coordinate axes, and by writing for brevity

$$\begin{aligned} Ax^2 + .. &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(Fyz + Gzx + Hxy) \\ Ax\xi + .. &= Ax\xi + By\eta + Cz\zeta + F(y\zeta + z\eta) + G(z\xi + x\zeta) + H(x\eta + y\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} Al^2 + .. & Alm + .. & Aln + .. \\ Aml + .. & Am^2 + .. & Amn + .. \\ Anl + .. & Anm + .. & An^2 + .. \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix} = 0,$$

which, as in the former case, proves the proposition.

The following examples are taken from an interesting Memoire by M. *Joachimsthal.* (Crelle, tom. XXXIX.)

Let the equation to a conic-section be

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0,$$

and let (x, y), (x', y'), (x'', y'') be three points, either situated upon the curve, or not; also let

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=(1,1) \quad , \quad \frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}-1=(2,3),$$
$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=(2,2) \quad , \quad \frac{x''x}{a^2}+\frac{y''y}{b^2}-1=(3,1),$$
$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-1=(3,3) \quad , \quad \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{a^2}-1=(1,2),$$

then writing

$$|1,2,3| = \begin{vmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{b} & 1 \\ \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & 1 \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & 1 \end{vmatrix} = \pm 2\frac{A}{ab} \qquad |1,2,3|' = \begin{vmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{b} & -1 \\ \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & -1 \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & -1 \end{vmatrix} = \mp 2\frac{A}{ab},$$

where A is the area of the triangle whose angular points are at (x, y), (x', y'), (x'', y''), there results

$$|1,2,3|\,|1,2,3|' = -\frac{4A^2}{a^2b^2};$$

but by the theorem of the present section:

$$|1,2,3|\,|1,2,3|' = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{vmatrix}$$

and consequently:

$$A = \tfrac{1}{2}ab\{-(1,1)(2,2)(3,3)+(1,1)(2,3)^2+(2,2)(3,1)^2+(3,3)(1,2)^2 \\ -2(2,3)(3,1)(1,2)\}^{\frac{1}{2}}.$$

This formula comprises a large number of theorems.

When the triangle is inscribed in the conic

$$(1,1)=0 \quad , \quad (2,2)=0 \quad , \quad (3,3)=0,$$

and if f, g, h be the chords joining the points two and two, and F, G, H the semi-diameters respectively parallel to f, g, h,

$$-2(2,3)=\frac{(x'-x'')^2}{a^2}+\frac{(y'-y'')^2}{b^2}=\frac{f^2}{F^2}$$
$$-2(3,1)=\frac{(x''-x)^2}{a^2}+\frac{(y''-y)^2}{b^2}=\frac{g^2}{G^2}$$
$$-2(1,2)=\frac{(x-x')^2}{a^2}+\frac{(y-y')^2}{b^2}=\frac{h^2}{H^2}$$

and consequently

$$A = \tfrac{1}{4} ab \cdot \frac{fgh}{FGH},$$

which expresses, that, twice the area of a triangle inscribed in an ellipse is to the product of the principal axes as the product of the sides is to the product of the diameters parallel to them.

If the ellipse becomes a circle,

$$a = b = F = G = H = r,$$

where r is the radius of the circle, and consequently

$$A = \frac{fgh}{4r}$$

and dividing this by the corresponding equation in the ellipse,

$$r = \frac{FGH}{ab}$$

and consequently

The radius of a circle which passes through three points on an ellipse, is equal to the product of the semi-diameters parallel to the sides of the inscribed triangle, divided by the product of the semi-axes.

The equation to the conic, when referred to one of its foci as the origin, is

$$x^2 + y^2 - \lambda^2(x + p) = 0.$$

And if u, v, w be the three focal chords, parallel to the three sides of an inscribed triangle, s another focal chord perpendicular to the major axis, and r the radius of the circle passing through the angular points of the inscribed triangle, there would be found, by a process similar to that used above:

$$r = \tfrac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{uvw}{s}\right)}.$$

In the general formula given above, when the three points are conjugate, that is to say, when the polar of each passes through the other two, we have

$$(2,3) = 0, \quad (3,1) = 0, \quad (1,2) = 0,$$

and the expression $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ is equal to the distance of any point from the centre of the conic, divided by the semi-diameter parallel to that distance;

so that, if e, e', e'' be the distances of the three conjugate points from the centre, and d, d', d'' the semi-diameters respectively parallel to them, the area of the triangle will be given by the equation

$$A = \tfrac{1}{2}ab\sqrt{\left[-\left(\frac{e^2}{d^2}-1\right)\left(\frac{e'^2}{d'^2}-1\right)\left(\frac{e''^2}{d''^2}-1\right)\right]}$$

§. V.

On redundant Systems, and Groups of Determinants.

The system

$$(1.)\quad \begin{cases} (1,1)x_1+(1,2)x_2+\cdots+(1,n)x_n=u_1 \\ (2,1)x_1+(2,2)x_2+\cdots+(2,n)x_n=u_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (m,1)x_1+(m,2)x_2+\cdots+(m,n)x_n=u_m, \end{cases}$$

where $m>n$, may be called *redundant System*, there being more equations than necessary to determine the unknown quantities. There are, however, some remarkable formulae connected with the solution of these equations, which may be here noticed. Suppose from the above system there be formed the following derived system:

$$(2.)\quad \begin{cases} (1,1)''x_1+(1,2)''x_2+\cdots+(1,n)''x_n=v_1 \\ (2,1)''x_1+(2,2)''x_2+\cdots+(2,n)''x_n=v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)''x_1+(n,2)''x_2+\cdots+(2,n)''x_n=v_n, \end{cases}$$

where

$$(3.)\quad \begin{cases} (1,1)'u_1+(1,2)'u_2+\cdots+(1,m)'u_m=v_1 \\ (2,1)'u_1+(2,2)'u_2+\cdots+(2,m)'u_m=v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)'u_1+(n,2)'u_2+\cdots+(n,m)'u_m=v_n, \end{cases}$$

so that the values of $(1,1)''$, $(1,2)''$, .. are obvious, being in fact identical with the constituents of the determinant discussed in §. (II.)

Then every group of n equations out of the first system, will give as usual:

$$(4.)\quad \begin{cases} \nabla(x_1)=[1,1]u_1+[1,2]u_2+\cdots+[1,n]u_n \\ \nabla(x_2)=[2,1]u_1+[2,2]u_2+\cdots+[2,n]u_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \nabla(x_n)=[n,1]u_1+[n,2]u_2+\cdots+[n,n]u_n \end{cases}$$

where $x_1, x_2, \ldots$ have been enclosed in parentheses, to indicate that their values have been deduced from a redundant system.

And the derived system will give

$$(5.)\quad \begin{cases} \nabla'' x_1 = [1,1]'' v_1 + [1,2]'' v_2 + \cdots + [1,n]'' v_n \\ \nabla'' x_2 = [2,1]'' v_1 + [2,2]'' v_2 + \cdots + [2,n]'' v_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \nabla'' x_n = [n,1]'' v_1 + [n,2]'' v_2 + \cdots + [n,n]'' v_n \end{cases}$$

But if there be formed a series of partially derived systems, that is, systems derived by taking into account in succession the groups of n only out of the given equations, or, in other words, by putting $(m-n)$ of the quantities $u_1, u_2 \ldots\ldots u_m$, in turn equal to zero, the quantities ∇'', $[1,1]''$, $[1,2]''$, ... in each such system will be reduced simply to the determinants considered in §. V.; and in fact, when the first n out of the given equations are taken into account, or, which is the same thing, when in the equations immediately above,

$$u_{n+1} = 0, \quad u_{n+1} = 0, \ \cdots \cdot u_m = 0,$$

then by the principles of §. V.:

$$\nabla'' = \nabla\nabla'$$

$$(6.)\quad \begin{cases} [1,1]'' = [1,1]\,[1,1]', \quad [1,2]'' = [1,2]\,[2,1]', \ldots [1,n]'' = [1,n]\,[n,1]' \\ [2,1]'' = [2,1]\,[1,2]', \quad [2,2]'' = [2,2]\,[2,2]', \ldots [2,n]'' = [2,n]\,[n,2]' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [n,1]'' = [n,1]\,[1,n]', \quad [n,2]'' = [n,2]\,[2,n]', \ldots [n,n]'' = [n,n]\,[n,n]', \end{cases}$$

so that the first group of equations will become:

$$(7.)\quad \begin{cases} \nabla\nabla'(x_1) = [1,1]\,[1,1]' v_1 + [1,2]\,[2,1]' v_2 + \cdots + [1,n]\,[n,1]' v_n \\ \nabla\nabla'(x_2) = [2,1]\,[1,2]' v_1 + [2,2]\,[2,2]' v_2 + \cdots + [2,n]\,[n,2]' v_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \nabla\nabla'(x_n) = [n,1]\,[1,n]' v_1 + [n,2]\,[2,n]' v_2 + \cdots + [n,n]\,[n,n]' v_n \end{cases}$$

Hence, summing all the corresponding equations of the various groups so formed, it is not difficult to see that by the principles of the addition and multiplication of determinants,

$$(8.)\left\{\begin{array}{l}\Sigma[1,1]\,[1,1]' = [1,1]'',\ \ \Sigma[1,2]\,[1,2]' = [1,2]'', .. \Sigma[1,n]\,[1,n]' = [1,n]'' \\ \Sigma[2,1]\,[2,1]' = [2,1]'',\ \ \Sigma[2,2]\,[2,2]' = [2,2]'', .. \Sigma[2,n]\,[2,n]' = [2,n]'' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma[n,1]\,[n,1]' = [n,1]''\ \ \Sigma[n,2]\,[n,2]' = [n,2]'', .. \Sigma[n,n]\,[n,n]' = [n,n]'', \end{array}\right.$$

$$\Sigma\nabla\nabla' = \nabla''$$

and consequently,

$$(9.)\qquad x_1 = \frac{\Sigma\nabla\nabla'(x_1)}{\Sigma\nabla\nabla'},\quad x_2 = \frac{\Sigma\nabla\nabla'(x_2)}{\Sigma\nabla\nabla'}, .. \ x_n = \frac{\Sigma\nabla\nabla'(x_n)}{\Sigma\nabla\nabla'}$$

The number of groups will be

$$m.\frac{(m-1)..(m-n+1)}{1,2..n} = n.\frac{(m-1)..(n-1)}{(1,2..(m-n)}$$

Hence the following theorem may be enunciated:

Theorem XVIII. *If there be* m *linear equations involving* n *variables,* m *being* $>$ n, *or* m $=$ n, *the values of the variables may be determined by solving the partially derived systems corresponding to each group of* n *equations, and dividing the sum of the values so found, each multiplied by its respective determinant, by the determinant of the completely derived system.*

A particular case of these equations is met with in the method of least squares; for let

$$U = \Sigma\{(1,i)x_1 + (2,i)x_2 + .. + (n,i)x_n - u_i\}^2,$$

the equations

$$\tfrac{1}{2}\frac{dU}{dx_1} = 0\ ,\ \tfrac{1}{2}\frac{dU}{dx_2} = 0\ ,\ ..\ \tfrac{1}{2}\frac{dU}{dx_n} = 0$$

will in fact give:

$$\begin{array}{c}\Sigma(1,i)\{(1,i)x_1 + (2,i)x_2 + .. + (n,i)x_n - u_i\} = 0 \\ \Sigma(2,i)\{(1,i)x_1 + (2,i)x_2 + .. + (n,i)x_n - u_i\} = 0 \\ \cdot\ \ \cdot\cdot\ \ \cdot \\ \Sigma(n,i)\{(1,i)x_1 + (2,i)x_2 + .. + (n,i)x_n - u_i\} = 0,\end{array}$$

and will differ from those given above only in the conditions

$$
\begin{array}{llll}
(1,1)' = (1,1) \;, & (1,2)' = (1,2) \;, & .. & (1,m)' = (1,m) \\
(2,2)' = (2,1) \;, & (2,2)' = (2,2) \;, & .. & (2,m)' = (2,m) \\
\cdot & \cdot & .. & \cdot \\
(m,1)' = (m,1) \;, & (m,2)' = (m,2) \;, & .. & (m,m)' = (m,m),
\end{array}
$$

and consequently also

$$
\begin{array}{llll}
[1,1]' = [1,1] \;, & [1,2]' = [1,2] \;, & .. & [1,m]' = [1,m] \\
[2,1]' = [2,1] \;, & [2,2]' = [2,2] \;, & .. & [2,m]' = [2,\mathrm{m}] \\
\cdot & \cdot & .. & \cdot \\
[m,1]' = [m,1] \;, & [m,2]' = [m,2] \;, & .. & [m,m]' = [m,m]
\end{array}
$$

and finally,

$$x_1 = \frac{\Sigma\nabla^2(x_1)}{\Sigma\Delta^2} \;,\; x_2 = \frac{\Sigma\nabla^2(x_2)}{\Sigma\nabla^2} \;,\; x_n = \frac{\Sigma\nabla^2(x_n)}{\Sigma\nabla^2}$$

Hence also the following theorem may be enunciated:

Theorem XIX. *If there be* m *linear equations involving* n *variables,* m *being* $>n$, *or* $=$ n, *and if the values of the variables deduced from each group of* n *equations be multiplied by the square of its corresponding determinant, the sum of all such quantities, divided by the sum of the determinants, will express the values of the variables deduced from the equations by the method of least square.*

The square of the determinant corresponding to each group is called the *weight of combination.*

Before quitting this subject, there are one or two points which may be noticed. The solution of the equations arising from equating the partial differential coefficients of U to zero, may be thus written:

$$
\begin{array}{l}
\nabla' x_1 = [1,1]' u'_1 + [1,2]' u'_2 + \cdots + [1,n]' u'_n \\
\nabla' x_2 = [2,1]' u'_1 + [2,2]' u'_2 + \cdots + [2,n]' u'_n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\nabla' x_n = [n,1]' u'_1 + [n,2]' u'_2 + \cdots + [n,n]' u'_n \,,
\end{array}
$$

where

$$
\begin{array}{l}
u' = (1,1)u_1 + (1,2)u_2 + \cdots + (1,n)u_n \\
u'_2 = (2,1)u_1 + (2,2)u_2 + \cdots + (2,n)u_n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u'_n = (n,1)u_1 + (n,2)u_2 + \cdots + (n,n)u_n \,,
\end{array}
$$

in which expressions the quantities

$$\frac{\nabla}{[1,1]} = \frac{\Sigma\nabla^2}{\Sigma[1,1]^2}, \quad \frac{\nabla}{[2,2]} = \frac{\Sigma\nabla^2}{\Sigma[2,2]^2}, \; \ldots \; \frac{\nabla}{[n,n]} = \frac{\Sigma\nabla^2}{\Sigma[n,n]^2}$$

are called the *weights* of the determinations of $x_1, x_2, \ldots x_n$. If only n observations be taken into account, the numerators of these expressions become simply ∇^2. If ε be the error to be feared in a determination whose weight is unity, the errors $E_1, E_2, \ldots E_n$ to be feared in the above determinations will be

$$E_1 = \pm\varepsilon\sqrt{\frac{\Sigma[1,1]^2}{\Sigma\nabla^2}}, \quad E_2 = \pm\varepsilon\sqrt{\frac{\Sigma[2,2]^2}{\Sigma\nabla^2}}, \quad \ldots \quad E_n = \pm\varepsilon\sqrt{\frac{\Sigma[n,n]^2}{\Sigma\nabla^2}}$$

§. VI.

On Skew Determinants.

A determinant whose constituents satisfy the conditions

$$(1.)\left\{\begin{array}{llll} * & (1,2)+(2,1)=0, & \ldots & (1,n)+(n,1)=0 \\ (2,1)+(1,2)=0, & * & \ldots & (2,n)+(n,2)=0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1)+(1,n)=0, & (n,2)+(2,n)=0, & \ldots & * \end{array}\right.$$

In this case

$$\nabla = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \ldots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \ldots & (2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & \ldots & (n,n) \end{vmatrix}$$

then writing

$$(2.)\left\{\begin{array}{lll} \nabla|1,1| = 2(1,1)[1,1]-\nabla, & \nabla|1,2| = 2(2,2)[1,2] & \ldots \; \nabla|1,n| = 2(n,n)[1,n] \\ \nabla|2,1| = 2(1,1)[2,1] & \nabla|2,2| = 2(2,2)[2,2]-\nabla & \ldots \; \nabla|2,n| = 2(n,n)[2,n] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \nabla|n,1| = 2(1,1)[n,1] & \nabla|n,2| = 2(2,2)[n,2] & \ldots \; \nabla|n,n| = 2(n,n)[n,n]-\nabla \end{array}\right.$$

and forming the determinants of the expressions on each side of these quantities, we have:

$$\nabla^n \begin{vmatrix} |1,1| & |1,2| & \ldots & |1,n| \\ |2,1| & |2,2| & \ldots & |2,n| \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ |n,1| & |n,2| & \ldots & |n,n| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(1,1)[1,1]-\nabla & 2(2,2)[1,2] & \ldots & 2(n,n)[1,n] \\ 2(1,1)[2,1] & 2(2,2)[2,2]-\nabla & \ldots & 2(n,n)[2,n] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2(1,1)[n,1] & 2(2,2)[n,2] & \ldots & 1(n,n)[n,n-]\nabla \end{vmatrix}$$

which, after an interesting but somewhat troublesome reduction, is found to be $= \nabla^n$; so that

$$(3.)\qquad \begin{vmatrix} \{1,1\} & \{1,2\} & \cdot\cdot & \{1,n\} \\ \{2,1\} & \{2,2\} & \cdot\cdot & \{2,n\} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \{n,1\} & \{n,2\} & \cdot\cdot & \{n,n\} \end{vmatrix} = 1,$$

a relation which expresses the compatibility of the system (11) written below.

The following is the reduction of the case, where $n = 3$;

$$\nabla^3 \begin{vmatrix} \{1,1\} & \{1,2\} & \{1,3\} \\ \{2,1\} & \{2,2\} & \{2,3\} \\ \{3,1\} & \{3,2\} & \{3,3\} \end{vmatrix},$$

or

$$\nabla\Big\{ (1,1)(2,2)(3,3)2^3 - 3,(1,1)(2,2)(3,3)2^2 + 3,\left(\begin{matrix}(1,1)(2,2)(3,3) \\ +(2,3)^2(1,1) \\ +(3,1)^2(2,2) \\ +(1,2)^2(3,3)\end{matrix}\right)2 - \left(\begin{matrix}(1,1)(2,2)(3,3) \\ +(2,3)^2(1,1) \\ +(3,1)^2(2,2) \\ +(1,2)^2(3,3)\end{matrix}\right)\Big\}$$

$$= \nabla^2\{(1,1)(2,2)(3,3) + (2,3)^2(1,1) + (3,1)^2(2,2) + (1,2)^2(3,3)\}$$

$$= \nabla^3\,]$$

The formula (2) of the present section give rise to the following relations:

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} \nabla &= \frac{(1,1)}{[1,1]}\{[1,1]^2 + [1,2]^2 + \ldots + [1,n]^2\} \\ &= \frac{(2,2)}{[2,2]}\{[1,2]^2 + [2,2]^2 + \ldots + [2,n]^2\} \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{(n,n)}{[n,n]}\{[1,n]^2 + [2,n]^2 + \ldots + [n,n]^2\} \end{aligned}\right.$$

$$(5.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\{(1,1)[1,2] + (2,2)[2,1]\}\nabla - 2(1,1)(2,2)\{[1,1][1,2] + [2,1][2,2] + \ldots + [n,1][n,2]\} = 0 \\ &\{(1,1)[1,3] + (3,3)[3,1]\}\nabla - 2(1,1)(3,3)\{[1,1][1,3] + [2,1][2,3] + \ldots + [n,1][n,3]\} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\{(2,2)[2,3] + (3,3)[3,2]\}\nabla - 2(2,2)(3,3)\{[1,2][1,3] + [2,2][2,3] + \ldots + [n,2][n,3]\} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$(6.)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1,1)\{1,1\} + (2,1)\{2,1\} + \ldots + (n,1)\{n,1\} = (1,1) \\ &(1,2)\{1,2\} + (2,2)\{2,2\} + \ldots + (n,2)\{n,2\} = (2,2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(1,2)\{1,1\} + (2,2)\{2,1\} + \ldots + (n,2)\{n,1\} = -(1,2) \\ &(1,1)\{1,2\} + (2,1)\{2,2\} + \ldots + (n,1)\{n,2\} = -(2,1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

The same result is readily obtained by means of linear equations, as follows.

Consider the system

$$(7.)\quad\begin{cases} (1,1)x_1+(1,2)x_2+\cdots+(1,n)x_n=u_1\\ -(1,2)x_1+(2,2)x_2+\cdots+(2,n)x_n=u_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -(1,n)x_1-(2,n)x_2+\cdots+(n,n)x_n=u_n \end{cases}$$

and also the derived system

$$(8.)\quad\begin{cases} (1,1)x_1-(1,2)x_2-\cdots-(1,n)x_n=\varrho_1\\ (1,2)x_1+(2,2)x_2-\cdots-(2,n)x_n=\varrho_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (1,n)x_1+(2,n)x_2+\cdots+(n,n)x_n=\varrho_n, \end{cases}$$

whence, multiplying the given equations respectively by the factors

$$\begin{matrix} \{1,1\},\ \{1,2\},\ \cdots\{1,n\}\\ \{2,1\},\ \{2,2\},\ \cdots\{2,n\}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \{n,1\},\ \{n,2\},\ \cdots\{n,n\}, \end{matrix}$$

there results

$$(9.)\quad\begin{cases} \{1,1\}u_1+\{1,2\}u_2+\ \cdots\ +\{1,n\}u_n=\varrho_1\\ \{2,1\}u_1+\{2,2\}u_2+\ \cdots\ +\{2,n\}u_n=\varrho_2\\ \quad\cdot\qquad\quad\cdot\qquad\ \cdot\cdot\qquad\quad\cdot\\ \{n,1\}u_1+\{n,2\}u_2+\ \cdots\ +\{n,n\}u_n=\varrho_n \end{cases}$$

and, similarly, from the derived system,

$$(10.)\quad\begin{cases} \{1,1\}\varrho_1+\{2,1\}\varrho_2+\ \cdots\ +\{n,1\}\varrho_n=u_1\\ \{1,2\}\varrho_1+\{2,2\}\varrho_2+\ \cdots\ +\{n,1\}\varrho_n=u_2\\ \quad\cdot\qquad\quad\cdot\qquad\ \cdot\cdot\qquad\quad\cdot\\ \{1,n\}\varrho_1+\{2,n\}\varrho_2+\ \cdots\ +\{n,n\}\varrho_n=u_n \end{cases}$$

so that

$$(11.)\quad\begin{cases} \{1,1\}^2+\{2,1\}^2+\cdots\{n,1\}^2=1, & \{1,1\}\{1,2\}+\{2,1\}\{2,2\}+\cdots\{n,1\}\{n,2\}=0,\cdots & \{1,1\}\{1,n\}+\{2,1\}\{2,n\}+\cdots\{n,1\}\\ \{1,2\}\{1,1\}+\{2,2\}\{2,1\}+\cdots\{n,2\}\{n,1\}=0, & \{1,1\}^2+\{2,2\}^2+\cdots\{n,2\}^2=1, & \cdots\{1,2\}\{1,n\}+\{2,2\}\{2,n\}+\cdots\{n,2\}\\ & \quad\cdot & \cdot\cdot\\ \{1,n\}\{1,1\}+\{2,n\}\{2,1\}+\cdots\{n,n\}\{n,1\}=0, & \{1,n\}\{1,2\}+\{2,n\}\{2,2\}+\cdots\{n,n\}\{n,2\}=0\cdots & \{1,n\}^2+\{2,n\}^2+\cdots\{n,n\}^2=1 \end{cases}$$

We have therefore found a system of n^2 quantities $\{1,1\}$, $\{1,2\}$.., rational functions of $\frac{1}{2}n(n-1)$ independent variables, $(1,1),(1,2)$.. and satisfying the conditions given above.

As an example let $n = 3$, and

$$\nabla = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

then, for the inverse system, we have

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda^2 & \lambda\mu + \nu & \nu\lambda - \mu \\ \lambda\mu - \nu & 1 + \mu^2 & \mu\nu + \lambda \\ \nu\lambda + \mu & \mu\nu - \lambda & 1 + \nu^2 \end{vmatrix}$$

and therefore,

$$\begin{array}{lll} \nabla\{1.1\} = 1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2, & \nabla\{1,2\} = 2(\lambda\mu + \nu), & \nabla\{1,3\} = 2(\nu\lambda - \mu) \\ \nabla\{2,1\} = 2(\lambda\mu - \nu), & \nabla\{2,2\} = 1 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2, & \nabla\{2,3\} = 2(\mu\nu + \lambda) \\ \nabla\{3,1\} = 2(\nu\lambda + \mu), & \nabla\{3,2\} = 2(\mu\nu - \lambda), & \nabla\{3,3\} = 1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2, \end{array}$$

which will consequently express the values of the nine direction-cosines in the transformation from one set of rectangular co-ordinates to another, the formulae of transformation being,

$$\begin{array}{ll} x = \{1,1\}\xi + \{1,2\}\eta + \{1,3\}\zeta & \xi = \{1,1\}x + \{2,1\}y + \{3,1\}z \\ y = \{2,1\}\xi + \{2,2\}\eta + \{2,3\}\zeta & \eta = \{1,2\}x + \{2,2\}y + \{3,2\}z \\ z = \{3,1\}\xi + \{3,2\}\eta + \{3,3\}\zeta & \zeta = \{1,3\}x + \{2,3\}y + \{3,3\}z. \end{array}$$

A skew determinant is said to be *symmetrical* when

$$(12.)\left\{\begin{array}{llll} (1,1) = 0 & (1,2) + (2.1) = 0, & \ldots & (1,n) + (n,1) = 0 \\ (2,1) + (1,2) = 0, & (2,2) = 0, & \ldots & (2,n) + (n,2) = 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ (n,1) + (1,n) = 0, & (n,2) + (2,n) = 0, & \ldots & (n,n) = 0. \end{array}\right.$$

The given and derived systems then give

$$u_1 + v_1 = 0, \quad u_2 + v_2 = 0, \ldots \quad u_n + v_n = 0$$

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$$

and consequently,

$$\begin{array}{l} \nabla x_1 = [1,1]u_1 + [1,2]u_2 + \cdots + [1,n]u_n = [1,1]v_1 + [2,1]v_2 + \cdots + [n,1]v_n \\ \nabla x_2 = [2,1]u_1 + [2,2]u_2 + \cdots + [2,n]u_n = [1.2]v_1 + [2,2]v_2 + \cdots + [n,2]v_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nabla x_n = [n,1]u_1 + [n,2]u_2 + \cdots + [n,n]u_n = [1,n]v_1 + [2,n]v_2 + \cdots + [n,n]v_n, \end{array}$$

and consequently

$$\begin{array}{l}
2\nabla x_1 = \quad 0 \quad + ([1,2] - [2,1])u_2 + \cdots + ([1,n] - [n,1])u_n \\
2\nabla x_2 = ([2,1] - [1,2])u_1 + \quad 0 \quad + \cdots + ([2,n] - [n,2])u_n \\
\dotfill \\
2\nabla x_n = ([n,1] - [1,n])u_1 + ([n,2] - [2,n])u_2 + \cdots + \quad 0,
\end{array}$$

on the other hand

$$\begin{array}{l}
0 = 2[1,1]u_1 + ([1.2] + [2,1])u_2 + \cdots + ([1,n] + [n,1]u_n \\
0 = ([2,1] + [1,2]u_1 + 2[2,2])u_2 + \cdots + ([2,n] + [n,2]u_n \\
\dotfill \\
0 = ([n,1] + [1,n]u_1 + ([n,2]) + [2,n]u_2 + \cdots + 2[n,n]u_n,
\end{array}$$

and the comparison of these three systems gives either

$$\nabla = 0$$

$$(13.)\left\{\begin{array}{llll}
* & [1,2], = [2,1], & \ldots & [1,n] = [n,1] \\
{[2,1]} = [1,2], & * & \ldots & [2,n] = [n,2] \\
\dotfill & & & \\
{[n.1]} = [1,n], & & . & *
\end{array}\right.$$

or

$$(14.)\left\{\begin{array}{lll}
{[1,1]} = 0 & [1,2]+[2,1] = 0, \ldots & [1,n]+[n,1] = 0 \\
{[2,1]} + [1,2] = 0, & [1,2] = 0, \quad \ldots & [2.n]+[n,2] = 0 \\
\dotfill & & \\
{[n,1]} + [1,n] = 0, & [n,2] + [2,n] = 0, \ldots & [n,n] = 0,
\end{array}\right.$$

and consequently either a symmetrical skew determinant of an even order, or a determinant of an odd order, always vanishes; but since it is found on trial that for $n = 1, 3, \cdots\cdots$, ∇ vanishes, while for $n = 2, 4 \cdots\cdots$, it does not, the following theorems may be enunciated.

Theorem XX. *A symmetrical skew determinant of an odd order in general vanishes, and the system has for its inverse a quadratic skew system.*

The term „quadratic system" has not yet been defined, but for the present it may be considered as defined by the equations (13).

Theorem XXI. *A symmetrical skew determinant of an even order does not in general vanish, but the system has for its inverse a symmetrical skew system.*

If n be even, a determinant of this class admits of the following reduction: it is easily shown that

$$\begin{vmatrix} * & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ (2,1) & * & \cdots & (2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & \cdots & * \end{vmatrix} = (1,2)^2 \begin{vmatrix} * & (3,4) & \cdots & (3,n) \\ (4,3) & * & \cdots & (4,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,3) & (n,4) & \cdots & * \end{vmatrix} + 2(1,2)(1,3) \begin{vmatrix} (3,4) & (3,5) & \cdots & (3,2) \\ * & (4,5) & \cdots & (4,2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,4) & (n,5) & \cdots & (n,2) \end{vmatrix}$$

but

$$\begin{vmatrix} (3,4) & (3,5) & \cdots & (3,2) \\ * & (4,5) & \cdots & (4,2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,4) & (n,5) & \cdots & (n,2) \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} (3,2) & (3,4) & \cdots & (3,n) \\ (4,2) & * & \cdots & (4,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,2) & (n,4) & \cdots & * \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} (2,3) & (2,4) & \cdots & (2,n) \\ (4,3) & * & \cdots & (4,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,3) & (n,4) & \cdots & * \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} (3,2) & (3,4) & \cdots & (3,n) \\ (4,2) & * & \cdots & (4,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,2) & (n,4) & \cdots & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & (2,4) & \cdots & (2,n) \\ (4,2) & * & \cdots & (4,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,2) & (n,4) & \cdots & * \end{vmatrix} \begin{vmatrix} * & (3,4) & \cdots & (3,n) \\ (4,3) & * & \cdots & (4,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,3) & (n,4) & \cdots & * \end{vmatrix}$$

since the coefficients of (2,3) and (3,2), being symmetrical skew determinants of an *odd* order, vanish: so that finally:

$$(15.)\quad \begin{vmatrix} * & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ (2,1) & * & \cdots & (4,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & \cdots & * \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = (1,2) \begin{vmatrix} * & (3,4) & \cdots & (3,n) \\ (4,3) & * & \cdots & (4,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,3) & (n,4) & \cdots & * \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + (1,3) \begin{vmatrix} * & (4,5) & \cdots & (4,2) \\ (5,4) & * & \cdots & (5,2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (2,4) & (2,5) & \cdots & * \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + \cdots$$

If in the determinant

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ -(1,2) & (2,2) & \cdots & (2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(1,n) & -(2,n) & \cdots & (n,n) \end{vmatrix}$$

the quantities (1,1), (2,2), .. (n,n) be put simultaneously equal to zero, the terms independent of these quantities will remain; if all, but one of them, be put equal to zero, those terms which involve that quantity will remain; if all but two be put equal to zero, those terms which involve their product will remain, and so on; so that a general skew determinant may be thus expressed;

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,n) \\ -(1,2) & (2,2) & .. & (2,n) \\ . & . & .. & . \\ -(1,n) & -(2,n) & .. & (n,n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & (1,2) & .. & (1,n) \\ -(1,2) & * & .. & (2,n) \\ . & . & .. & . \\ -(1,n) & -(2,n) & .. & * \end{vmatrix}$$

$$+(1,1)\begin{vmatrix} * & (2,3) & .. & (2,n) \\ -(2,3) & * & .. & (3,n) \\ . & . & .. & . \\ -(2,n) & -(3,n) & .. & * \end{vmatrix} + (2,2)\begin{vmatrix} * & (3,4) & .. & (3,1) \\ -(3,4) & * & .. & (4,1) \\ . & . & .. & . \\ -(3,1) & -(4,1) & .. & * \end{vmatrix}$$

$$+ .. + (1,1)\,(2,2)\begin{vmatrix} * & (3,4) & .. & (3,n) \\ -(3,4) & * & .. & (4,n) \\ . & . & .. & . \\ -(3,n) & -(4,n) & .. & * \end{vmatrix} + ..$$

Hence, if n be even,

$$(16)\left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,n) \\ -(1,2) & (2,2) & .. & (2,n) \\ . & . & .. & . \\ -(1,n) & -(2,n) & .. & (n,n) \end{vmatrix} = \left[(1,2)\begin{vmatrix} * & (3,4) & .. & (3,n) \\ -(3,4) & * & .. & (4,n) \\ . & . & .. & . \\ -(3,n) & -(4,n) & .. & * \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + (1,3)\begin{vmatrix} * & (4,5) & .. & (4,2) \\ -(4,5) & * & .. & (5,2) \\ . & . & .. & . \\ -(4,2) & -(5,2) & .. & * \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + ..\right]^2 \\ &+ (1,1)\,(2,2)\left[(3,4)\begin{vmatrix} * & (5,6) & .. & (5,n) \\ -(5,6) & * & .. & (6,n) \\ . & . & .. & . \\ -(5,n) & -(6,n) & .. & * \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + (3,5)\begin{vmatrix} * & (6,7) & .. & (6,4) \\ -(6,7) & * & .. & (7,4) \\ . & . & .. & . \\ -(6,4) & -(7,4) & .. & * \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + ..\right]^2 \\ &+ .. + (1,1)\,(2,2)\,..\,(n,n), \end{aligned}\right.$$

and if n be odd,

$$(17)\left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & .. & (1,n) \\ -(1,2) & (2,2) & .. & (2,n) \\ . & . & .. & . \\ -(1,n) & -(2,n) & .. & (n,n) \end{vmatrix} = (1,1)\left[(2,3)\begin{vmatrix} * & (4,5) & .. & (4,n) \\ -(4,5) & * & .. & (5,n) \\ . & . & .. & . \\ -(4,n) & -(5,n) & .. & * \end{vmatrix} + (2,4)\begin{vmatrix} * & (5,6) & .. & (5,3) \\ -(5,6) & * & .. & (6,3) \\ . & . & .. & . \\ -(5,3) & -(6,3) & .. & * \end{vmatrix} + .\right]^2 \\ &+ (2,2)\left[(3,4)\begin{vmatrix} * & (5,6) & .. & (5,1) \\ -(5,6) & * & .. & (6,1) \\ . & . & .. & . \\ -(5,1) & -(6,1) & .. & . \end{vmatrix} + (3,5)\begin{vmatrix} * & (6,7) & .. & (6,4) \\ -(6,7) & * & .. & (7,4) \\ . & . & .. & . \\ -(6,4) & -(7,4) & .. & . \end{vmatrix} + ..\right]^2 \\ &+ .. + (1,1)\,(2,2)\,..\,(n,n), \end{aligned}\right.$$

§. VII.

Expressions for a Determinant and its Constituents in Terms of its Differential-Coefficients.

It appears from the preceeding section that a determinant may be expressed in any of the following forms:

$$(1.)\quad \begin{cases} \nabla = (1,1)[1,1] + (1,2)[2,1] + \ldots + (1,n)[n,1] \\ \quad = (2,1)[1,2] + (2,2)[2,2] + \ldots + (2,n)[n,2] \\ \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad = (n,1)[1,n] + (n,2)[2,n] + \ldots + (n,n)[n,n], \end{cases}$$

and consequently

$$(2.)\quad \begin{cases} [1,1] = \dfrac{d\nabla}{d(1,1)}\,, & [1,2] = \dfrac{d\nabla}{d(2,1)}\,, & \ldots & [1,n] = \dfrac{d\nabla}{d(n,1)}\,, \\ [2,1] = \dfrac{d\nabla}{d(1,2)}\,, & [2,2] = \dfrac{d\nabla}{d(2,2)}\,, & \ldots & [2,n] = \dfrac{d\nabla}{d(n,2)}\,, \\ \cdot & \cdot & & \cdot\cdot \\ [n,1] = \dfrac{d\nabla}{d(1,n)}\,, & [n,2] = \dfrac{d\nabla}{d(2,n)}\,, & \ldots & [n,n] = \dfrac{d\nabla}{d(n,n)}, \end{cases}$$

so that $D\nabla$ may be expressed as follows:

$$(3.)\quad \begin{cases} D\nabla = [1,1]d(1,1) + [2,1]d(1,2) + \ldots + [n,1]d(1,n) \\ \quad = [1,2]d(2,1) + [2,2]d(2,2) + \ldots + [n,2]d(2,n) \\ \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots + [n,n]d(n,n) \\ \quad = [1,n]d(n,1) + [2,n]d(n,2) + \ldots + [n,n]d(n,n). \end{cases}$$

Inversely also:

$$(4.)\quad \begin{cases} (1,1) = \dfrac{d\nabla}{d[1,1]}\,, & (1,2) = \dfrac{d\nabla}{d(2,1)}\,, & \ldots & (1,n) = \dfrac{d\nabla}{d(n,1)} \\ (2,1) = \dfrac{d\nabla}{d[1,2]}\,, & (2,1) = \dfrac{d\nabla}{d[2,2]}\,, & \ldots & (2,n) = \dfrac{d\nabla}{d[n,2]} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ (n,1) = \dfrac{d\nabla}{d[1,n]}\,, & (n,2) = \dfrac{d\nabla}{d[2,n]}\,, & \ldots & (n,n) = \dfrac{d\nabla}{d[u,n]} \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} D\nabla = (1,1)d[1,1] + (2,1)d[1,2] + \ldots + (n,1)d[1,n] \\ \quad = (1,2)d[2,1] + (2,2)d[2,2] + \ldots + (n,2)d[2,n] \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad = (1,n)d[n,1] + (2,n)d[n,2] + \ldots + (n,n)d[n,n]; \end{cases}$$

and similarly for the coefficients (2, 1), (2, 2), .. (3, 1) (3, 2), ...

By means of these properties a certain class of linear equations may be reduced to a remarkable form.

The solutions of the equations

$$\begin{aligned}(1,1)x_1 + (1,2)x_2 + \cdots + (1,n)x_n &= u_1\\(1,2)x_1 + (2,2)x_2 + \cdots + (2,n)x_n &= u_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\(1,n)x_1 + (2,n)x_2 + \cdots + (n.n)x_n &= u_n\end{aligned}$$

may be thus written:

$$\begin{aligned}\nabla x_1 &= \frac{d\nabla}{d(1,1)}u_1 + \frac{d\nabla}{d(2,2)}u_2 + \cdots + \frac{d\nabla}{d(1,n)}u_n\\\nabla x_2 &= \frac{d\nabla}{d(1,2)}u_1 + \frac{d\nabla}{d(2,2)}u_2 + \cdots + \frac{d\nabla}{d(2,n)}u_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\\nabla x_n &= \frac{d\nabla}{d(1,n)}u_1 + \frac{d\nabla}{d(2,n)}u_2 + \cdots + \frac{d\nabla}{d(n,n)}u_n,\end{aligned}$$

and if there be a series of systems like the above, in which the unknown quantities are

$$\begin{matrix}x_{1,1} & x_{1,2} \,..\, x_{1,n}\\x_{2,1} & x_{2,2} \,..\, x_{2,n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\x_{n,1} & x_{n,2} \,..\, x_{n,n}\end{matrix}$$

respectively, the coefficients remaining the same, and the second members of the systems being

$$\begin{matrix}\delta(1,1), & \delta(2,2)+((1,2)), & ..\ \delta(n,n)+((1,n))\\\delta(1,1)-((1,2)), & \delta(2,2) & ..\ \delta(n,n)+((2,n))\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\\delta(1,1)-((1,n)), & \delta(2,2)-((2,n)), & ..\ \delta(n,n)),\end{matrix}$$

then:

$$\begin{aligned}\nabla x_{1,1} &= \frac{d\nabla}{d(1,1)}\delta(1,1) + \frac{d\nabla}{d(1,2)}\delta(2,2) + \cdots + \frac{d\nabla}{d(1,n)}\delta(n,n) + * + \frac{d\nabla}{d(1,2)}((1,2)) + \cdots + \frac{d\nabla}{d(1,n)}((1,n))\\\nabla x_{2,2} &= \frac{d\nabla}{d(1,2)}\delta(1,1) + \frac{d\nabla}{d(2,2)}\delta(2,2) + \cdots + \frac{d\nabla}{d(2,n)}\delta(n,n) - \frac{d\nabla}{d(1,2)}((1,2)) + * \cdots + \frac{d\nabla}{d(2,n)}((2,n))\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\\nabla x_{n,n} &= \frac{d\nabla}{d(1,n)}\delta(1,1) + \frac{d\nabla}{d(2,n)}\delta(2,2) + \cdots + \frac{d\nabla}{d(n,n)}\delta(n,n) - \frac{d\nabla}{d(1,n)}((1,n)) - \frac{d\nabla}{d(2,n)}((2,n)) \cdots + *,\end{aligned}$$

whence

$$\nabla(x_{1,1} + x_{2,2} + \cdots + x_{n,n}) = \delta\nabla,$$

or

$$x_{1,1} + x_{2,2} + \cdots x_{n,n} = \delta \log \nabla$$

where

$$\delta\nabla = \Sigma_i \Sigma_j \cdot \frac{d\nabla}{\delta(i,j)} \delta(i,j).$$

The following theorem, given by M. *Malmstèn*, will exemplify the use of determinants and the notation above adopted.

Let it be required to find the nth *particular integral* of the equation

$$(0,n) + \mathrm{P}(0,n-1) + \cdots + \mathrm{T}(0,0) = 0,$$

where

$$(0,0) = y, \quad (0,1) = \frac{dy}{dx} \cdots (0,n) = \frac{d^n y}{dx^n},$$

when $(n-1)$ particular integrals

$$(1.0), \quad (2,0), \ldots (n,0)$$

are known. Suppose that

$$(0,0) = (1,0)k_1 + (2,0)k_2 + \cdots + (n-1,0)k_{n-1},$$

where $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$ are to be so determined that the above value of $(0,0)$ shall satisfy the given equation. Suppose then, moreover, that

$$\begin{array}{l}
(1,0)k'_1 + (2,0)k'_2 + \cdots + (n-1,0)k'_{n-1} = 0 \\
(1,1)k'_1 + (2,1)k'_2 + \cdots + (n-1,1)k'_{n-1} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(1,n-3)k'_1 + (2,n-3)k'_2 + \cdots + (n-1,n-3)k'_{n-1} = 0,
\end{array}$$

the solutions of which are

$$k'_1 : k'_2 : \cdots k'^{n-1}$$

$$= \left|\begin{array}{cccc} (2,0) & (3,0) & \ldots & (n-1,0) \\ (2,1) & (3,1) & \ldots & (n-1,1) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ (2,n-3) & (3,n-3) & \ldots & (n-1,n-3) \end{array}\right| : \pm \left|\begin{array}{cccc} (3,0) & (4,0) & \ldots & (1,0) \\ (3,1) & (4,1) & \ldots & (1,1) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ (3,n-3) & (4,n-3) & \ldots & (1,n-3) \end{array}\right| : \cdots \pm \left|\begin{array}{cccc} (1,0) & (2,0) & \ldots & (n-2,0) \\ (1,1) & (2,1) & \ldots & (n-2,1) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ (1,n-3) & (2,n-3) & \ldots & (n-2,n-3) \end{array}\right|$$

$$= \mathrm{K}_1 : \mathrm{K}_2 : \cdots \mathrm{K}_{n+1}$$

On the other hand, by differentiating the expression for $(0, 0)$, we find:

$$(0,1) = (1,1)k_1 + (2,1)k_2 + \cdots + (n-1,1)k_{n-1}$$
$$(0,2) = (1,2)k_1 + (2,2)k_2 + \cdots + (n-1,2)k_{n-1}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot$$
$$(0,n-1) = (1,n-1)k_1 + (2,n-1)k_2 + \cdots + (n-1,n-1)k_{n-1}$$
$$+ (1,n-2)k'_1 + (2,n-2)k'_2 + \cdots + (n-1,n-2)k'_{n-1}$$
$$(0,n) = (1,n)k_1 + (2,n)k_2 + \cdots + (n-1,n)k_{n-1}$$
$$+ 2\{(1,n-1)k'_1 + (2,n-1)k'_2 + \cdots + (n-1),n-1)k'_{n-1}\}$$
$$+ (1,n-2)k''_1 + (2,n-2)k''_2 + \cdots + (n-1,n-2)k''_{n-1}$$

Substituting these values in the given equation, there results

$$(1,n-2)k''_1 + (2,n-2)k''_2 + \cdots + (n-1,n-2)k''_{n-1} + \{P(1,n-2) + 2(1,n-1)\}k'_1$$
$$+ \{P(2,n-2) + 2(2,n-1)\}k'_2 + \cdots + \{P(n-1,n-2) + 2(n-1,n-1)\}k'_{n-1} = 0.$$

But from the values of $k'_1 : k'_2 : \cdots k'_{n-1}$ found above, and writing

$$k'_1 = \theta K_1 \quad , \quad k'_2 = \theta K_2 \quad , \quad \cdots \quad k'_n = \theta K_n$$

there follows:

$$k''_1 = \theta' K_1 + \theta K'_1 \quad , \quad k''_2 = \theta K_2 + \theta K'_2 \quad , \quad \cdots \quad k''_n = \theta' K_n + \theta K'_n.$$

But

$$(1,n-2)K_1 + (2,n-2)K_2 + \cdots + (n-1,n-2)K_{n-1}$$
$$= \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & \cdots & (n-1,0) \\ (1,1) & (2,1) & \cdots & (n-1,1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (1,n-2) & (2,n-2) & \cdots & (n-1,n-2) \end{vmatrix} = \nabla$$

and, as is easily seen,

$$\frac{d\nabla}{dx} = \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & \cdots & (n-1,0) \\ (1,1) & (2,1) & \cdots & (n-1,1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (1,n-3) & (2,n-3) & \cdots & (n-1,n-3) \\ (1,n-1) & (2,n-1) & \cdots & (n-1,n-1) \end{vmatrix}.$$

Hence

$$(1,n-2)K'_1 + (2,n-2)K'_2 + \cdots + (n-1,n-2)K'_{n+1} = 0$$
$$(1,n-1)K_1 - (2,n-1)K_1 + \cdots + (n-1,n-1)K_{n-1} = \nabla'$$

so that the equation becomes

$$\theta'\nabla + \theta P\nabla + 2\theta\nabla = 0,$$

or

$$\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{2\nabla'}{\Delta} + P = 0,$$

whence, integrating,

$$\Theta\nabla^2 = e^{-\int P dx} ,$$

or, substituting for Θ in terms of k_i and K_i, and integrating again,

$$k_i = \int \frac{K_i}{\nabla^i} e^{-\int P dx} dx,$$

or writing

$$\Delta = \frac{1}{\nabla} \quad : \quad k_i = (-)^{n-1} \int \frac{d\Delta}{d(i, n-2)} e^{-\int P dx} dx.$$

Hence, if

$$y_1, \; y_2, \; .. \; y_{n-1}$$

be $(n-1)$ particular integrals of the equation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + .. + Ty = 0,$$

this equation will be also satisfied by

$$y_n = k_1 y_1 + k_2 y_2 + .. + k_{n-1} y_{n-1},$$

where

$$k_i = (-)^{n-1} \int \frac{d\Delta}{dy_i^{(n-2)}} e^{-P dx} dx,$$

where $y^{(n)}$ is the nth differential-coefficient of y, with respect to x, and Δ has the value given above.

(To be cont. in the next fasc.)

6.

Examen de quelques difficultés de la mécanique physique.

(Par M. *Steichen*, professeur à l'école militaire de Bruxelles.)

Introduction.

Je me propose de traiter dans ce mémoire de quelques difficultés considérables que présentent les principes et hypothèses connues dans leur application, à de certaines questions de l'équilibre physique. Pour mieux faire comprendre mes idées, je crois devoir envisager d'abord la matière d'un point de vûe purement abstrait. Ainsi l'on verra clairement le but de mes efforts; ce que je prétends réfuter, et ce que je puis mettre à la place pour la réédification. Je produirai ensuite les exemples et faits qui confirment mes assertions générales.

Quand un système matériel est plus on moins gêné par des obstacles, et se trouve en équilibre sous l'action de plusieurs forces *actives* et *passives*, *on peut*, *selon la manière ordinaire de voir des géomètres*, *substituer aux pressions normales souffertes par ces obstacles*, *des forces actives égales et contraires*, *et considérer ensuite le système comme parfaitement libre et en équilibre sous l'action des forces actives*, *directement appliquées*, *des pressions normales prises en sens contraire*, *et des forces passives*, *telles que frottements*, etc. De là ils concluent immédiatement les six conditions d'équilibre connues, à savoir, que la somme des projections orthogonales de toutes les forces sur un axe quelconque est nulle, et que la somme de leurs moments de rotation autour d'un axe quelconque, est pareillement égale à zéro. Telle est en résumé et en traits généraux l'idée sur laquelle on se base dans la méthode ordinaire pour déterminer les pressions normales des obstacles, et pour résoudre les questions de l'équilibre physique des machines.

Je dis que l'hypothèse fondamentale de cette méthode est inadmissible en général, et quelle peut conduire parfois à des résultats erronnés, et parfois contradictoires. En effet, quand un système matériel est gêné par des obstacles, par

des points d'appui, des axes de rotation, par des surfaces d'appui fixes ou mobiles, etc., il n'est plus susceptible que de certains mouvements définis qui résultent des lois de liaison mutuelles de ses diverses parties. Tel est évidemment le cas d'une machine quelconque, qui ne peut prendre qu'une seule espèce de mouvement, et le mouvement diamètralement opposé. Pour qu'un tel système soit en équilibre sous l'action de diverses forces actives et des frottements, il est *nécessaire* et *suffisant* que la somme des moments virtuels effectifs, c'est-à-dire des moments qui correspondent à l'un des seuls déplacements possibles, ou au déplacement unique possible, soit égale à zéro. Mais si une telle condition d'équilibre est suffisante, rien ne prouve donc plus à l'avance cette hypothèse d'après laquelle on admet que la somme des moments virtuels arbitraires des forces en équilibre doive être nulle. L'existence et l'exactitude des six conditions d'équilibre connues qui sont, ou peuvent du moins être considérées comme une conséquence du principe des vitesses virtuelles arbitraires, restent donc aussi contestables pour l'espèce de systèmes dont il s'agit maintenant.

La méthode ordinaire de déterminer les pressions normales, et de résoudre les questions de l'équilibre physique, repose donc bien sur une hypothèse sujette à contestation; et l'on conçoit à priori qu'elle puisse amener des équations de condition superflûes, et même incompatibles avec les résultats fournis par les moments virtuels effectifs. Je pourrais au besoin citer des cas particuliers où cette incompatibilité et cette contradiction se produisent en effet. Mais en laissant d'abord là les exemples, essayons de démontrer notre thèse *in abstracto.*

A cet effet considérons le cas encore très étendu d'une machine quelconque, soumise à une seule force active. En admettant que le mouvement de la machine soit sur le point de naître, on peut dire qu'il y a équilibre entre cette force et les frottements qu'elle occasionne aux points d'appui, censés situés, si l'on veut, dans un même plan avec la ligne d'action de la force donnée. D'apres l'hypothèse générale de la théorie ordinaire, on devrait donc admettre maintenant que les réactions des points d'appui (pressions normales prises en sens contraire), et les frottements, considéres comme agents actifs, se composent en une force unique, égale et diamètralement opposée à la force directe. Or il est au contraire bien plus évident que cette dernière force est la résultante des pressions normales qu'elle produit et des forces de traction dynamiques en ces points. De plus, ne doit on pas éprouver une répugnance invincible à admettre que le frottement, qui est une résistance *passive* d'espèce particulière, puisse se composer avec des forces *actives*, d'après les lois de la mécanique rationnelle. En effet, il agit toujours

en sens contraire de la ligne du mouvement de son point d'application, et son action cesse et se trouve suspendûe, dès que la force active cesse d'agir. De plus, il ne saurait jamais faire naître aucun mouvement en sens contraire. Tout ce que l'on peut admettre comme évident à priori, concernant cette résistance passive, revient à supposer qu'elle s'ajoute aux tractions actives, mais résistantes, et qu'elle diminue les tractions motrices dûes aux forces directes. Mais au delà, rien plus ne me paraît évident, et rien surtout n'est demontré.

Si les objections précédentes sont fondées, il en resulte immédiatement que le principe général des moments virtuels arbitraires doit desormais être relegué exclusivement dans le domaine de la mécanique rationnelle, où l'on ne considère que l'équilibre entre forces actives, et que des systèmes parfaitement libres; que là même il reçoit des limitations pour le cas de systèmes gênés par des obstacles; qu'ensuite le principe des moments virtuels effectifs, devient d'un emploi indispensable dans les recherches de la mécanique physique.

Mais pour évaluer les moments des frottements, qui entrent dans l'équation ou dans les équations de condition fournies par ce principe dans chaque cas donné, il faut savoir évaluer au préalable et exactement, les pressions normales aux surfaces d'appui; ce qui constitue souvent la vraie difficulté de la question.

Le principe de la composition, et sourtout celui de la décomposition des forces parallèles et concourantes, doit plus particulièrement servir à ce but. Mais ici cette décomposition de forces n'est pas à volonté; ainsi que cela arrive dans la mécanique *rationnelle* où l'on n'a presque jamais à s'occuper de pressions normales. Là on peut en effet remplacer une force d'une infinité de manières par les composantes, les résultat que l'on cherche sera toujours le même, parceque le moment virtuel arbitraire de l'une est toujours égal à la somme des moments virtuels des autres. Au contraire, en mécanique *physique* les pressions normales aux surfaces et points d'appui, doivent résulter d'une façon définie et unique, de la nature de la machine et du mode d'application et de l'intensité des forces, du poids des pièces, des forces centrifuges dans l'équilibre dynamique.

Si donc ces pressions proviennent d'un certain mode de décomposition des forces, ce mode doit être unique, et c'est au géometre-mécanicien à le deviner en quelque sorte par voie de vérification, en tenant soigneusement compte de la définition complète de la machine; il faut qu'il découvre par le moyen de considérations de necessité géométrique et mécanique, la décomposition de force, telle qu'elle l'opère dans le fait, dans la nature. S'il ne tombe pas juste, il subsubstitue une décomposition idéale et précaire à la décomposition naturelle; de

fà résultera une pression normale inexacte, et par suite une solution erronnée de la question à traiter.

A l'appui de l'utilité de mes distinctions et prescription je puis citer le cas de l'équilibre de la *vis à filet triangulaire*, où l'on a obtenu en effet des solutions contradictoires; par suite de décompositions de forces effectuées différemment. Or évidemment celle de ces solutions qui repondrait à la décomposition effective des forces, serait seule admissible.

Il est vrai que dans les cas les plus simples cette décomposition effective des forces se présente d'elle même à l'esprit: mais alors aussi on a l'habitude, de traiter directement les questions proposées, et l'on laisse de côté cette méthode générale; c'est ce qui explique pourquoi la solution obtenue est nécessairement exacte.

On peut citer comme exemple l'équilibre d'un *corpuscule presant,* retenu sur le plan incliné qui est l'origine historique du principe de la composition et décomposition des forces. Il est en effet évident en soi que toute force qui presse le corps contre le plan suivant la direction normale, doit se faire anéantir, et que toute force qui le tire parallèlement à la ligne de plus grande pente, ne saurait rien transmettre au plan, et qu'elle fera seulement mouvoir le corps. Donc aussi toute force de direction différente doit se décomposer suivant ces deux lignes, c'est-à-dire suivant la ligne de destruction, et suivant la ligne du mouvement.

Mais dès qu'on veut une fois aborder des questions un tant-soit-peut compliquées, on ne manque pas de rencontrer des difficultés que la méthode ordinaire méconnaît, et qui peuvent seulement être resolues, du moins dans de certains cas, par la loi de la décomposition naturelle des forces. Cette loi, ou plus généralement, celle de la transmission des forces, doit changer avec la nature du système qu'on considère, de sorte qu'elle est multiple, et se diversifie à l'infini, tout en restant unique et définie dans chaque cas.

C'est là, me dira-t-on, une hypothèse; mais elle n'est ni vaine ni gratuite. Le principe connu de la transmission des pressions dans les *fluides incompressibles* que l'expérience à fait découvrir, peut être cité comme exemple de cette loi générale. Dans la mécanique physique elle ne doit être souvent que la décomposition effective des forces, c'est-à-dire la décomposition idéale, subordonnée à un principe de *nécessité naturelle* ou de *moindre économie.* L'évaluation des pressions normales étant faite exactement, on na plus qu'à introduire les moments virtuels des frottements dans l'équation, ou dans les équations fournies par le principe général; à exprimer ensuite les chemins virtuels divers en fonction d'un

seul, pour déduire de là les équations de condition qui subsistent entre les données et les inconnues.

Pour mieux comprendre que par cette voie on peut en effet obtenir plusieurs équations de condition, il faut considérer que le mouvement général dont une machine est susceptible, peut souvent se résoudre en plusieurs mouvements partiels, pour chaque point ou pour chaque pièce. On peut citer comme exemple un système de *poulies mouflées,* assemblées les unes dans une même chape à axe horizontal mobile, et les autres sur un même axe fixe. Dans ce cas, non seulement le moment virtuel effectif de la puissance est égal à la somme des moments virtuels de la charge utile, des frottements et raideurs de corde: en outre l'équilibre de rotation devant avoir lieu pour chaque poulie, le moment virtuel de rotation de la tension motrice doit valoir celui de la tension résistante, de la raideur et du frottement correspondant.

Si le cas actuel a été exactement resolu par la méthode ordinaire, cela provient de ce qu'elle fait coïncider ici ses déplacements arbitraires avec les mouvements partiels et effectifs de la machine. En effet, elle admet d'abord les équations d'équilibre des moments de rotation, relatives aux diverses roulettes; ce qui correspond aux rotations partielles de celles-ci. Elle suppose ensuite que la somme des tensions des cordons qui aboutissent aux poulies inférieures, soit égale à la charge. C'est là une supposition qui n'est pas évidente en elle-même, précisement parcequ'elle l'est pour l'équilibre rationnel. Mais elle est exacte encore, parceque le déplacement effectif et total de la machine se réduit pour chaque poulie inférieure à une rotation particulière et à un mouvement de transport ascendant, commun à toutes ces poulies; c'est ce dernier mouvement que l'on supposerait avoir lieu séparément, qui amène l'égalité de la somme des tensions à la charge. Mais pour l'équilibre physique, cette égalité m'a paru si peu évidente, que j'en ai vérifié l'exactitude par le principe général des moments virtuels, en combinaison avec les conditions de l'équilibre de rotation; d'où résulte ensuite l'explication donnée ci-dessus, et qui rend au moins compte de cette égalité.

Dans divers cas que présentent surtout les mouvements de *rotation*, le principe des moments, ou le principe général du levier, peut remplacer celui des moments virtuels; et dans quelques circonstances il le remplace et le démontre même d'une manière remarquable. Mais il n'en est pas de même dans les cas plus compliqués, quoiqu'en apparence encore fort simples. Supposons par exemple qu'on demande la force capable de faire franchir à une *roue de voiture chargée*, un obstacle implanté sur un sol de niveau et ayant une hauteur donnée, et que

l'on tienne compte du frottement de la boîte de roue sur l'essieu. Sans doute on pourrait encore opérer par le principe du levier, pourvu que l'on eût la précaution d'estimer les moments de la charge et de la force de traction motrice autour du sommet de l'obstacle, tandis que le moment du frottement de l'essieu devrait être estimé autour du centre de la boîte de roue; mais le principe des moments de rotation ainsi commenté, recoit ici toute sa lumière de celui des moments virtuels, sans lequel on pourrait estimer inexactement les moments de toutes les forces autour d'un même point.

L'importance et l'indispensable emploi du *principe des moments virtuels effectifs* étant ainsi constatés, il est rationnel de la considérer comme *l'axiome fondamental*; comme la base de la mécanique appliquée; d'autant plus qu'il peut être démontré indépendamment d'aucune autre notion de la science pure, en l'établissant d'abord pour le cas d'une seule puissance et d'une résistance, et ramenant ensuite le cas général à ce premier cas. C'est ce que j'ai fait dans mon „Cours de statique." Cette marche me paraît du reste la plus conforme à l'idée primordiale des inventeurs *Galilée*, *S. Stevin*, *Descartes* et *Toricelli.*

Dans la mécanique rationnelle, telle, qu'elle se fait de nos jours, sous l'inspiration des géomètres, on cherche à déduire le principe des vitesses virtuelles arbitraires des autres principes déjà établis, et l'on y considère dès lors naturellement les moments virtuels effectifs comme un cas particulier des moments arbitraires, partant comme une conséquence des principes du levier et de la composition des forces. Or en suivant cette filiation d'idées, on transporte forcément toutes ces ressources d'investigation dans le domaine de la mécanique physique. De là est née cette confusion d'idées que j'ai signalée et qui me paraît inadmissible, parcequ'elle peut conduire parfois aux applications les plus abusives et à des contradictions.

L'exposé précédent, me paraissant suffire pour faire comprendre mes idées et la base de ma critique, je crois devoir me borner pour le moment aux considérations générales, qui viennent d'être présentées.

Mais pour porter mes convictions les plus profondes dans l'esprit du lecteur, il faut bien que j'entre dans la discussion des faits; que j'expose en détail les objections que je fais à l'hypothèse de la théorie ordinaire, et les solutions qui me paraissent seules admissiblés pour de certains cas particuliers. Toutefois, comme la matière est fort délicate, je me reserve de pouvoir revenir au besoin sur mes pas, tant dans le but de perfectionner et d'éclaircir mes premières idées, que dans celui de complèter celles des solutions qui seraient défectueuses.

Cette reserve étant faite, je résume en quelques mots le sujet qu'il s'agit de traiter.

„L'hypothèse de la théorie ordinaire, considérée dans ses applications à „la mécanique physique, est-elle *exacte* et *soutenable?* ou bien, ne sont-ce „pas plutôt les deux notions qui servent de base à ma critique qu'il faudra „admettre desormais plus spécialement comme moyens d'investigation."?

Quelle est la vraie doctrine de la science?

C'est à cette question importante que je cherche une reponse; je la cherche et la médite depuis plus de quinze ans; et comme je crois l'avoir trouvée, du moins en partie, je me décide à livrer mes résultats à la publicité; ils font suite à ce que j'ai publié précédemment dans les mémoires de la Société-Royale des sciences de *Liége*.

§. 1.

Déterminer la position d'équilibre d'une échelle qui s'appuie contre un mur vertical et sur un plan horizontal, en tenant compte du frottement sur les deux plans d'appui.

Pour ramener la question à des termes plus simples encore, on peut considérer une barre rigide, sans poids (Tab.VI fig. 1), mais chargée d'un poids Q en un point G, et appuyée de la manière indiquée. Soit A le point d'appui inférieur, B le point de contact avec le plan vertical, pour la position d'équilibre cherchée, qu'il ne faut pas confondre avec les positions de repos de la barre, puisqu'elle n'est que la limite de celle-ci.

Soit O l'intersection des deux plans, et posons:

$$AB = a \quad , \quad AG = c \quad , \quad BG = b \quad , \quad B\hat{A}O = \varphi,$$

P la pression normale en A sur le plan horizontal AO,

P' la pression normale en B sur le plan vertical BO.

Ainsi, f, f', désignant les coëfficients des frottements relatifs aux deux plans AO, BO, l'intensité da la force qui s'oppose au mouvement de descente de la barre, sera $f.P$ au point A, et $f'.P'$ au point B. Puisque donc la descente tend à se faire, et que par hypothèse le mouvement est sur le point de naître, la résistance passive fP s'exerce de A vers O, tandis que celle $f'P'$ s'exerce de B vers Y, suivant le prolongement BY.

Cela posé, s'il est vrai, conformément à l'hypothèse de la théorie ordinaire, qu'il soit permis de considérer la barre comme parfaitement libre et en équilibre

sous l'action du poids Q, des pressions normales, prises en sens contraire, et des frottements; il faut qu'ici l'équilibre subsiste entre les forces $Q, -P, -P', fP, f'P'$, considérées toutes comme actives; partant que la somme de leurs projections sur un axe quelconque soit nulle; et que la somme de leurs moments de rotation autour d'un axe quelconque, soit égale à zéro. Ainsi, en se bornant à projèter sur l'horizontale et la verticale, et à prendre les moments, autour de A, ce qui est permis, parceque d'autres axes ne donneraient rien de plus, on doit avoir:

$$(1, 2.) \qquad f.P - P' = 0 \quad , \quad Q - P - f'P' = 0$$

$$(3.) \qquad Q.\,c.\cos\varphi - P'.\,a.\sin\varphi - f'.\,P'.\,a.\cos\varphi = 0,$$

et de ces relations on déduit les valeurs des inconnues:

$$\begin{cases} (a.) \qquad P = \dfrac{Q}{1+f.f'}; \quad P' = \dfrac{f.Q}{1+f.f'} \;\ldots\ldots \\ (b.) \qquad \tang\varphi = \dfrac{c - b.f.f'}{a.f} \;\ldots\ldots \end{cases}$$

On peut même faire rémarquer que si l'on prenait les moments autour du point B, ou autour de tout autre centre, et qu'on substituât encore une fois dans l'équation résultante les valeurs de P, P' déduites des égalités (1,2), on trouverait pour φ la valeur même, déjà fournie par l'équation (b). Mais on serait immensément éloigné de la vérité, si l'on voulait considérer cet accord de résultats comme une vérification de l'hypothèse même qui sert de base à ces équations de condition. En effet, les égalités (1, 2, 3), exprimant que la résultante des forces est nulle, et que la somme de leurs moments autour d'un point désigné A, est nulle, il faut de toute nécessité que la somme de leurs moments autour de tout autre point, soit égale à zéro; et cette dernière condition devient ainsi une conséquence identique des trois premières. Ainsi l'accord dont il s'agit, prouve uniquement qu'on a exactement calculé, et que la théorie est conséquente *à elle-même*, et logique dans ses combinaisons. Mais là n'est point le sujet en contestation.

On ne serait pas plus fondé à m'objecter que j'interprète inexactement la théorie ordinaire, puisque la question précédente de l'échelle a été déjà traitée dans le tome 8. des annales mathématiques de *Gergonne* par une marche en apparence différente, et que les valeurs des inconnues qui en résultent, s'accordent, aux notations près, avec celles des égalités (a, b). Mais cet accord même est encore une fois nécessaire, parceque chaque méthode de solution repose sur la même hypothèse, sur le même fond d'idées erronnées. Aussi, loin de me gêner,

me fournira-t-il l'occasion de rendre mes objections plus pressantes et plus variées. Mais auparavant il convient de s'arrêter aux résultats (a, b).

Si l'hypothèse de la théorie ordinaire est exacte, comment se fait-il que les valeurs de P, P' de (a) dépendent exclusivement des quantités Q, f, f', et soient indépendantes des rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$? Voilà une conséquence étrange et en elle-même difficile à admettre. Dans les Annales de *Gergonne* on ne devait pas absolument s'apercevoir de cette singularité, parceque les pressions normales n'y sont pas mises en évidence; mais on y pouvait cependant fort bien s'apercevoir des difficultés plus grandes encore que présente la valeur de φ de l'équation (b) qui s'y trouve en toutes lettres; et ces difficultés sont en effet innégables. Si l'on y prend par exemple $c = b.f.f'$, on obtient $\tang \varphi = 0$; de sorte que la position l'équilibre d'une barre dans laquelle le poids Q serait suspendu à une distance du point A marquée par $c = b.f.f'$, serait celle de *l'horizontale*, tandis que si le poids était suspendu plus haut ($c > b.f.f'$), la position d'équilibre serait *oblique*. Sans doute on conçoit fort bien en général, que plus la quantité c est considérable, plus l'angle φ doit être grand, et que le pied à donner à l'échelle doit décroitre à mesure que c augmente. Mais puisque pour $c > f.f'.b$, la formule donne une position d'équilibre oblique $\varphi > 0$, tandis que pour $c = f.f'.b$, on a $\varphi = 0$, ce qui n'exprime plus une véritable position d'équilibre, il me semble qu'il y a là une espèce de contradiction. De plus, pour $c > f.f'.b$, la formule donne pour φ une valeur *négative*; or ce dernier résultat est absolument inexplicable; car à moins que d'intervertir le sens de la question, on ne saurait dire que la barre pesante puisse rester en équilibre, en s'appuyant sur le plan vertical, et sur le revers du plan descendant. Dira-t-on que la valeur négative de $\tang \varphi$ marque une impossibilité de la question? Mais quel est alors ce genre d'impossibilité, et quelle en est la signification mécanique? comment se fait-il que la question soit impossible pour le cas où le poids serait suspendu très bas ($c < f.f'.b$), tandis qu'il y aurait position d'équilibre oblique dans les autres cas?

Si l'on prend $c = a$, d'où $b = 0$, on déduit de la formule (b): $\tang \varphi = 1 : f$; de sorte que dans ce cas l'inclinaison d'équilibre de la barre dépendrait uniquement de l'intensité du frottement sur le plan horizontal. Ce-ci est encore une fois un point bien difficile à accorder.

Pour le moment je n'insiste pas davantage sur les difficultés précédentes, parceque l'on verra plus bas que la solution des equations (1, 2, 3) ou (a, b) est en contradiction avec celle que fournira le principe des moments virtuels effectifs.

Mais maintenant je vais prouver que j'ai interprêté exactement l'hypothèse de la théorie ordinaire que je combats, et conformément à la manière de voir, des géomètres; qu'à cet égard même je me suis placé dans les circonstances les plus favorables; car il ne sérait pas difficile à voir que toute interprétation différente pourrait laisser la question indéterminée ou la compliquerait de nouvelles difficultés.

§. 2.

Solution des annales de Gergonne.

Cette solution qui a paru à *Gergonne* être appuyée sur la doctrine la plus saine, se résume dans ce qui suit. Après avoir remplacé (fig. 2) la force verticale Q par ses deux composantes Q', Q'' aux extrêmités A, B, l'auteur conçoit au point A une droite AT qui fasse avec la normale AM au plan, un angle égal à celui du frottement relatif au plan OAX, et de même au point B une droite BU faisant avec la normale BN un angle égal à celui du frottement relatif au plan vertical BO. Ensuite il décompose la force Q' en deux, l'une suivant la droite AT, l'autre suivant AB; la force Q'' en deux, l'une suivant la droite BU, l'autre suivant la droite BA. Il admet ensuite que pour l'équilibre, la force suivant BA soit égale à celle suivant AB; cela veut dire sans doute que, quelles que soient les intensités des forces T, U, qui agissent suivant AT, BU, leurs composantes tangentielles de A vers X, de B vers O, sont strictement capables de détruire les frottements respectifs dûs à leurs composantes normales. Au premier abord on peut trouver cela ingénieux; mais, même à priori, je ne saurais m'accommoder de cette façon de faire de la mécanique physique, et d'appliquer les principes connus.

D'abord la position d'équilibre de la barre n'exige pas, comme l'auteur le suppose gratuitement, qu'il y ait équilibre séparé entre les forces actives et passives qui agissent à chaque extrêmité de la barre, ni par conséquent que la force résultante qui sollicite la barre longitudinalement, soit nulle. Poser de telles conditions d'équilibre superflues, c'est *méconnaître* le *sens profond*, *l'essence* du principe des moments virtuels effectifs, qui exige simplement que le moment virtuel du poids Q soit égal à la somme des moments virtuels des frottements en A et B. Cela seul est évident ici, et rien ne l'est plus au delà, sans démonstration. Les conditions posées par l'auteur entraînent bien pour conséquence l'état de repos de la barre; mais la position d'équilibre de la barre n'exige pas l'existence

de ces conditions. Il y a d'ailleurs erreur, erreur profonde, à confondre une simple figure ou position d'équilibre, avec une figure ou une position de repos. Le lecteur doit donc voir maintenant que, quelle que soit la forme sous laquelle se présente l'hypothèse ordinaire, il n'est pas difficile d'en faire ressortir l'inexactitude, dès qu'une fois on adopte ma manière de voir.

En effet, je reprends encore. Admettre l'égalité des forces suivant AB, BA, c'est admettre que la traction en A soit précisement égale et contraire au frottement en ce point, et qu'il en soit de même de la traction en B par rapport au frottement en ce point. Or ces suppositions reviennent encore une fois à dire que la somme des projections orthogonales des forces sur un axe quelconque est nulle, et qu'il en est de même de leurs moments par rapport à tout axe. Car dans l'hypothèse de l'auteur de la solution, toutes les forces composantes sont deux-à-deux égales et opposées, puisque les réactions des plans d'appui détruisent les pressions normalés. Il n'y a donc pas lieu à s'étonner, et moins encore à s'applaudir de l'accord des résultats de cette solution avec ceux de l'hypothèse ordinaire, obtenus au (§. I. équations (1, 2, 3)).

Il est vrai que dans les Annales on se borne à assigner l'inclinaison d'équilibre fournie par (b), et que l'on n'y met point les pressions normales en évidence. Il faut donc achever cette solution, afin de montrer par le fait que l'accord existe complètement.

Or en nommant λ l'angle du frottement en A, on obtient pour la force T suivant AT, la valeur

$$T = Q.\frac{b}{a}.\frac{\cos\varphi}{\cos(\lambda+\varphi)},$$

et en décomposant T suivant la verticale AM et suivant l'horizontale AX, on obtient pour la première composante:

$$T.\cos\lambda = Q.\frac{b}{a}.\frac{\cos\varphi.\cos\lambda}{\cos(\lambda+\varphi)} = Q.\frac{b}{a}.\frac{1}{1-\operatorname{tang}\lambda.\operatorname{tang}\varphi};$$

partant, en vertu de $\operatorname{tang}\lambda = f$, et $\operatorname{tang}\varphi = \frac{c-bff'}{af}$:

$$T.\cos\lambda = Q.\frac{b}{a}.\frac{1}{1-f.\frac{c-f.f'.b}{a.f}} = Q.\frac{b}{a}.\frac{1}{a-c+f.f'.b} = \frac{Q}{1+f.f'}.$$

Pour la force U suivant la ligne BU, on obtient de même:

$$U = Q.\frac{c}{a}.\frac{\cos\varphi}{\sin(\varphi+\lambda')};$$

et en décomposant suivant la normale BN et la verticale BO, on en tire pour la pression normale en B:

$$U.\cos\lambda' = Q.\frac{c}{a}.\frac{1}{\operatorname{tang}\lambda' + \operatorname{tang}\varphi} = Q\frac{f}{1+ff}.$$

On voit donc que ces valeurs des pressions normales sont identiques à celles des formules (a). Il est bien prouvé aussi que j'ai interprêté ainsi la théorie ordinaire dans son véritable esprit. Mes preuves me paraissant même peremptoires; je n'insisterai pas plus longuement. Si d'ailleurs le lecteur concevait immédiatement d'autres doutes concernant cette décomposition de forces qui vient d'être faite, il devrait s'en prendre aux hypothèses mêmes que je ne saurais jamais admettre. La question de le vraie décomposition des forces reste à débattre.

§. 3.

La vraie solution de la question ne peut résulter que du principe des moments virtuels effectifs et de la décomposition naturelle des forces. Pour la découvrir, il faut examiner de près ce qui se passe dans l'état d'équilibre de l'échelle, et ce qui d'un autre côté a lieu pour l'une quelconque de ses positions de repos.

D'abord il est clair que le poids Q doit se transmettre aux plans d'appui en A et en B; de sorte qu'en A il produit une force verticale $Q.\frac{b}{a}$, et en B une force $Q.\frac{c}{a}$; que la premiére doit être détruite immédiatement, et ne peut occasionner qu'un certain frottement. Mais la force $Q.\frac{c}{a}$ qui agit sur l'extrêmité B de la barre, doit se décomposer de fait, suivant la normale au plan et suivant la ligne BA; car la normale est une ligne de destruction absolûe des forces, et l'axe AB de la barre, censée parfaitement rigide, est seulement une ligne de destruction relative. Il est évident en effet que toute force dirigée de B vers A, tend à produire à la fois un effet dynamique sur la barre, et un effet de pression sur le plan horizontal. Donc en A elle doit se décomposer de nouveau suivant la normale, et suivant l'horizontale; ce qui donnera la force de traction de la barre.

Dans chaque circonstance physique donnée, la transmission des forces est cette loi particulière qui marque en quelque sorte la voie géométrique plus ou moins directe que suivent les forces en équilibre pour se transmettre, se composer et décomposer aux surfaces d'appui. Or, dans le cas actuel avons-nous reconnu

la vraie loi de transmission? et la réponse à cette question n'est-elle pas indispensable, afin de pouvoir faire l'examen ultérieur du problème qui nous occupe. Sans doute, il serait intéressant de reconnaitre cette loi dans chaque cas, parceque l'on n'aurait qu'à suivre la voie qu'elle indique, pour obtenir toujours sans détour et sans ambage les vraies pressions normales.

Cette connaissance n'est pas néanmoins indispensable. En effet, outre la mode de décomposition indiqué ci-dessus, on voit bien que la décomposition des forces peut encore se faire autrement. Il est possible qu'au lieu de se reporter d'abord en A et B, le poids se décompose (fig. I) d'abord en deux forces au point G même, l'une, $Q \sin\varphi$, suivant GA, et l'autre, $Q \cos\varphi$, suivant la perpendiculaire GZ, et que la dernière se transmette parallèlement à elle-même aux points d'appui. Mais si l'on a l'attention de décomposer chaque force en B suivant la ligne de destruction absolûe et la ligne relative BA, et chaque force qui advient en A, suivant la normale AM et suivant la ligne du mouvement AX, on ne manque pas de trouver les vraies pressions normales et la même force de traction.

Ainsi la connaîssance de loi de transmission des forces n'est pas indispensable dans tous les cas; mais on doit se garder d'en conclure que mes préscriptions relatives à la décomposition des forces suivant les lignes de destruction et du mouvement, soient inutiles. Ce serait s'exposer à commettre des erreurs. Ainsi par exemple, après avoir obtenu en B suivant la perpendiculaire à BA, la force $Q.\frac{c}{a}.\cos\varphi$, on pourrait avoir l'idée de la remplacer par ses deux composantes

$$\text{l'une } Q.\frac{c}{a}.\cos\varphi.\cos\varphi, \text{ suivant } BO,$$

$$\text{l'autre } Q.\frac{c}{a}.\cos\varphi.\sin\varphi, \text{ suivant } BN;$$

mais cette décomposition, considérée comme finale, serait inadmissible. Car la première composante, sollicitant l'extrémité B de la barre, doit exercer à la fois un effet statique sur le plau BO, et un effet dynamique sur la pièce mobile; donc elle doit elle-même se décomposer encore suivant la normale et suivant l'axe BA. Il est vrai que la droite BA est elle même une ligne de mouvement; mais elle n'est point telle que tout effort, exercé suivant sa direction, obtienne un effet purement dynamique. Sur le plan incliné, la droite parallèle à la ligne de plus grande pente est seule une ligne de mouvement absolûe. Dans le cas actuel la ligne absolûe de mouvement a lieu suivant AX', parceque toute force appliquée à la barre au point A suivant cette ligne et de gauche à droite, ne saurait plus

exercer aucun effort de pression sur les deux plans; et tend simplement à l'éntraîner, en l'écartant du vertical BO. Une force appliquée au contraire à l'extrémité supérieure de la barre, non seulement tendra a la faire descendre, mais à la faire entrer en quelque sorte dans le plan BO.

Ces considérations prouvent, me semble-t-il, que la décomposition des forces est subordonnée à un fait de nécessité mécanique qui résulte, avec plus ou moins de clarté, de la nature même du système matériel qu'on considére.

Tout cela étant posé, nous obtiendrons aisément dans le cas actuel les pressions normales. Mais il est naturel de suivre à cet égard la voie la plus économique, et qui paraît la plus conforme à la transmission naturelle des forces. C'est sans doute celle qui a été indiqué d'abord. Par là on obtient immédiatement

$$\text{(I.)} \qquad P' = Q.\frac{c}{a}.\cot\varphi,$$

et la composante V, suivant BA, obtient la valeur

$$V = Q.\frac{c}{a.\sin\varphi}.$$

Elle doit se transmettre suivant BA jusqu'en A, où elle se décompose suivant la verticale descendante et suivant la droite AX. Il s'ensuit qu'en A nous aurons une pression

$$\text{(II.)} \qquad P = Q.\frac{b}{a} + Q.\frac{c.\sin\varphi}{a.\sin\varphi} = Q,$$

et une force de traction horizontale T, donnée par l'équation

$$\text{(III.)} \qquad T = Q.\frac{a}{a\sin\varphi}.\cos\varphi = Q.\frac{c}{a}.\text{cotg}\,\varphi.$$

Comme par hypothèse la barre occupe cette position limite, pour laquelle la force Q ou T est sur le point de vaincre les forces passives $f.P$ et $f'.P'$, il est nécessaire et suffisant que la somme des moments virtuels, qui répondent au mouvement momentané que le corps tend à prendre, soit nulle. Ainsi, en prenant $OA = X$, $OB = y$, $x^2 + y^2 = a^2$, partant $dy = -\text{cotg}\,\varphi.dx$, on obtient la nouvelle condition:

$$(T - f.P)\,dx + f'.P'.dy = 0 \quad , \quad \text{ou } T - fp - f'P'.\text{cotg}\,\varphi = 0,$$

et par la substitution des valeurs de T, P, P':

$$\text{(A.)} \qquad \frac{c}{a}.\text{cotg}\,\varphi - f - f'.\frac{c}{a}.\text{cotg}^2\varphi = 0 \ldots,$$

$$\text{partant:}\quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{2f} \pm \frac{1}{2f}\sqrt{\left(1 - 4f.f'.\frac{a}{c}\right)}.$$

En prenant d'abord le signe *positif* devant le radical, on voit que plûs la donnée c augmente, plus cotgφ augmente, et plus l'angle φ devrait diminuer; de sorte que dans la position d'équilibre, la barre aurait un pied d'autant plus fort, que le poids Q y serait suspendu plus haut; ce qui paraît inadmissible. Bornons nous donc d'abord à affecter le radical du signe *négatif*, ce qui donnera:

$$(B.)\quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{2f'} - \frac{1}{2f}\sqrt{\left(1-4f.f'.\frac{a}{c}\right)}\ ;\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{c}{a}\cdot\left[\frac{1}{2f} + \frac{1}{2f}\sqrt{\left(1-4f.f'.\frac{a}{c}\right)}\right].$$

Or plus c augmente, dans la valeur de tangφ, plus le radical augmente, de sorte que les quantités c, φ croîssent ensemble, et que le pied à donner à l'échelle est d'autant plus faible que le poids Q est plus élevé. On voit ensuite par les valeurs de P, P' que la pression en A est toujours égale au poids même appliqué, tandis que la pression normale en B, est égale et contraire à la traction dynamique en A. Si l'on veut avoir leur valeur absolûe commune, on n a qu'à substituer dans l'équation (I) la valeur de cotgφ, donnée par (B). Mais cette valeur de P' ne devient plus independante des données linéaires a, c.

Faisons rémarquer aussi que les valeurs des pressions normales P', P doivent subsister pour les positions de repos comprises entre 90° et l'angle limite φ, donné par l'équation (B). D'abord il serait facile de prouver que sous une inclinaison quelconque $\psi < 90^0$, $> \varphi$, la somme des moments virtuels des frottements est supérieure au moment de la force active; de sorte qu'une telle inclinaison de l'échelle est en effet une position de repos. Mais pour toute position de ce genre, la loi de décomposition qui conduit aux formules (I, II, III), doit subsister. Il faut considérer aussi que si les frottements étaient des forces absoluments actives, ces diverses positions de repos entre 90° et φ n'existeraient plus, puisque l'inégalité des moments virtuels des résistances actives et de celui de la puissance, suffirait pour décider le mouvement. Mais pour les frottement il n'en est plus de même, puisqu'une force passive ne saurait que *résister* au mouvement qui tend à se produire, sans pouvoir jamais faire *naître* le mouvement contraire.

Mais l'objet essentiel est de comparer maintenant les résultats de la théorie ordinaire (§. 1, 2) avec ceux de la dernière solution, (équations I, II, III, IV) ou à l'équation (B) jointe aux trois premières. Cette comparaison montre immédiatement que le desaccord est complet, partant que l'hypothèse ordinaire est en

contradiction avec les principes immédiats et incontestables de la science; partant qu'elle est inadmissible, et que par conséquent il est très inutile de chercher une explication aux difficultés qu'elle présente dans ses résultats (a, b).

§. 4.

Mais de certains lecteurs peuvent n'être pas encore convaincus entièrement; il faut par conséquent des développements plus étendus. D'abord la contradiction ne provient d'aucune interprétation inexacte de la méthode ordinaire; cela est déjà prouvé plus haut; elle ne résulte d'aucune erreur de calcul; on peut s'en assurer en contrôlant et vérifiant toutes les opérations effectuées aux (§. 1, 2, 3). Si donc on veut encore soutenir la validité de cette méthode, on est obligé de contester l'exactitude de la solution du (§. 3.). Or cette solution me paraît inattaquable, comme reposant sur la vraie doctrine de la mécanique physique, sur le principe des moments effectifs et la décomposition naturelle des forces. On ne saurait contester l'exactitude de ce principe, ni celle de la décomposition, telle que je l'ai pratiquée dans l'exemple actuel; car en resumé, on pourra suivre telle voie de décomposition qu'on voudra, pourvu qu'on observe mes prescriptions, et l'on aboutira toujours aux valeurs finales que j'ai données. Procéder autrement, ce serait retomber dans l'ornière ordinaire, ou le livrer gratuitement à l'arbitraire et à l'indétermination.

Du reste, l'emploi du principe des moments virtuels même, peut être justifié ici. En effet, on sait par un théorème souvent cité dans mes mémoires précédents que le déplacement différentiel de la barre entre les deux plans d'appui, n'est qu'une rotation momentanée de tous ses points autour du point de rencontre I des normales MA, NB prolongées. Mais pour l'équilibre il est *nécessaire* et *suffisant* que ce seul mouvement de rotation n'ait pas lieu, et qu'il soit sur le point de se produire. Donc il faut uniquement que le moment actif de la force Q ou T autour de I, soit égal à la somme des moments des forces passives, ce qui donne (fig. 1):

$$Q.AH = f.P.AI + f'.P'.BI;$$

or $AH = c.\cos\varphi$, $AI = a.\sin\varphi$, $BI = a.\cos\varphi$, partant:

$$Q.c.\cos\varphi - f.Q.a.\sin\varphi - f'.Q.\frac{c}{a}.\operatorname{cotg}\varphi.a\cos\varphi = 0.$$

Ainsi nous retrouvons, à point nommé, l'équation (A) fournie par le prin-

cipe général qui se trouve par là même démontré. Soit en effet $d\vartheta$ la rotation de la barre autour de I dans un instant; l'équation des moments donnera: $Q.AH = f.P.AI + f'.P'.BI$. Or $AH.d\vartheta$, $AI.d\vartheta$, $BI.d\vartheta$ sont les chemins virtuels absolus des forces Q, $f.P$, $f'.P'$; et en nommant dq celui de Q, j'aurai:

$$Q.dq = Q.AH.d\vartheta = Q.c.\cos\varphi.d\vartheta = Q.c.\cos\varphi.\frac{dx}{Ai} = Q.\frac{c}{a}.\mathrm{cotg}\varphi.dx = T.dx;$$

$$AI.d\vartheta = dx \quad , \quad BI.d\vartheta = -dy, \text{ partant:}$$

$$\left(Q.\frac{c}{a}.\mathrm{cotg}\,\varphi - f.P\right)dx + f'.P'.dy = 0;$$

et l'on voit ainsi que l'égalité des moments virtuels de Q, T, mécaniquement évidente, se vérifie aussi par la *géométrie*.

Comme il n'y a donc aucune objection possible à faire à la solution du (§. 3.), j'en conclus naturellement que l'hypothèse de la théorie ordinaire est *inadmissible* et se trouve renversée par mes raisonnements; que du moins elle est erronnée dans de certains cas particuliers, tels que celui dont il s'agit ici; que si elle est exacte dans d'autres cas particuliers, cela provient uniquement de ce que l'égalité des moments virtuels entraîne alors celle des forces que suppose cette théorie. Mais évidemment je ne saurais plus avoir aucune confiance dans une méthode qui se pose et s'énonce d'une manière absolue et générale, et qui est inexacte ou exacte selon la nature des questions qu'il faut traiter; car elle manque ainsi de caractère scientifique, et les résultats qu'elle amène, ayant par eux-mêmes besoin d'êtres vérifiés, restent sujets à contestation.

§. 5.

Examinons si la solution obtenue au (§. 3.) peut en effet soutenir une discussion approfondie et toutes les épreuves particulières.

1) On voit d'abord que la position d'équilibre existe pour toutes les valeurs de $c > 4a.f.f'$; que pour $c = 4.af.f'$, $\mathrm{cotg}\,\varphi = \frac{1}{2f'}$, $\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{c}{a}.\frac{1}{2f'} = 2f'$, et que pour $c < 4a.f.f'$ l'inclinaison d'équilibre de la barre a une tangente imaginaire. Cela sigmfie qu'il n'y a plus de position d'équilibre, partant que la barre, étant placée dans une position quelconque entre les deux plans, reste simplement à l'état de repos, et que pour l'en déranger vers le bas, il faut une force étrangère plus ou moins considérable, facile à calculer. Vérifions l'exactitude de cette interpretation du cas de $c > 4af.f'$. En nomment ψ l'angle sous lequel on place la barre entre les deux plans, on aura:

$$P = Q \quad , \quad P' = Q\,\frac{c}{a}.\mathrm{cotg}\psi \quad , \quad T = \frac{c}{a}.\mathrm{cotg}\psi,$$

ce qui donne pour la somme $d\varrho$ des moments virtuels:

$$d\varrho = Q\,\frac{c}{a}.\mathrm{cotg}\,\psi.dx - f.Q.dx - f'.Q.\frac{c}{a}.\mathrm{cotg}^2\psi.dx;$$

ou $$d\varrho = Q\,\frac{c}{a}(\mathrm{cotg}\psi - f'.\mathrm{cotg}^2\psi)\,dx - f.Q.dx.$$

Or il est facile à voir qu'en prenant d'abord $\mathrm{tang}\psi = f'$, la quantité $d\varrho$ a une valeur négative. Prenons donc en général:

$$\mathrm{tang}\psi = f' \pm p\ .$$

p^2 sera une quantité arbitraire, pouvant devenir au plus égal à f' dans le cas du signe inférieur, et aussi grande que l'on voudra dans le cas contraire. Pour exprimer en outre que $c < 4a.f.f$, posons

$$\frac{c}{a} = 4f.f' - n^2,$$

n^2 exprimant une quantité quelconque comprise entre zéro et $4f.f'$. En substituant, on obtient:

$$d\varrho : Qdx = -\frac{f.(f' \mp p^2)^2 \pm n^2p^2}{(f' \pm p^2)^2}$$

Mais on reconnait aisément que pour le cas de $\mathrm{tang}\psi < f'$, comme pour $\mathrm{tg}\psi < f'$, le numérateur du second membre de cette valeur de $d\varrho : Q.dx$, est une quantité positive, de sorte que $d\varrho$ est une quantité négative; ce qui démontre que la somme des moments virtuels des frottements est supérieure au moment virtuel moteur. Donc la barre restera à l'état de repos, sous quelqu'angle qu'elle soit placée. En effet, le mouvement ne pourra pas naître dans le sens descendant, puisque l'on n'a pas $d\varrho > 0$; il ne saurait être sur le point de naître, puisque l'on n'a pas non plus $d\varrho = 0$, de sorte qu'il n'y a pas de vraie position d'équilibre. Mais il ne saurait se produire non plus dans le sens ascendant, puisque les frottements tendent seulement à détruire le mouvement de chûte, sans pouvoir en rien contribuer à faire naître un mouvement en sens contraire. L'interprétation du cas de la racine imaginaire exposée plus haut, est donc justifiée et me semble même offrir quelque chose de rémarquable par la signification mécanique attribuée au symbôle imaginaire.

2) Si l'on suppose $c = 0$, f, f' restant quelconques, l'équation (A) de-

vient impossible. Mais dans ce cas en effet on ne saurait plus employer une équation de moments virtuels, puisque la question devient illusoire, et que pour $c = 0$ il ne saurait plus y avoir ni décomposition de force, ni tendance de moments virtuels.

3) Si l'on suppose $c = a$, on obtient

$$\cotg \varphi = \frac{1}{2f} - \frac{1}{2f}.\sqrt{(1 - 4.f.f')};$$

ce qui prouve, contrairement au résultat absurde de l'hypothèse ordinaire, que l'inclinaison d'équilibre dépend encore bien des frottements sur les deux plans d'appui à la fois. Seulement on voit qu'il n'y a plus que des positions de repos, dès que la nature des substances frottantes est telle qu'elles donnent $4f.f' > 1$.

4) Il est superflu d'examiner à part le cas tout spécial de $c = b.f.f'$, déjà compris dans celui de $c < a.f.f'$. Mais on voit que là où la théorie ordinaire assigne encore des positions d'équilibre, il n'y a déjà plus que des positions de repos. Faisons rémarquer généralement que la prétendûe position d'équilibre, donnée par la formule $\tang \varphi' = \frac{c - b.f.f'}{a.f}$, n'est-elle même qu'une position de repos.

En effet, en prenant dans la somme $d\sigma$ obtenue plus haut, $\psi = \varphi'$, et y substituant la dernière valeur de $\tang \varphi'$, $\cotg \varphi'$, ainsi que les vraies valeurs des pressions normales, on obtient pour la somme des moments virtuels:

$$d\sigma' = - Q.dx.\frac{c^2 + b^2.f.f'}{(c - b.f.f')^2}.f^2.f'.$$

Cette somme est donc toujours négative; ce qui prouve que sous l'inclinaison φ' la force motrice est trop faible que pour équilibrer les frottements dûs aux pressions normales. Il est bien vrai que si dans la somme $d\sigma$ on remplace les quantités P, P' données par la formule (a), on retrouve $d\sigma' = 0$; mais cela doit être, parceque la théorie ordinaire est logique dans ses combinaisons et conclusions. Seulement au fond, la somme $d\sigma'$ est négative, au lieu dêtre nulle, et l'on n'obtient l'égalité $d\sigma' = 0$, que par la substitution de valeurs inexactes des pressions normales.

5) Il est bien clair que pour toute position dynamique de la barre, les pressions normales ne sont plus données par les égalités (I, II), puisqu'alors les réactions d'inertie viennent se combiner avec les forces actives. Ainsi ces formules ne peuvent s'étendre que depuis $\varphi = 90°$, jusqu'à la valeur limite de φ, donnée par l'équation (B). Néanmoins, comme dans le cas de $c < 4a.f.f'$, tou-

tes les positions obliques de la barre sont de repos, les formules dès lors doivent s'étendre depuis $\varphi = 90^\circ$ jusqu'à une valeur de φ infiniment petite, ou jusqu'à $\varphi = 0$ exclusivement; car à cette dernière limite la question à resoudre n'en est plus, et la loi de transmission qui subsiste alors, est inconnue, et ne saurait plus résulter de la seule force Q.

6) Eu égard à la valeur de cotg φ, donnée par la formule (B), on voit que tang φ est toujours supérieure à la quantité $2f'$. Cela posé, si l'on demandait à quelle hauteur on peut élever un poids Q sur une échelle dressée sous un angle φ connu, avec l'horizon, avant que de la faire glisser sous l'action de ce poids, on n'aurait qu'à resoudre l'équation (A) par rapport à c prise comme inconnue, et l'on aurait:

$$c = a.f.\frac{\tang^2\varphi}{\tang^2\varphi - f'}.$$

En supposant d'abord $\tang\varphi = 2f'$, on obtient $c = 4a.f.f'$. Prenant ensuite $\tang\varphi = 2f' + q^2$, q^2 marquant une quantité susceptible de croître indéfiniment, on trouve pour c la valeur

$$c = a.f.\frac{(2f' + q^2)}{q^2 + f'},$$

laquelle surpasse la première valeur de c de l'excès $\frac{a.f.q^4}{q^2+f'}$ qui croît indéfiniment avec q^2; ainsi la quantité c croit avec φ, à partir de $\varphi = \text{arc}(\tang = 2f')$.

7) Examinons de quelle manière devrait se faire la décomposition des forces, si la force qui sollicite la barre en G, était horizontale, au lieu d'être verticale. En raisonnant comme au (§. 3), on voit qu'on aurait d'abord deux composantes horizontales, l'une en A de A vers O, et l'autre en B, normale au plan BO. Celli-ci serait détruite; mais la première, agissant maintenant vers l'intérieur, devrait se décomposer suivant la normale en A et suivant l'axe AB; celle-ci se reporterait en B, où elle donnerait lieu à une composante normale, et à une traction de B vers Y, tandis qu'il n'y aurait plus aucune traction motrice au point A. Plus bas on reviendra sur ce cas.

8) Nommons $d\mu$ la somme des moments virtuels des forces, qui repondent à un angle quelconque φ, et φ', φ'' les angles des deux racines de l'équation (A), φ' étant celle de (B); on obtient:

$$d\mu = Q.\frac{c}{a}.dx.\cotg\varphi - f'.Q.\frac{c}{a}.dx.\cotg^2.\varphi - f.Q.dx,$$

$$0 = Q.\frac{c}{a}.dx.\cotg\varphi' - f'.Q.\frac{c}{a}.dx.\cotg^2.\varphi' - f.Q.dx,$$

partant:

$$d\mu = Q.\frac{c}{a}.dx(\text{cotg}\,\varphi - \text{cotg}\,\varphi')[1 - f(\text{cotg}\,\varphi + \text{cotg}\,\varphi')].$$

De plus, la quantité $d\mu$ s'exprimerait de même en fonction de φ, φ''. De là il est aisé de conclure: 1° que pour toute valeur de φ comprise entre 90° et φ', la somme $d\mu$ est négative, partant qu'il y a position de repos; 2° que pour toute valeur de φ comprise entre φ' et φ'', cette somme est positive, partant qu'il y a position dynamique; 3° que pour toute valeur de φ comprise de φ'' à 0°, la somme $d\mu$ est de nouveau négative, de sorte que dans le sens strict de l'analyse, il y aurait de nouveau position de repos de la barre pour $\varphi < \varphi''$. Mais cette continuité que je considère comme analytique, n'existe pas de fait; du moins l'experience semble la contredire, et annoncer que quand une barre pesante est placée entre deux plans horizontal et vertical, sous un angle quelconque moindre que φ', elle ne saurait plus jamais conserver cette position par le simple effet du frottement. Cette difficulté doit s'expliquer, je pense, en admettant que la loi des pressiens dynamiques se substitue aux pressions statiques depuis $\varphi = \varphi'$ jusqu'à φ'' d'abord, et de là jusqu'à $\varphi = 0$ exclusivement. Aussi, pour les cas particulier de $c = 4af.f$, on obtient $\varphi'' = \varphi'$, et l'analyse reduit toutes les positions entre φ' zéro à des positions dynamiques. C'est pourquoi la racine φ'' m'a paru inadmissible dans le cas général.

9) Eu égard au raisonnement du (§. 3.) et aux formules (I, II, III), il est clair, que la force Q est la résultante des pressions normales et de la traction T, partant que la somme des projections orthogonales de $Q, -P, -P', -T$ sur un axe quelconque est nulle, et qu'il en est de même de la somme de leurs moments de rotation autour d'un point quelconque. Mais ce n'est point là ce que soutient la théorie, puisqu'elle fait entrer les frottements en ligne de compte. D'ailleurs, en faisant même abstraction de ces résistances, elle exposerait encore à des mécomptes. En effet, comme elle s'énonce d'une manière absolûe, il faut bien que si elle suppose une force de traction T' en A, elle en admette une T'' en B. Si l'on raisonne maintenant d'après cette *hypothèse corrigée*, (les frottements étant laisses de côté), on ne saurait jamais obtenir que *quatre* équations de condition, en employant même le principe des moments virtuels effectifs de toutes les forces, tandis qu'il y a pourtant *cinq* inconnues distinctes P, P', φ, T', T'', et il s'ensuivrait de là que le problème actuel serait indéterminé. Mais il est évident en soi que le contraire a lieu; et c'est démontré aussi par le fait d'une solution précise, obtenue au (§. 3). Toutefois cette indétermination ne subsisterait

qu'à la condition d'admettre réellement une traction T'' au point B. Dès qu'on examine une fois la question en elle même, conformément aux idées énoncées au (§. 3.), on reconnait bien que cette force T'' est$=0$. Mais l'énoncé de la théorie ordinaire ne nous apprend absolument rien à cet égarel. Il est clair aussi que si la force qui agit sur la barre, était horizontale, la traction en A ou T' serait zéro, tandis que toute la traction dynamique se reporterait au point B. Mais toute cela se voit seulement par l'examen attentif de la question.

§. 6.

Examen de quelques cas analogues à celui du §. 3.

Recherchons la position d'équilibre de la barre dans le cas où elle est sollicitée en G par une force Q qui agit à la droite de la verticale descendante GV (fig. 5) sous un angle $\lambda < 90^0 - \varphi$, φ marquant l'inclinaison d'équilibre. Dès lors il faut encore décomposer les forces, d'après les indications de la (fig. 5.) On trouve ainsi, après avoir substitué à Q ses deux composantes parallèles $AS = Q.\frac{b}{a}$; $BT = Q.\frac{c}{a}$:

$$P' = Q.\frac{c}{a}.\frac{\cos(\varphi+\lambda)}{\sin\varphi} = Q.\frac{c}{a}\cos\lambda.\operatorname{cotg}\varphi - Q.\frac{c}{a}\sin\lambda,$$

$$P = AV + AM = Q.\frac{b}{a}\cos\lambda + Q.\frac{c}{a}\cos\lambda = Q.\cos\lambda,$$

$$T = AW + AZ = Q.\frac{b}{a}\sin\lambda + Q.\frac{c}{a}\cos\lambda.\operatorname{cotg}\varphi.$$

et l'équation des moments virtuels donnera:

$$T - f.Q.\cos\lambda - f'.P'.\operatorname{cotg}\varphi = 0,$$

ou bien: $$(a)\quad f'.\operatorname{cotg}^2\varphi - (1 + f'\operatorname{tang}\lambda).\operatorname{cotg}\varphi = \frac{b}{c}.\operatorname{tang}\lambda - \frac{a}{c}.f \ldots\ldots$$

Mais il ne serait point permis d'étendre cette solution à toutes les valeurs de λ, positives et négatives. En effet, supposons (fig. 6) que la force Q tombe à gauche de la verticale descendante et au dessus de l'horizontale GH, entre GH et GB, la barre étant toujours censée placée dans sa position d'équilibre. On voit que le rôle des deux composantes AS, BT est maintenant interverti par rapport au cas de (fig. 5), et qu'elles tendent toutes deux à faire glisser la barre de A

vers O et de B vers Y. Si donc on décompose d'abord $BT = Q.\frac{c}{a}$ suivant la normale et BY, et que l'on fasse $QGH = \eta$, on obtiendra:

$$BM = Q.\frac{c}{a}.\cos\eta \quad , \quad BU = Q.\frac{c}{a}.\sin\eta;$$

et comme la force BU tend à écarter la barre du plan OA, et à surmonter simplement les resistances, elle n'est plus susceptible d'aucune décomposition ultérieure. Mais la force $AS = Q.\frac{b}{a}$ doit se décomposer non pas suivant les droites AO, AB, parceque tout effort suivant AO serait encore capable d'un effet mixte, mais suivant AV, AB. On obtiendra ainsi:

$$AV = Q.\frac{b}{a}.\frac{\sin(\varphi-\eta)}{\cos\varphi} = Q.\frac{b}{a}.\cos\eta.\operatorname{tang}\varphi - Q.\frac{b}{a}\sin\eta,$$

$$BK = AR = Q.\frac{b}{a}.\frac{\sin(90^0+\eta)}{\cos\varphi} = Q.\frac{b}{a}.\left(\frac{\cos\eta}{\cos\varphi}\right).$$

Or cette dernière force se reporte au point B, où elle occasionne la pression partielle $BN = Q.\frac{b}{a}.\frac{\cos\eta}{\cos\varphi}.\cos\varphi = Q.\frac{b}{a}.\cos\varphi$, et une force dynamique $BZ = Q.\frac{b}{a} \times \cos\eta.\operatorname{tang}\varphi$; de sorte que nous avons maintenant pour P, P' les valeurs suivantes, très différentes de celles du premier cas:

$$P = Q.\frac{b}{a}.\cos\eta.\operatorname{tang}\varphi - Q.\frac{b}{a}.\sin\eta;$$

$$P' = BM + BN = Q.\frac{c}{a}.\cos\eta + Q.\frac{b}{a}.\cos\eta = Q.\cos\eta.$$

Au point A il y aura une traction nulle, et au point B une traction verticale ascendante T', ayant la valeur

$$T' = BU + BZ = Q.\frac{c}{a}.\sin\eta + Q.\frac{b}{a}.\cos\eta.\operatorname{tang}\varphi.$$

Il y a donc dans le passage de l'un cas à l'autre une solution de continuité mécanique, puisque les pressions normales du second cas ne saurient être déduites de celles du premier, en changeant dans celles-ci l'angle λ en $-(90^0+\eta)$; ce que l'on peut vérifier aisément. Pour les tractions la difficulté serait bien plus grande, puisqu'une fois on obtient cette force au point A, et l'autre fois au point B.

L'équation aux moments virtuels donne maintenant:

$$T' - f'.P' - f.P.\operatorname{tang}\varphi = 0,$$

ou bien:

$$\text{(B)}\quad (C.\sin\eta - a.f'.\cos\eta)\,\text{cotg}^2\varphi + b(\cos\eta + f.\sin\eta).\text{cotg}\varphi - f.b.\cos\eta = 0.$$

La solution de continuité mécanique qu'on vient de signaler, provient en général de ce caractère d'indétermination propre à la loi de la décomposition des forces, qui se subordonne d'elle-même à une loi spéciale de nécessité mécanique dans chaque cas particulier; et elle se produit dans le passage d'un cas au cas analogue; précisement parceque cette indétermination disparaît à chaque fois d'une manière différente.

Examinons succintement les conditions de l'équilibre rationnel pour lequel $f = 0$, $f' = 0$. Le cas de la (fig. 5) exige alors que l'on ait:

$$T = Q.\frac{b}{a}.\sin\lambda + Q.\frac{c}{a}.\cos\lambda.\text{cotg}\varphi = 0.$$

On voit que cet équilibre est possible seulement dans le càs de λ négatif, et quand la force Q agit en G, à gauche de la verticale GV. Prenant en effet $\lambda = -\lambda'$, on conclut de $T = 0$:

$$\text{cotg}\varphi = \frac{b}{c}.\text{tang}\lambda'.$$

Mais le cas de l'autre figure exige $T' = 0$, partant:

$$c.\sin\eta + b.\cos\eta.\text{tang}\varphi = 0;$$

ce qui arrive seulement quand la force agit au dessous de l'horizontale GH. Prenant en effet $\eta = -\eta'$, on aura:

$$\text{cotg}\varphi = \frac{b}{c}.\text{cotg}\eta'.$$

Si donc on suppose que la force Q ait la même direction dans les deux cas, ce qui revient à $\eta' = 90^\circ - \lambda'$, on voit qu'il n'y a plus qu'une solution, et que la discontinuité cesse d'avoir lieu. Mais c'est là encore une conséquence de la nécessité mécanique qui nous montre pour le cas actuel que sous l'action de la même force il ne saurait y avoir deux positions d'équilibre *rationnelles*, différentes.

Mais comment déterminer les positions d'équilibre *physiques* dans la supposition que la force Q soit dirigée dans l'angle HGV, et qu'elle fasse un angle λ' avec la verticale GV? En changeant λ en $-\lambda'$ dans la valeur de T, (fig. 5), on obtient:

$$T = \frac{Q}{a}.(c.\cos\lambda'.\text{cotg}\varphi - b.\sin\lambda')$$

et l'on voit que T reste positif pour toutes les valeurs de φ qui satisfont à l'inéquation:

$$\cot g\,\varphi > \frac{b}{c}.\tan g\,\lambda';$$

c'est-à-dire pour tous les φ inférieurs à l'inclinaison d'équilibre rationnel. Donc dans ce cas il faut employer la formule (α) relative à la (fig. 5), pour calculer la position demandée, avec l'attention d'y changer λ en $-\lambda'$. Mais si T devenait négatif, il faudrait recourir à la formule (β), en y changeant η en $-\eta'$. Ainsi l'on aura:

$$T' = Q.\frac{b}{a}.\cos\eta'.\tan g\,\varphi - Q.\frac{c}{a}.\sin\eta'.$$

On voit que T' reste positif pour tous les cas de φ supérieur à l'inclinaison d'équilibre rationnel, ou pour tous les φ de l'inégalité

$$\cot g\,\varphi < \frac{b}{c}.\tan g\,\lambda';$$

et dès lors il faut admettre le mode de décomposition des forces, marqué par la (fig. 6). D'ailleurs la barre pouvant indifféremment être placée dans un état de repos à droite ou à gauche de la position rationnelle, il faut qu'il y ait deux positions d'équilibre physiques, l'une d'un côté, l'autre du côté contraire. Mais ces solutions ne peuvent résulter d'une même formule (α), ou (β). En effet, ces deux formules doivent donner l'une une position, et l'autre la seconde position, et ne sauraient avoir une racine commune, que quand de certaines conditions subsistent entre les données a, c, f, f', λ'. Dans l'hypothèse de $\lambda' = 0$, l'équation (α) fournit les résultats déjà connus, et l'équation (β) produit le résultat évident $\varphi = 90^\circ$, et une solution inadmissible.

Si l'on suppose au contraire $\eta = 0$, dans la formule (β), ou $\lambda' = 90^\circ$, on obtient l'équation particulière

$$\cot g^2\varphi - \frac{b}{a.f'}.\cot g\,\varphi + \frac{f.b}{a.f'} = 0,$$

qui doit être discutée comme celle du cas où la force Q est verticale.

On pourrait examiner le cas où la force Q, au lieu d'avoir une direction constante, ferait un angle donné avec l'axe de la barre. On pourrait déterminer aussi les limites de l'angle λ', au delà desquelles les positions d'équilibre deviennent imaginaires. Pour simplifier d'abord la discussion, on pourrait poser $f' = 0$, f restant quelconque, ou $f = 0$, f' conservant une valeur donnée.

Quant à la position d'équilibre *rationnelle*, elle est seulement possible quand

la force Q agit suivant une droite située dans l'angle droit HGV; dans les cas contraires la valeur de $\cotg\varphi$ deviendrait en effet négative; ce qui est évidemment inadmissible.

Pour construire cette position rationnelle, je prends sur la verticale (fig. 7) OB une longueur $On = b$, et je tire l'oblique Op sous l'angle λ' avec OB. Cela donne:

$$Oq = np = On.\tang\lambda = b.\tang\lambda'.$$

Je prends ensuite $Om = c$, ce qui donne $Om + On = a$, et je tire la droite qm, sur laquelle on fait $qr = a$. Par le point r je mène une horizontale rB, et par son point de rencontre avec la verticale OB, on mène une droite BA parallèle à qr; elle marquera la position demandée. On peut vérifier en effet que pour cette position, la ligne d'action de la puissance Q, appliquée en G, à une distance $AG = c$, doit passer par le point de rencontre I des normales aux deux plans en A, B; car en tirant la droite GI, on obtient le triangle GIK qui donnne:

$$\tang GIK = GK:IK = GA.\cos\varphi : GB.\sin\varphi = \frac{c}{E}\cotg\varphi = \tang\lambda'.$$

Du reste il est immédiatement évident par les moments de forces que la barre ne saurait se trouver en équilibre que quand la ligne d'action de la force Q passe par le centre I. Alors, en effet, le moment de la force à déplacer la barre, sera nul, et ne le sera que pour cette position.

§. 7.

De l'équilibre d'un corps solide, soumis a une force donnée, et s'appuyant en deux points sur deux plans inclinés qui se coupent suivant une horizontale.

Tant qu'il s'agit simplement de l'équilibre rationnel de ce cas, il est certes permis d'après les idées reçues dans la mécanique élémentaire, que les pressions normales aux points d'appui A, B des plans sont les composantes de la force Q directement appliquée, ou que les réactions normales en A, B ont une résultante égale et diamétralement opposée a la force Q, de sorte que la ligne d'action de celle-ci dans la position d'équilibre du corps, doit passer par le point de rencontre I des normales en A, B aux deux plans. Ainsi l'on obtiendra les pressions, soit en transportant le point d'application de Q jusqu'au point I, et y décomposant la force Q suivant les normales IA, IB (voir par ex. la Statique de *Monge*), soit en prenant les pressions normales en sens contraire, et projetant Q et ces

pressions ainsi estimées, sur un axe horizontal et un axe vertical; ce qui donne celles-ci par deux équations de condition. Mais pour obtenir alors la position d'équilibre même, on dira que la somme des moments des forces $Q, -P, -P'$ autour d'un point quelconque du plan AIB, autour de A ou B par exemple, est nulle. Cette égalité des moments exprime en effet et seulement que la résultante des forces $Q, -P, -P'$ est nulle, ou bien que la ligne de Q passe par le point I.

Mais quelque simple que soit cette manière de raisonner, elle présente d'abord l'inconvénient d'être subordonnée à la considération d'une résultante qui n'est pas toujours applicable à des cas plus compliqués; ensuite elle cesse d'être applicable au cas actuel même, dès qu'on se propose de rechercher la position d'équilibre physique du corps entre les deux plans. Cette assertion est suffisamment prouvée par les paragraphes précédents. Enfin c'est en étendant et en généralisant cette façon de raisonner, quoiqu'incontestablement exacte en elle-même, que l'on est parvenu à cette hypothèse de la théorie ordinaire dont l'inexactitude dans la mécanique physique me semble bien constatée; aussi par tout ce que j'ai dit précédemment. C'est pourquoi il paroît préférable de raisonner de la manière suivante, même pour le simple cas de l'équilibre rationnel.

Puisque d'après un théorème de MM. *Chasles* et *Bobilier*, et qu'on peut démontrer par les éléments de géométrie, le déplacement du corps entre le deux plans n'est qu'une rotation autour d'un seul et même point I de la rencontre de toutes les normales aux éléments de chemins décrits, il est nécessaire et suffisant pour l'équilibre que ce seul mouvement possible n'ait point lieu; partant que le moment de rotation de Q autour de I, ou que le moment total des forces, s'il y en a plusieurs, soit nul: condition qui exprime en d'autres termes que la résultante des forces passe par le point I. De là on passe ensuite aisément, et sans s'exposer à aucune inexactitude, au cas de l'équilibre physique. On voit en effet immédiatement que pour trouver alors cette position qui separe les situations de repos des positions dynamiques, il faut égaler à zéro la somme des moments de rotation des forces actives et passives par rapport au point I; et cette égalité n'est au fond que l'expression des moments virtuels effectifs, appliqués au cas actuel. Ainsi, pour achever la solution de la question physique, il reste à faire l'évaluation exacte des pressions normales P, P' aux points A, B.

Pour cela expliquons nous par l'exemple d'une barre rigide, tirée en son point G par une force verticale Q; le point G sera ainsi le centre de gravité du poids même de la barre, si l'on veut, ou d'un poids additionnel et étranger. Pour

le cas d'une échelle, le point G serait donc le centre de gravité du poids de celle-ci, augmentée du poids de l'homme qu'elle supporte.

Soit (fig. 3) OX le premier plan d'appui, inférieur d'un angle λ à l'horizon, et OY le plan d'appui supérieur, déviant d'un angle μ à gauche de la verticale OV. En prenant encore une fois

$$GA = c,\ GB = b,\ b + c = a,\ BAO = \varphi,\ Q' = Q\frac{b}{a},\ Q'' = Q\frac{c}{a},$$

on obtiendra, suivant les principes de la décomposition naturelle des forces, exposés au (§. 3):

$$P' + Q\,\frac{c}{a}\cdot\frac{\cos(\varphi+\lambda)}{\sin(\varphi+\lambda+\mu)};\ P = Q.\frac{b}{a}.\sin\lambda + Q.\frac{c}{a}\cdot\frac{\cos\mu.\ \sin\varphi}{\sin(\varphi+\lambda+\mu)}$$

$$T = AX' + AX = Q.\frac{b}{a}.\sin\lambda + Q.\frac{c}{a}\cdot\frac{\cos\mu.\cos\varphi}{\sin(\varphi+\lambda+\mu)};\ 0A = x,\ 0B = y;$$

$$x^2 + y^2 + 2xy\sin(\lambda+\mu) = a^2;\ dy = -\,dx\cdot\frac{x + y.\ \sin(\lambda+\mu)}{y + x.\ \sin(\lambda+\mu)}$$

$$y : x = \sin\varphi : \sin(180^\circ - 90^\circ - \lambda - \varphi - \mu) = \sin\varphi : \cos(\varphi+\lambda+\mu),$$

$$\text{d'où } dy = -\frac{\cos\varphi.\ dx}{\sin(\varphi+\lambda+\mu)};$$

L'équation des moments virtuels $(T - f.p).dx + f'.P'.dy = 0$ donnera:

$$T - fP - f'P'.\frac{\cos\varphi}{\sin(\varphi+\lambda+\mu)} = 0,$$

et par la substitution des valeurs de P, P', T en Q, b, c, φ, λ, μ:

$$b(\sin\lambda - f\cos\lambda + c.\ \cos\mu.\ \frac{\cos\varphi - f.\ \sin\varphi}{\sin(\varphi+\lambda+\mu)} - f'.c.\ \frac{\cos\varphi.\ \cos(\varphi+\lambda)}{\sin^2(\varphi+\lambda+\mu)} = 0.$$

Cette égalité peut servir à calculer l'inclinaison d'équilibre de l'échelle, la distance c étant donnée. A l'inverse elle servira plus commodément encore à calculer la distance c dont on peut s'élever sur l'échelle pour atteindre la position d'équilibre qui réponde à une inclinaison donnée.

Pour reconnaître dans quelles circonstances la position d'équilibre n'existe plus, précisement parceque les diverses situations de la barre seraient toutes des états de repos, il faut résoudre l'équation obtenue par rapport à tang φ, et examiner à quelles conditions la quantité radicale devient imaginaire. Mais tout en abandonnant ces détails un peu longs, examinons dans quels cas la question même de l'équilibre rationnel est possible, et dans quels cas elle ne l'est pas.

1) Pour $f=0$, $f'=0$, l'équation donne:

$$b\sin\lambda + c.\frac{\cos\mu.\cos\varphi}{\sin(\varphi+\lambda+\mu)} = 0 \text{ et}$$

$$\tang\varphi = -[c.\cos\mu + b.\sin\lambda.\sin(\lambda+\mu)] : b.\sin\lambda.\cos(\lambda+\mu).$$

Or évidemment la quantité φ ou $\tang\varphi$, doit être positive pour toute solution, prise strictement dans le sens mécanique de la question; et ce sont les solutions de cette espèce qu'il importe de reconnaître. Mais pour λ, μ positifs à la fois (c'est le cas de fig. 3), la valeur de $\tang\varphi$ est négative, et la position d'équilibre rationnelle est impossible. Cette impossibilité subsiste jusqu'à la limite de $\mu=0$, λ conservant une valeur positive jusqu'à zéro inclusivement.

2) Supposons λ et μ négatifs à la fois, et faisons $\lambda = -\lambda'$, $\mu = -\mu'$, ce qui place les deux plans d'appui entre l'horizontale et la verticale supérieure, et donnera:

$$\tang\varphi = \frac{c.\cos\mu' + b.\sin\lambda'.(\lambda'+\mu')}{b.\sin\lambda'.\cos(\lambda'+\mu')} .$$

Cela produit dans ce cas une solution toujours possible, excepté le cas où les deux plans sont couchés l'un sur l'autre. Mais ce dernier cas doit être exclus, parcequ'alors la question primitive devient illusoire; ainsi que la transmission des forces adoptée dans le cas général.

3) μ reste positif et $\lambda = -\lambda'$, $\tang\varphi = \dfrac{c.\cos\mu - b.\sin\lambda'.\sin(\mu-\lambda')}{b.\sin\lambda'.\cos(\mu-\lambda)}$.

Mais on voit que pour conserver φ positif, on doit avoir l'inégalité

$$c.\cos\mu > b.\sin\lambda'.\cos\lambda'.\sin\mu - b.\sin^2\lambda'.\cos\mu,$$

$$\text{ou } \tang\mu < \frac{c+b.\sin^2\lambda'}{b.\sin\lambda'.\cos\lambda'} = < \tang\lambda' + \frac{c}{b.\sin\lambda'.\cos\lambda'}.$$

On reconnaîtra donc entre quelles limites la position de l'équilibre rationnel est possible, et dans quel cas elle ne l'est plus.

La formule qui donne $\tang\varphi$, resout en même temps la question purement géométrique, celle de placer une barre ou une droite d'une longueur donnée, entre deux axes (OX, OY) de manière que la verticale du point désigné G de cette longueur passe par le point de rencontre I des normales, menées par les points extrêmes aux deux axes.

§. 8.

Equilibre d'une échelle, appliqué sur un plan horizontal, et pesant par sa partie supérieure sur un cylindre ou sur une arête horizontale fixe.

Pour traiter ce nouvel exemple, soit d'après la fig. (8):

$GA = c$, $GC = b$, $b + c = a$, $CAO = \varphi$ l'inclinaison d'équilibre.

z la distance du point de contact B à l'extrémité supérieure de la barre, quand celle-ci a l'inclinaison; BO la verticale tirée par le point de contact B du cylindre et de la barre;

Dq la verticale du centre,

$$OA = x \quad , \quad qD = Om = h \quad , \quad OB = y \quad , \quad BD = R.$$

Les quantités a, b, c, h, R sont connues, tandis que x, y, z, φ sont à trouver.

On déduit d'abord de la figure:

$$x = (a - z)\cos\varphi \;,\; y = (a - z)\sin\varphi \;,\; \text{et } y = h + Bm = h + R\cos\varphi,$$

d'où résulte:

$$(a - z)\sin\varphi = h + R\cos\varphi.$$

En désignant par P la pression normale en A, par P' celle en B, qui n'est plus horizontale, mais suivant BD, et par T la traction à l'extrémité inférieure, on a par les moments:

$$(T - f.P)\,dx + f'.P'.dz = 0.$$

Pour éviter une complication de calcul, bornons nous à supposer le rayon R infiniment petit, et il viendra:

$$dz = \frac{h.\cos\varphi.d\varphi}{\sin^2\varphi},\; dx = -\frac{h.d\varphi}{\sin^2\varphi},\; dz = -dx.\cos\varphi.$$

Ainsi la somme $d\mu$ des moments virtuels pour une position de repos quelconque devient:

$$d\mu = (T - f.P)\,dx - f'.P'.\cos\varphi.dx,$$

et pour la figure d'équilibre on aura:

$$T - f.P - f'P'.\cos\varphi = 0.$$

Cette équation diffère de son analogue du (§. 3. De plus sa forme analitique, fût-elle la même, elle en différerait encore, parceque les quantités T, P, P' ont changé de valeurs. En raisonnant comme au (§. 3), on obtient d'abord en A, B, les deux forces verticales $Q\left(\frac{b-x}{a-x}\right)$, $Q.\left(\frac{c}{a-x}\right)$ en B. Or on voit que cette dernière doit se décomposer suivant la normale BD, et suivant l'axe BA, ce qui donne:

$$P' = Q.\frac{c}{a-x}.\cos\varphi \text{ suivant } BD;$$

et la composante $Q.\frac{c}{a-z}.\sin\varphi$ se reportant au point A, on en conclut que P' exprime en effet toute la pression normale du cylindre. On obtient ensuite pour P, T:

$$P = Q.\left(\frac{b-x}{a-z}\right) + Q.\frac{c}{a-x}.\sin^2\varphi\ ,\quad T = Q.\frac{c}{a-x}.\sin\varphi.\cos\varphi.$$

Ces valeurs étant mises sous la forme suivante, en vertu de R infiniment petit:

$$T = Q.\frac{c}{h}.\sin^2\varphi.\cos\varphi,\ P = Q - Q.\frac{c}{h}.\sin\varphi.\cos^2\varphi,\ P' = Q.\frac{c}{h}.\sin\varphi\cos\varphi,$$

et substituées ensuite dans $d\mu = 0$, on en déduit:

$$\sin\varphi.\cos\varphi(\sin\varphi + f - f'.\cos\varphi) - f.\frac{h}{c} = 0:$$

équation de condition toute differente de cette du (§. 3), quoique les raisonnements employés dans chaque cas soient les mêmes; et elle subsistera encore alors même que le cylindre serait remplacé par l'arête horizontale d'un mur vertical de hauteur h. Il est vrai que la normale à une telle arête a une direction indéterminée; mais la condition qui exige ici qu'elle soit en même temps perpendiculaire à la face plate ou courbe de la barre ou de l'échelle ou point d'appui, la rend parfaitement déterminée. Dans le cas particulier de $f' = f$, l'equation en φ devient:

$$\cos\varphi - \cos^3\varphi = f.\frac{h}{c}.$$

On peut reconnaître aisément que le maximum de $\cos\varphi - \cos^3\varphi$, arrive pour $\cos\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ et qu'il vaut $\frac{2}{9}\sqrt{3}$; donc, pour que l'équation précedente soit possible, la quantité $f.\frac{h}{c}$ doit être inférieure à $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, ce qui donne $c > \frac{9fh}{2\sqrt{3}}$.

Donc toutes les fois que $f=f'$, et que la quantité c a une valeur moindre, la figure d'équilibre n'existe plus, et la barre restera à l'état de repos dans toute position oblique entre les deux surfaces d'appui.

Pour reconnaître de même cette limite supérieure de $f.\frac{h}{c}$ dans le cas de $f.f'$ quelconque, il faudrait chercher le maximum U, de la quantité variable $\sin\varphi\cos\varphi\,(\sin\varphi+(f-f')\cos\varphi)$ et mettre ensuite la condition: $f.\frac{h}{c}<U_1$ ou $c>\frac{f.h}{U_1}$. Dans tous les cas où elle ne serait pas remplie, toutes les positions seraient de repos.

Pour se convaincre mieux que l'impossibilité de la question, si elle arrive, indique en effet qu'alors les positions sont toutes de repos, il suffit de considérer que pour φ quelconque on a:

$$d\mu = Q.\frac{c}{h}.dx.\left[\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi+(f-f').\cos\varphi) - f.\frac{h}{c}\right].$$

On voit immédiatement par là que quand le nombre $f.\frac{h}{c}$ est supérieur au maximum de $\sin\varphi\,\cos\varphi\,(\sin\varphi+(f-f')\cos\varphi)$, la somme $d\mu$ des moments virtuels reste négative, c'est à-dire que la force motrice est trop faible pour pouvoir faire glisser la barre, sous quelqu'angle que celle-ci soit placée. Mais évidemment les frottements ne sauraient faire naître le mouvement ascendant. Donc la barre restera au repos dans toutes les positions; et ce cas arrive d'autant plus aisément que la distance $GA=c$ est plus faible.

On pourrait mettre aussi la condition que l'échelle eût sa position d'équilibre, étant appuyée par son extrêmité supérieure C; alors on ferait $z=o$, d'où résulte $\sin\varphi=\frac{h}{a}$,.. etc.....

§. 9.

Figure et position d'équilibre de la double échelle. (Fig. 4.)

Considérons pour exemple la double échelle dans laquelle chaque montant simple se termine en haut par une partie percée d'un oeil et se joint à l'autre par un essieu circulaire en bois ou en fer qui traverse chaque oeil. Ainsi l'ensemble peut s'ouvrir et se fermer à volonté autour de l'axe de l'essieu dont il s'agit. Le système entier étant placé dans une position quelconque de repos, ou dans la position d'équilibre sous l'action des poids Q, Q' appliqueés aux points G, G' des montants, il sagit de reconnaître d'abord la position des points de contact des deux creux avec le périmètre de l'essieu. Il est clair par la symétrié géométrique de

l'ensemble, que ces deux points doivent se trouver à la fois, ou sur la demi-circonférence ascendante, ou descendante de ce périmètre. Mais comme les pressions transmises à l'essieu COC' ne peuvent se produire que suivant les normales à la surface cylindrique aux point de contact, je dis que ceux-ci sont aux extrémités d'un même diamètre horizontal: car s'ils étaient plus bas ou plus haut, il donneraient lieu à une résultante qui souleverait ou abaisserait un tant soit peu l'essieu, et un très petit mouvement singulier devrait s'ensuivre, contrairement à l'hypothèse de l'équilibre de repos. Ainsi le poids Q aura ses deux points d'appui aux extrémités A, C, et le poids Q' se reportera aus deux points extrêmes A', C'. Les composantes verticales de Q, Q' sont donc:

$$Q.\frac{AM}{AC} \text{ en } C \quad , \quad Q'.\frac{CM}{AC} \text{ en } M$$

$$Q'.\frac{A'M'}{A'C'} \text{ en } C' \quad , \quad Q.\frac{C'M'}{A'C'} \text{ en } M'.$$

Supposons la figure d'équilibre représentée par la (fig. 4), et tirons la verticale OD par le centre de l'axe; on pourra faire:

$$CAD = C'A'D' = \varphi \quad , \quad BC = B'C' = r \quad , \quad OC = OC' = \varrho,$$

le rayon de l'essieu. Si l'on rémarque que chaque force verticale en C, C' doit se décomposer de fait suivant les droites COC', CMA d'une part, et suivant les lignes $C'O'C'$, $C'M'A'$ de l'autre, on trouvera pour la poussée horizontale de C vers C', et pour la poussée contraire, les valeurs

$$\Pi_1 = Q.\frac{AM}{AC}\operatorname{cotg}\varphi \quad , \quad \Pi'_1 = Q'.\frac{A'M'}{A'C'}\operatorname{cotg}\varphi;$$

pour la traction horizontale de gauche à droite au point A, et pour la traction contraire au point A':

$$T = Q.\frac{AM}{AC}.\operatorname{cotg}\varphi \quad , \quad T' = Q'.\frac{A'M'}{A'C'}\operatorname{cotg}\varphi.$$

Enfin les tractions verticales aux deux points d'appui seront

$$P = Q \quad , \quad P' = Q'.$$

On peut rémarquer que AC, $A'C'$ sont des longueurs égales, mais qu'il n'en est pas de même de AM, $A'M'$, car il faut pour plus de généralité supposer les deux poids Q, Q' inégaux, par exemple $Q > Q'$, et diversement appliqués aux deux montants de l'échelle. Ainsi la poussée résultante en haut n'est pas nulle en général, et s'exerce de droite à gauche avec la force excédante

$$\Pi_1 - \Pi_1' = Q.\text{cotg}\,\varphi.\frac{AM}{AC} - Q'.\text{cotg}\,\varphi.\frac{A'M'}{A'C'}.$$

De plus il serait aisé à vérifier que cette force ne saurait tourner l'échelle autour du point d'appui A'; ce qui est évident aussi en soi, puisque la résultante de (Q, Q') tombe par hypothèse entre (A, A'). Mais pour que l'équilibre subsiste, eu égard aux frottements en A, A', et en C, C', il ne suffit pas que la somme des moments virtuels effectifs de toutes les forces $T, T', fQ, fQ', f'\Pi_1, f'\Pi_1'$ soit nulle. Il est clair en effet que sans déplacer le point A' de l'extrêmité inférieure du montant à gauche, on peut déplacer l'extrêmité A de l'autre pièce; ce qui développe seulement les moments virtuels des forces $T, fQ, f'\Pi, f'\Pi_1'$. En effet, dès que A se déplace, l'essieu (O) doit descendre et l'échelle s'ouvrir davantage; ce qui met en jeu les frottements aux points C, C, en même temps que celui en A. Donc il est d'abord nécessaire que la somme des moments virtuels qui repondent à ce premier déplacement, soit nulle. Mais comme l'extrêmité A' peut se déplacer à son tour, A restant fixe, il semble par la même raison que l'on doive admettre l'égalité à zéro de la somme des moments qui repondent à ce second mouvement relatif. Aussi poserons nous d'abord chacune des équations de conditions qui en resultent, sauf à reconnaître et à rejeter ensuite celle d'entr'elles qui paraîtra superflûe.

Pour les former je ferai:

$$DA = X\ ,\ AC = a\ ,\ AM = m\ ,\ A'C' = a'\ ,\ A'M' = m'\ ,\ \text{tang}\,\varphi = \vartheta;$$

$$\text{d'où: } x = a.\cos\varphi\ ,\ dx = -a.\sin\varphi.d\varphi\ ,$$

$$T = \Pi_1 = Q.\frac{m}{a}.\text{cotang}.\varphi\,;\ T' = \Pi_1' = Q'.\frac{m'}{a}\text{cotang}\,\varphi,$$

L'extrêmité A' restant fixe d'abord, il est clair que si celle A reculait de gauche à droite, jusqu'au point de faire descendre l'axe (O) de manière à le coucher sur le plan d'appui, son point de contact (C, C') avec chaque creux circulaire parcourrait sur celui-ci un chemin $r(\varphi-\varphi_1)$, φ_1 étant la moindre valeur de l'angle φ, et l'effet utile absorbé par le frottement en C', C', serait $f'.\Pi_1.r.(\varphi-\varphi_1) + f'.\Pi'.r(\varphi-\varphi_1)$; donc son moment virtuel momentané sera $f'(\Pi_1+\Pi_1').r.d\varphi$. De plus, le moment de la poussée $\Pi_1 - \Pi_1'$ qui se fait de droite à gauche suivant C, C', aura la valeur $-(\Pi_1-\Pi_1')dx$. On obtiendra donc par là:

$$-(T-T')dx + (T-fQ)dx + f'(\Pi_1+\Pi_1')r.d\varphi = 0,$$

ou bien:

$$-(T'-fQ)a.\sin\varphi + f'(\Pi_1+\Pi_1')r.d\varphi = 0$$

et par la substitution des valeurs de T', Π_1, Π_1' il vient:

$$-Q'.m'.\cos\varphi + f.Q.a.\sin\varphi + f'.\frac{r}{a}.\text{cotg}\,\varphi(Q.m + Q'.m') = 0.$$

Le sesond mouvement relatif donnera de même:

$$-Q.m.\cos\varphi + f.Q'.a.\sin\varphi' + f'.\frac{r}{a}.\text{cotg}\,\varphi(Qm + Q'm') = 0.$$

Si l'on pose $\text{tang}\,\varphi = \vartheta$, et qu'on exprime $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ en ϑ, on reduit ces résultats aux formes suivantes:

$$\text{(I.)}\quad (Q'.m' - f.Q.a.\vartheta)\vartheta = f'.\frac{r}{a}.(Qm + Q'.m')\sqrt{(1+\vartheta^2)},$$

$$\text{(II.)}\quad (Q.m - f.Q'.a.\vartheta)\vartheta = f'.\frac{r}{a}.(Qm + Q'.m').\sqrt{(1+\vartheta^2)}.$$

Mais en vertu de la symétrie du système, les deux montants ont toujours des inclinaisons à l'horizon, égales entr'elles. quelle qu'en soit la position. Donc il suffira d'adopter celle de ces deux égalités qui donne la plus grande valeur pour ϑ. Or en négligeant d'abord dans chacune le second membre, comme très petit, on en tire pour ϑ les valeurs

$$\vartheta = \frac{Q'}{Q}.\frac{m'}{af}\ ,\quad \vartheta' = \frac{Q}{Q'}.\frac{m}{af}.$$

Ainsi tant qu'on aura $Q.\sqrt{m} > Q'.\sqrt{m'}$, c'est la seconde valeur ϑ' qu'il faut adopter et qui suffira pour assurer la stabilté du système entier. Mais cette seconde valeur répond à l'égalité qui exprime la position d'équilibre de l'extrêmité A'; donc puisque l'on a $\vartheta < \vartheta'$, il s'ensuit que la position correspondante de la branche CA est une position de repos. Ainsi pour $Q\sqrt{m} > Q\sqrt{m}$ il suffit d'adopter la valeur ϑ', parceque le montant à gauche occupe sa position d'équilibre sous l'inclinaison $\text{tang}\,\varphi' = \vartheta'$, tandis que l'autre a sous cette inclinaison une situation de repos. Si l'on veut avoir ensuite une valeur plus approchée de $\vartheta' = \frac{Q}{Q'}.\frac{m}{af}$, on substituera cette première valeur dans (II), ce qui donnera:

$$(Qm - f.Q'.a.\vartheta)\vartheta = f'.\frac{r}{a}.(Qm + Q'.m')\sqrt{\left[1 + \left(\frac{Qm}{Q'af}\right)^2\right]},$$

$$\text{ou}\quad Qm - fQ'.a.\vartheta = f'.\frac{r}{a}.(Qm + Q'.m')\sqrt{\left[1 + \left(\frac{Q'.a.f}{Q.m}\right)^2\right]}.$$

En calculant par cette ϑ par cette dernière, on tiendra suffisamment compte des frottements aux points de contact des creux avec l'essieu d'articulation. Il est du reste évident que l'équation (II) étant satisfaite, l'équilibre général est assuré.

C'est ce qu'on peut aussi vérifier, en prenant la somme totale des moments virtuels des forces, et démontrant qu'elle est négative pour la valeur de φ de l'équation (II.).

Rémarque.

Parfois les deux montants de la double échelle sont reliés entr'eux par une corde horizontale d'une longueur donnée. Dans ce cas l'échelle ne peut s'ouvrir que jusqu'au point d'avoir la corde pour sous-tendante de son ouverture, et par là sa stabilité est parfaitement assurée. Mais quelle est alors la tension de cette corde de liaison, 1°. en supposant qu'il n'y ait pas de résistances passives, 2°) en tenant compte de ces résistances? De quels principes faut-il faire usage ici, et comment faut-il les appliquer, pour obtenir un résultat exact? La solution suivante me parait plutôt admissible que toute autre; précisement parceque toute manière de procéder différente me semble amener des résultats contradictoires.

D'abord il est clair que le cordon de liaison doit avoir une tension Z, telle, que s'il était coupé quelque part, la force active Z, capable de cette tension, en agissant à chaque bout de cordon, devrait empêcher l'ouverture angulaire de s'agrandir au sommet. Donc l'équilibre doit exister entre les forces primitives T, T' en A, A', la poussée $\Pi_1 - \Pi_1'$ et les deux forces actives Z, Z_1 appliquées l'une a $A'C'$ qu'elle tire de b' vers b, et l'autre à la barre AC qu'elle tire de b vers b' en sens contraire. Donc, puisque sous l'action de toutes ces forces actives, le système ne saurait évidemment prendre aucun mouvement simple de transport horizontal, il suffit que la somme de leurs moments virtuels qui repondent à une descente verticale de l'axe (O) et à un mouvement de déformation angulaire, soit nulle. Mais le moment virtuel de la poussée est évidemment nul dans ce cas: ainsi, en faisant $DA = D'A' = x = x'$, $bc.\cos\varphi = z$, on aura:

$$T.dx + T'.dx' - Z.dz - Z.dz = 0.$$

Mais $dx = -a.\sin\varphi.d\varphi$, $dx' = dx$, $dz = -bc.\sin\varphi.d\varphi$, partant:

$$-(T + T').a + 2Z.bc = 0 \quad , \quad \text{et} \quad Z = \tfrac{1}{2}(T + T').\frac{a}{bc}.$$

Ainsi l'on n'a qu'à substituer les valeurs de T, T', pour en déduire Z. Si la difficulté ne se trouve pas levée par le raisonnement précedent, je demanderai comment elle doit l'être; car on ne peut prétendre qu'il y ait indétermination. Du reste on ne saurait guères s'étonner des difficultés de ce genre, si l'on considère que les questions de l'espèce actuelle touchent à la limite extrême de l'applicabilité des principes de la mécanique et des ressources d'investigation, connues jusqu'à ce jour dans le domaine de la science.

(La suite au cahier procnain.)

Berichtigung zu S. 199, gegeben von dem Verfasser gleich nach Beendigung des Drucks seiner Abhandlung.

Der Gedanke, welcher der in diesem Anhange niedergelegten Integrationsmethode linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung zu Grunde liegt, ist übrigens schon anderwärts ausgesprochen. *Euler* giebt in seinen „*Institutiones calculi integralis*" (vol. III. pag. **308** und **368**) verschiedene lineare Differentialgleichungen an, und zeigt an jeder einzeln, dass die Bedingung, unter welcher dieselbe auf die Integration linearer Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung zurückführt, identisch ist mit derjenigen, unter welcher das Polynom der unabhängigen Veränderlichen die Zerlegung in rationale Polynome eines niedrigeren Grades zulässt. Als neu könnte demnach nur meine Darstellungsweise des erwähnten Zusammenhanges gelten, der man aber um so eher hier eine Stelle einräumen wird, als die diesem Anhange vorausgehenden Darstellungen jetzt reichen Stoff zur Benutzung jenes Zusammenhanges abgeben. *Weiler.*

Mannheim, den **24.** Februar **1855.**

Druckfehler in der hier oben bezeichneten Abhandlung.

Seite 112 Zeile 6 statt: stets unbrauchbar lese man: zur Darstellung des allgemeinen Integrals stets unbrauchbar.
» 113 » 4 von unten statt drei, l. drei und mehr.
» 118 » 10 st. $Z =$ l. $s =$.
» 118 » 14 st. $s + s_0$, l. $s = s_0$
» 119 » 10 st. $Z =$ l. $s =$.
» 121 » 11 v. u. st. $c_0 s_1$ l. $c_0 s_2$.
» 121 » 3 v. u. st. sb l. $2b$.
» 126 » 3 st. (α) l. (a).
» 126 » 6 st. $\alpha = 0$ l. $a = 0$.
» 126 » 3 v. u. st. (α) l. (β).
» 128 » 10 st. $4y_2^2 \frac{d^2 s_2}{dy_2^2} =$ l. $4y_2^2 \frac{d^2 s_2}{dy_2^2} +$
» 131 » 7 st. unabhängig l. von y unabhängig.
» 135 » 11 v. u. st. Grenze l. Genüge.
» 143 » 11 v. u. st. $a+b$, $-(a+b)$ l. $a-b$, $-(a-b)$.
» 144 » 14 st. y l. y^{m-n}.
» 145 » 9 st. eingeführten l. eingeführten n.
» 152 » 5 st. $\frac{d^2 s}{dy^2} =$ l. $\frac{d^2 s}{dy^2} +$.
» 157 » 7 v. u. st. der Theil l. der andere Theil.
» 160 » 11 st. $X \frac{ds_1}{dx}$ l. $X \frac{ds_1}{dx} +$.
» 160 » 6 v. u. füge hinzu: (a).
» 162 » 12 st. $\frac{1}{4} y_2^2 \frac{d^2 s_1}{dy_2^2} =$ l. $\frac{1}{4} y_2^2 \frac{d^2 s_1}{dy_2^2} -$

Seite 165 Zeile 4 st. x mit α l. x mit $x - \alpha$.
» 170 » 12 st. x mit $x = \alpha$ l. x mit $x - \alpha$.
» 171 » 11 st. $= (b+1)$ l. $= -(b+1)$.
» 176 » 11 füge hinzu: (b).
» 180 » 13 st. α_1 und α_2 von l. a_1 und a_2 von.
» 181 » 1 v. u. st. $\frac{ds}{dy}$ l. $\frac{ds}{d\alpha}$.
» 182 » 8 v. u. st. (β) l. (b).
» 184 » 10 st. $= Z$ l. $= s$.
» 185 » 3 v. u. st. $+ \frac{ds_1}{dy}$ l. $+ y \frac{ds_1}{dy}$.
» 187 » 14 st. $(\beta - y_1)^a$ l. $(\beta + y_1)^a$.
» 187 » 15 st. $(\beta - x_1)^{a-\alpha}$ l. $(\beta + x_1)^{a-\alpha}$.
» 190 » 8 v. u. st. $a + \frac{b}{a} + c\alpha$ l. $\alpha - \frac{b}{\alpha} + c\alpha$.
» 194 » 11 st. zwei veränderliche l. von zwei veränderlichen.
» 196 » 9 v. u. st. drei veränderliche l. von drei veränderlichen.
» 199 » 8 st. $s = s_1 + s$ l. $s = s_1 + s_0$.
» 201 » 14 v. u. st. das $n$te l. das $m$te.
» 206 » 1 v. u. st. $\frac{d^{q+r+s+\dots} s}{du^q dv^r dw^s \dots}$ l. $\frac{d^{q+r+s+\dots} s_1}{du^q dv^r dw^s \dots}$.
» 207 » 2 st. $f(r) = 0$ l. $f(s) = 0$.
» 207 » 3 st. $\varphi(s)$, weil $\varphi(s)$, l. $\varphi(s_1)$, weil $\varphi(s_1)$.

7.

Examen de quelques difficultés de la mécanique physique.

(Par M. *Steichen*, professeur à l'école militaire de Bruxelles.)

(Suite du mémoire No. 6., cahier précédent.)

---

§. 10.

Mouvement d'une barre pesante, glissant par une extrêmité sur un plan vertical, et par l'extrêmite inférieure sur un plan d'appui horizontal.

Au premier abord cette question peut encore une fois paraître insignifiante; mais en réalité elle présente plus d'une difficulté qu'il s'agit de lever, et donne lieu à des considérations importantes de théorie. Dans le tome 9. des Annales de *Gergonne* on en expose une solution, basée sur des idées qui se trouvent déjà refutées d'avance par tout ce qui est dit dans les paragraphes precèdents; je ne m'arrêterai donc pas à la discuter, d'autant plus que le résultat des forces vives auquel je parviendrai, suffira pour montrer jusqu'à quel point on peut faire fausse route dans cette matière délicate.

Soient $x = X$, $y = 0$ les coordonnées de l'extrêmité inférieure de la pièce mobile après un temps quelconque t du mouvement, $x = 0$, $y = Y$ celles de l'extrêmité supérieure au même instant.

(x, y) les coordonnées d'un point quelconque intermédiaire q, et

φ l'angle BAO de l'axe avec l'horizontale après le temps t.

Si l'on prend en outre $AB = a$, $Aq = \alpha$, OAX pour axe des abscisses, OBY pour celui des ordonnées, on obtiendra:

$$X = a.\cos\varphi\ ,\ Y = b.\sin\varphi\ ,\ dX = -a.\sin\varphi.d\varphi\ ,\ dY = +a.\cos\varphi.d\varphi.$$
$$x = (a-\alpha)\cos\varphi\ ,\ y = \alpha.\sin\varphi.$$

De ces équations on conclut immédiatement que le centre I de la rencontre des normales en A, B décrit une circonférence de rayon a; que les divers

points de la bielle décrivent des ellipses allongées ou comprimées dans le sens horizontal, et que le milieu de AB décrit un arc de cercle. Tous ces arcs courbes sont concentriques au sommet (O) de l'angle XOY. Ces mêmes équations donnent ensuite:

$$\frac{dx}{dt} = (a-\alpha).\left(\frac{d\cos\varphi}{dt}\right) = -(a-\alpha).\sin\varphi.\frac{d\varphi}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = \alpha.\frac{d.\sin\varphi}{dt} = \alpha.\cos\varphi.\frac{d\varphi}{dt},$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = (a-\alpha).\frac{d^2\cos\varphi}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \alpha.\frac{d^2\sin\varphi}{dt^2}.$$

Ainsi, en nommant v la vitesse variable qui anime la molécule dm, placée à une distance $Aq = \alpha$ sur l'axe de la barre (je supposerai la masse concentrée sur cet axe), ont peut représenter la force vive de la bielle après le temps t, par $S.v\,dm$; et comme on a actuellement

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = [(a^2 - 2a.\alpha).\sin^2\varphi + \alpha^2].\frac{d\varphi^2}{dt^2},$$

on obtient pour l'expression de la force-vive:

$$S.v^2dm = \sin^2\varphi.\frac{d\varphi^2}{dt^2}.S(a^2 - 2a\alpha)\,dm + \frac{d\varphi^2}{dt^2}.S\alpha^2dm.$$

Il est clair que le signe d'intégration S se rapporte aux éléments de masse, puisque la quantité α, qui ne change pas avec le temps pour une même molécule dm, change d'une masse dm à l'autre sur l'axe AB. $S.\alpha^2dm$ exprime donc le moment d'inertie de la bielle par rapport à sont extrêmite A. Ainsi, en posant, pour abréger,

$$S.\alpha^2dm = M.h^2,$$

et nommant M la masse entière, Mk^2 son moment d'inertie relatif au centre de gravité, on obtiendra:

$$S.\alpha^2.dm \quad \text{ou} \quad Mh^2 = Mk^2 + M.c^2,$$

et
$$S.v^2dm = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.\sin^2\varphi.M(a^2 - 2ac) + Mh^2.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Mais en négligeant d'abord les frottements dûs aux pressions, normales dynamiques en A, B, on voit d'après le principe général de l'équilibre entre l'action Q en G et les réactions d'inertie des divers éléments mobiles qu'il est nécessaire et suffisant que la somme des moments virtuels effectifs, qui répondent au mou-

vement momentané de la bielle, soit nulle. Cette condition donnera, soit qu'on décompose ici Q d'une manière quelconque, soit qu'on le laisse tout entier en son point d'action résultant:

$$-Q.c.\cos\varphi.d\varphi - S.dm.\frac{d^2x}{dt^2}.dx - S.dm.\frac{d^2y}{dt^2}dy = 0.$$

On doit prendre le premier terme avec le signe (—) mis en évidence; parceque $d\varphi$ est une quantité en elle-même négative. On peut rémarquer ici, comme dans le cas général, que l'ensemble

$$-S.dm.\left(\frac{dx.d^2x + dy.d^2y}{dt^2}\right)$$

des termes, exprime à la fois la somme des moments virtuels effectifs des réactions d'inertie totales et celle des simples réactions d'inertie tangentielles; ce qui provient de ce que le moment virtuel effectif d'une force centrifuge quelconque est nul, en vertu de son direction normale à celle du chemin décrit en chaque instant par son point d'application. Cela se vérifie aussi analytiquement, puisque l'on a:

$$dx.d^2x + dy.d^2y = ds.d^2s;$$

car cette somme se réduit ainsi à $-S.dm.\frac{d^2s}{dt^2}.ds$. Or, $-dm.\frac{d^2s}{dt^2}$, $-dm'.\frac{d^2s'}{dt^2}$ sont les réactions d'inertie tangentielles de dm, dm'...; et $-dm.\frac{d^2s}{dt^2}ds$, $-dm.\frac{d^2s'}{dt^2}.ds'$, expriment parconséquent les moments virtuels effectifs de ces forces. On conçoit ainsi d'une façon intuitive le principe des forces-vives instantanées et finies, comme une conséquence immédiate de celui des moments effectifs, et l'equation obtenue dans le cas actuel revient à cette autre:

$$-Q\cos\varphi.c.d\varphi - S.dm.v.dv = 0;$$

partant $\qquad S.v^2dm = \text{const.} - 2Q.c.\sin\varphi = C - 2Q.c.\sin\varphi.$

Substituant dans cette dernière la valeur de $S.v^2.dm$ en fonction de φ et $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$, on en déduit:

$$\text{(A.)}\quad M.[(a^2-2ac)\sin^2\varphi + h^2].\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = M.C - 2Q.c.\sin\varphi \;.....$$

Cette équation fera connaître l'angle φ en fonction du temps t, et par suite toutes les autres quantités en valeur de la variable indépendante. Mais comme la nature géometrique des chemins décrits par les divers points (x,y) est connue à l'avance, la connaîssance de x,y en t devient en quelque sorte superflûe. Du reste,

40*

la solution analytique de φ en t me paraît impossible, puisque dans le cas particulier, même d'une barre pesante, homogène, pour laquelle on aura
$a^2 - 2ac = 0$, $c = \frac{1}{2}a$, l'équation (A) devient:

$$(A') \qquad M.h.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = M.C - 2Q.c.\sin\varphi,$$

et n'est pas même intégrable par les méthodes élémentaires.

Quoiqu'il en soit d'ailleurs, il y a diverses rémarques intéressantes à faire sur la matière qui nous occupe.

D'abord $-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ exprime la vitesse angulaire même avec laquelle tous les points de la bielle tournent momentanément autour du centre instantané I des normales AI, BI. Soit en effet $d\vartheta$ la rotation élémentaire de AB autour de I, on aura pour l'élément de chemin décrit par A, d'une part:

$$dX = AI.d\vartheta = a\sin\varphi.d\vartheta, \text{ et de l'autre } dX = -a.\sin\varphi.d\varphi,$$

partant $-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = +\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$. On doit considérer ensuite que l'on parviendrait aussi à l'équation différentielle seconde du problème, en estimant les moments de rotation des forces actives et des réactions d'inertie tangentielles; car les moments des réactions d'inertie normales ou forces centrifuges, sont nuls autour de ce centre, puisque les forces passent toutes par le point I qui se déplace d'instant en instant.

On pourrait se proposer aussi de rechercher la résultante de ces forces qui répondent à une valeur désignée de la vitesse angulaire et à un angle φ: ces deux dernières quantités se trouvant liées entr'elles par l'équation (A). Cette résultante existe, puisque toutes les forces élémentaires normales convergent à chaque instant vers un seul centre I. Enfin, on peut faire observer que pour traiter la question d'abord en faisant abstraction des frottements, nous sommes parti de l'idée: que dans le cas actuel il est nécessaire et suffisant que la somme des moments virtuels et effectifs de la force Q et des réactions d'inertie, soit égale à zéro; ce qui mène à l'équation (A): expression du principe des forces-vives. Mais à l'inverse il est évident que cette seule équation de condition est requise et suffit pour la solution complète du problème; et cela doit arriver pour tous les cas analogues, c'est-à-dire pour toutes les machines et pour tous les systèmes, tellement gênés qu'ils ne puissent prendre qu'une espèce de mouvement défini.

§. 11.

Suite: Solution de la question eu égard aux frottements.

Pour tenir compte des frottements, il faut d'abord évaluer les pressions normales dynamiques supportées à chaque instant par les deux plans d'appui. Or cette évaluation devient assez aisée dans le cas actuel, dès qu'une fois on adopte la méthode si simple et universelle de l'équilibre entre l'action et les réactions d'inertie. Dès lors en effet le problème des pressions dynamiques est réduit à celui des pressions statiques; car, n'est-il pas évident que si pendant un instant dt du mouvement d'une machine, je remplace les réactions d'inertie totales par des forces actives de même intensité et direction; celle-ci empêcheront les modifications momentanées de vitesse qui se produiraient sans elles: elles font donc équilibre aux forces directement appliquées. Donc aussi il y a équilibre entre les forces directes et les réactions d'inertie *totales*, considérées comme forces actives; et cet équilibre subsiste par le moyen des points fixes et des surfaces d'appui de la machine, et doit continuer à subsister dans l'hypothèse que les vitesses de ses divers points mobiles soient anéanties pendant l'instant dt. Donc les pressions normales doivent se produire et se transmettre sur les obstacles de la même manière que s'il y avait équilibre statique.

Le problème général des pressions dynamiques est donc en effet réduit à un problème de pressions statiques, si toutefois les réactions d'inertie sont considérées comme forces actives dans cette évaluation. Appliquons cette méthode à la question particulière et actuelle.

En désignant par U, V les composantes des forces d'inertie, parallèles aux axes coordonnés OX, OY, on obtient:

$$U = -S.dm.\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\ \ V = = S.dm.\frac{d^2y}{dt^2},$$

ou, en substituant pour x, y leurs valeurs:

$$U = -\frac{d^2.\cos\varphi}{dt^2}S(adm - \alpha dm) = -M.b\,.\frac{d^2.\cos\varphi}{dt^2}\,,$$

$$V = -\frac{d^2.\sin\varphi}{dt^2}.S\alpha dm = -M.c.\frac{d^2.\sin\varphi}{dt^2}\,.$$

On voit bien que la grandeur de chaque composante totâle est la même que si la masse entière de la bielle était condensée au centre d'inertie: mais les

positions des lignes d'action sont loin d'être ce qu'elles seraient dans cette hypothèse. En effet, soit y la distance de la ligne d'action de U à l'axe OX, et x_1 la distance de la ligne de V à l'axe OY; j'aurai $(x_1 y_1)$ par des équations de moments qui se réduisent à celles-ci:

$$U.y_1 = -S.dm.\frac{d^2x}{dt^2}.y \ , \ V.x_1 = -S.dm.\frac{d^2y}{dt^2}.x \, ,$$

d'où $$b.y_1 = (ac-h^2)\sin\varphi \quad , \quad c.x_1 = (ac-h^2).\cos\varphi.$$

Soient (fig. 9) m, n les points de rencontre de AB avec les lignes de U, V respectivement; on aura:

$$mA = y_1 : \sin\varphi \quad , \quad nB = x_1 : \cos\varphi$$

et les valeurs obtenues reviennent aux conditions

$$b.mA = ac-h^2 \quad , \quad c.nB = ac-h^2.$$

Il est aisé à reconnaitre par là que les deux lignes de U, V se coupent en un point (x, y_1) situé en dehors de l'axe AB, et que ce point d'intersection ne tombe pas même sur AB dans le cas d'une barre homogène. On peut vérifier ensuite que la ligne d'action de la résultante même des forces U, V ne saurait passer par le centre d'inertie de la barre. Cela posé, comme l'équilibre subsiste pendant chaque instant dt, de la même manière que celui du repos, entre les forces Q, U, V, considerées comme actives, et les frottements dûs aux pressions normales, P en A, P' en B, il s'ensuit que ses pressions doivent se transmettre d'après la loi reconnue au (§. 3). Il est vrai que dans le cas actuel la barre est soumise à une force verticale descendante Q en G, à une autre, ascendante V en n, et à une force horizontale U en m; mais par la nature du mouvement on voit que ces forces sont telles que la première Q est sur le point de l'emporter sur les deux autres et sur les frottements $f.P$ $f'.P'$. Donc la décomposition doit se faire en effet comme au (§. 3), et de manière qu'il n'y ait en résultat qu'une pression normale P' en B, une autre P en A, et une traction horizontale unique T à l'extrêmité inférieure de la barre: Donc il faut opérer de la manière suivante.

Les forces verticales Q, V transmettent aux deux points extrêmes:

en A une force descendante $Q.\frac{b}{a} - V.\left(\frac{nB}{a}\right)$,

en B une force descendante $Q.\frac{c}{a} - V.\left(\frac{nA}{a}\right)$.

La force U transmet aux mêmes extrémités les composantes:

en A de A vers X une traction $U.\left(\frac{mB}{a}\right)$,

en B une force horizontale ... $U.\left(\frac{mA}{a}\right)$ parallèle à AX.

La première de ces quatre forces, agissant suivant une ligne de destruction absolûe, ne saurait plus se décomposer.

La quatrième, agissant suivant une ligne négative de destruction, ne saurait que diminuer la pression normale en B.

La troisième $U.\left(\frac{mB}{a}\right)$ ne se décompose pas non plus, puisqu'elle agit suivant une ligne de mouvement absolûe; au fond elle est négative et ne saurait que diminuer la traction dûe au poids Q.

Mais la *deuxième* composante $Q.\frac{c}{a} - V.\left(\frac{nA}{a}\right)$ qui tire la barre de B vers O, doit exercer à la fois une action sur les deux plans et un effet dynamique sur la barre; ce que l'on ne conçoit, à moins que de la décomposer suivant la normale BN a l'axe BA; ainsi cette deuxième force donnera:

$$\left(Q.\frac{c}{a} - V.\frac{nA}{a}\right)\cot g\,\varphi \text{ suivant } BN,$$

$$\left(Q.\frac{c}{a} - V.\frac{nA}{a}\right).\frac{1}{\sin\varphi}, \text{ suivant } BA.$$

Cette dernière se transmet en A suivant le prologement de BA, et y produit

$$\text{un effort horizontal} \left(Q.\frac{c}{a} - V.\frac{nA}{a}\right)\cot g\,\varphi$$
$$\text{et une force verticale} \left(Q.\frac{c}{a} - V.\frac{nA}{a}\right).$$

De cette analyse on conclut immédiatément:

$$T = \left(Q.\frac{c}{a} - V.\frac{nA}{a}\right)\cot g\,\varphi + U.\frac{mB}{a},$$

$$P = Q.\frac{c}{a} - V.\frac{nA}{a} + Q.\frac{b}{a} - V.\frac{mB}{a} = Q - V,$$

$$P' = \left(Q.\frac{c}{a} - V.\frac{nA}{a}\right)\cot g\,\varphi - U.\frac{mA}{a} = T - U.$$

Pour avoir l'équation de condition qui fournit la solution de la question, on n'aura plus qu'à substituer ces valeurs dans l'équation des moments virtuels

$$[T-f(Q-V)]dX+f'\left(Q.\frac{c}{a}-V.\frac{nA}{a}\right)\text{cotg}\,\varphi.dY-f'.U.\frac{mA}{a}.dY=0\,.$$

Dans l'hypothèse de $f=f'=0$, cette dernière devient simplement:

$$T=0\ ,\quad \text{ou}\quad \left(Q.\frac{c}{a}-V.\frac{nA}{a}\right)\text{cotg}\,\varphi+U.\frac{mB}{a}=0\,.$$

Celle-ci, ou son équivalente

$$Q.c.\cos\varphi-V.nA.\cos\varphi+V.mB.\sin\varphi=0\,,$$

doit reproduire l'équation aux forces vives déjà obtenue précédemment. Or eu égard aux valeurs de $b.mA$, $c.nB$, on obtient:

$$V.nA=-Mh^2.\frac{d^2\sin\varphi}{dt^2}\ ,\quad U.mB=-M(ab-ac+h^2).\frac{d^2\cos\varphi}{dt^2}\,,$$

et l'équation précédente devient par là:

$$(\text{P.})\qquad Q.c\cos\varphi+Mh^2.\left(\frac{\cos\varphi.d\varphi}{dt}\right).d.\left(\frac{\cos\varphi d\varphi}{dt^2}\right)$$
$$+M(ab-ac+h^2)\left(\sin\varphi.\frac{d\varphi}{dt}\right).d.\left(\frac{\sin\varphi d\varphi}{dt^2}\right)=0\,,$$

et par une première intégration on en tire:

$$M((a^2-2ac)\sin^2\varphi+h^2).\frac{d\varphi^2}{dt^2}=MC-2Q.c.\sin\varphi\,;$$

et cette dernière est en effet ce qu'il fallait d'abord retrouver. Mais cette vérification ne prouve cependant rien en faveur de l'exactitude des pressions normales auxquelles on attribue les frottements; car s'il y avait erreur dans ces pressions, elle disparaîtrait par l'hypothèse de $f=f'=0$. Cette vérification prouve donc au plus que probablement il n'y a pas erreur de calcul dans l'évaluation des quantités U, V, x_1, y_1.

L'hypothèse de $f=f'=0$ nous a fait rentrer dans la partie rationnelle de la question dont nous avons obtenu ainsi un second mode de solution, fondé sur l'évaluation des forces U, V. Ce mode met en évidence quelques propriétés qu'il est utile de constater sous forme de rémarques.

Rémarque I. Il a été dit plus haut que les lignes d'action des forces U, V ne se coupent pas sur l'axe AB, pas même pour le cas particulier d'une

barre homogéne. En effet, dans cette supposition on a: $h^2 = \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{3}a^2$, $c = b = \frac{1}{2}a$. Les équations générales $b.mA = c.nB = ac - h^2$ donnent:

$$mA = nB = \tfrac{1}{3}a.$$

Ainsi dans ce cas le point m est aussi éloigné de A que le point n l'est de B; mais sur la barre ils laissent entr'eux un intervalle mn précisement égal à chaque distance $mA = nB = \frac{1}{3}a$.

Pour vérifier de même que dans le cas géuéral la ligne d'action de la résultante des deux forces U, V ne saurait couper l'axe AB en son centre de gravité G, on doit considérer que l'équation de cette ligne est

$$U.y - V.x = U.y_1 - V.x_1,$$

et que l'on a: $y = a.\sin\varphi - x.\text{tang}\,\varphi$ pour l'équation de la droite AB. Donc pour l'abscisse x' du point de rencontre de ces deux droites on doit avoir:

$$U.(a.\sin\varphi - x.\text{tang}\,\varphi) - V.x' = U.y_1 - V.x_1.$$

Mais si la résultante coupe AB en G, il faut avoir aussi:

$$U.(c.\sin\varphi - y_1) = V.(b.\cos\varphi - x_1),$$

ou, par substitution de $x_1 y_1$ et par réduction:

$$U.c.\sin\varphi = V.b.\cos\varphi.$$

Or par le moyen des valeurs de U, V développées, on vérifie que cette condition est absurde pour tout état de mouvement; et pour l'état de repos elle est insignifiante, puisque les forces U, V disparaîssent. Je conclus de là que les forces d'inertie n'agissent pas ici de la même manière que si la masse entière etait condensée au centre d'inertie de la barre, et que leur intensité est seulement la même que dans cette hypothése.

Il est donc démontré ainsi par un exemple que la *loi du mouvement du centre d'inertie* n'est pas même vraie pour tous les cas de la mécanique rationnelle. Elle ne subsiste que pour les corps et les systémes de corps parfaitement libres, et devient illusoire pour ceux qui, comme les Machines, sont gênés par des obstacles et ne peuvent plus prendre que des mouvements définis, et compatibles aux liaisons mutuelles et aux obstacles mêmes.

Dans le cas spécial qui nous occupe on a fait pour le moment abstraction des résistances passives, et démontré que dans cette hypothèse même, le centre d'inertie ne se meut plus de la même manière que si toutes les forces, réactions

d'inertie y comprises, étaient ramenées parallèlement à elles-mêmes. Que serait-ce donc par voie de plus forte raison, si l'on tenait une fois compte des frottements? Du reste, la remarque précédente est nécessaire et utile, parcequ'en se laissant conduire par l'hypothèse de la méthode ordinaire, on est naturellement entraîné à attribuer une extension exagérée et inexacte à la loi dont il s'agit. C'est en effet ce qui est arrivé; je le démontrerai plus tard par des faits dans un autre travail. Mais dès-à-présent l'inexactitude de la loi du mouvement du centre d'inertie devient manifeste pour ceux des lecteurs que j'aurai *pu* convaincre par tout ce qui précède, de l'inadmissibilité de la théorie ordinaire dans de certains cas.

Remarque II. Eu égard aux valeurs obtenues pour x, y_1, on a:

$$b^2.y_1^2 + c^2.x_1^2 = (ac - h^2)^2.$$

Ainsi le vrai point de concentration de la masse ou des forces U, V, se meut sur une ellipse concentrique et homothétique aux ellipses sur lesquelles roulent les divers points de la bièlle, pendant que celle-ci so déplace sous l'action de Q entre les deux plans d'appui OX, OY.

On doit remarquer aussi que l'équation aux forces-vives donne la vitesse angulaire $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ en fonction de l'angle φ, partant que pour toute position dynamique désigné de la barre, on peut obtenir les forces U, V en fonction des données Q, M, a, b, φ, et par suite les pressions dynamiques P, P'. Ainsi le problème se trouve resolu à peu près aussi bien que si on connaissait la variable φ en fonction du temps.

Remarque III. Il me reste un mot à dire de la solution exposée dans le tome (9 p. 110, 111, etc.) des Annales de *Gergonne*.

La partie dynamique de cette solution, exprimée dans les notations admises ici, se réduit à l'équation

$$a^2.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C - 2g.c.\sin\varphi,$$

et l'auteur, sans doute uniquement préoccupé de la forme de ses formules, n'hésite pas à proclamer ce résultat comme l'expression du principe des forces-vives. Mais avec un peu d'attention on s'aperçoit aisément que le terme $Ma^2 \cdot \frac{d\varphi^2}{dt^2}$ se-

rait seulement la force-vive de la bielle, s'il était permis de condenser toute sa masse au point de rencontre I des normales AI, BI. D'ailleurs il est bien prouvé plus haut par des transformations purement de calcul et de géométrie (§. 10) que l'expression de la force vive de la bielle est:

$$M[(a^2 - 2ac).\sin^2\varphi + h^2].$$

Le résultat obtenu par l'auteur de la solution est donc au contraire en contradiction manifeste avec le principe même qu'il invoque, partant avec celui des moments virtuels effectifs. Voilà certes un exemple frappant des aberrations auxquelles l'hypothèse de la théorie ordinaire peut entraîner.

Remarque IV. Comme le déplacement momentané de la bielle à une époque quelconque, n'est qu'une rotation de tous ses points autour du point I, et que dans la supposition de $f = f' = 0$, l'équilibre subsiste entre les actions et réactions, il est nécessaire et suffisant que la somme des moments des forces Q, U, V autour de I soit nulle; ce qui donne immédiatement (fig. 9):

$$Q.c.\cos\varphi + U.mp - V.rn = 0;$$

mais $mp = a\sin\varphi - y_1$, $rn = a.\cos\varphi - x_1$, ou bien:

$$mp = mB.\sin\varphi \quad , \quad rn = nA.\cos\varphi.$$

On retrouvera par là une équation de condition qui s'accorde identiquement avec celle $T = 0$, obtenue d'abord.

On n'a pas même besoin d'aller jusqu'à la décomposition rectangulaire des forces d'inertie et de Q, pour se procurer l'équation du problème rationnel. En effet, l'élément de masse dm, placé au point q, à une distance α de A, réagit avec une force tangentielle

$$-dm.\frac{d.\left[qI.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right]}{dt},$$

et avec un moment

$$-dm.qI.\frac{d.\left(qI.\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt};$$

et tel est aussi le moment de réaction d'inertie total de dm, puisque sa composante normale, ou sa force centrifuge passe par le centre I même, quelle que soit la valeur de α entre o et a. On obtient donc ainsi, de la manière la plus directe:

$$Q.c.\cos\varphi + S.dm.qI.\frac{d.\left(qI.\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} = 0,$$

ou

$$Q.c.\cos\varphi.d\varphi + S.dm.qI.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right).d.\left(qI.\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0,$$

partant:

$$2Q.c.\sin\varphi + S.qI^2.dm.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \text{const} = C.$$

De plus, comme le triangle qIA donne:

$$qI^2 = (a^2 - 2a\alpha)\sin^2\varphi + \alpha^2,$$

on retrouvera encore une fois le résultat déjà obtenu par des marches si diverses, et par suite l'équation (A) même. Mais dès qu'une fois on veut tenir compte des frottements, la decomposition des forces devient inévitable pour l'évaluation des pressions normales, ainsi que le principe des moments virtuels effectifs que l'on peut néanmoins remplacer souvent par celui des moments de rotation. C'est ce qui arrive dans l'exemple actuel, et pour tous les cas où la remarquable propriété géométrique découverte par M. M. *Chasles* et *Bobillier*, est applicable. Or ces cas sont toujours faciles à reconnaître.

Remarque V. La pression P a été obtenue sous la forme très simple

$$P = Q - V,$$

et la pression P' en B sur le plan vertical peut se simplifier aussi. En effet, l'on a, du moins dans le cas de l'équilibre rationnel:

$$P'.a = (Q.c - V.nA)\cotg\varphi - U.mA.$$

Mais en vertu de l'équation même $T = 0$, le premier terme du second membre de $P'.a$ se réduit à $- U.mB$; d'où l'on conclut:

$$P' = -U.$$

Ainsi la pression normale contre le plan vertical se mesure à chaque instant du mouvement par la composante rectangle horizontale des réactions d'inertie, tandis que la pression contre le plan horizontal se mésure par $(Q - V)$. En développant les valeurs de U, V, on trouve:

$$P' = -M.b.\cos\varphi.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - M.b.\sin\varphi.\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$P = Q + M.c.\cos\varphi.\frac{d^2\varphi}{dt^2} - M.c.\sin\varphi.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Si l'on suppose que la force motrice soit le poids même de la barre, on a: $Q = Mg$, et l'équation (A) donne pour $C = A^2$:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = -\frac{1}{h}\sqrt{(A^2 - 2g.c.\sin\varphi)} \quad , \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g.c.\cos\varphi}{h^2}.$$

Faisons rémarquer que ces formules ne doivent pas s'étendre au cas de $\varphi = 0$ inclusivement, puisque le plan horizontal, étant censé anéantir tout-à-coup la vitesse acquise, donne $U = 0$, $V = 0$, et fait disparaître le jeu continu des forces d'inertie pour $\varphi = 0$; mais elles doivent s'étendre néanmoins jusqu'à φ infiniment petit; ce qui donne pour les valeurs limites $P'_0, P'_0 - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$ de P', P et $-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$:

$$P'_0 = -M.b.\frac{A^2}{h^2} \quad ; \quad P_0 = Q\left(1 - \frac{c^2}{h^2}\right) \quad ; \quad -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = \frac{A}{h} \quad ; \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0 = -\frac{g.c}{h^2}.$$

Si l'on suppose que pour la position initiale φ_1, la barre ait une vitesse angulaire nulle, on a: $A^2 = 2g.c.\sin\varphi_1$, et la pression P'_0 aura la valeur négative $-Q\sin\varphi_1.\frac{2bc}{h^2}$, et pour le cas d'une bielle pesante homogènè:

$$h^2 = \tfrac{1}{3}a^2 \quad ; \quad P_0 = \tfrac{1}{4}Q \quad ; \quad P'_0 = -\tfrac{3}{2}Q.\sin\varphi_1 \quad ; \quad -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = \sqrt{\left(\frac{3g.\sin\varphi_1}{a}\right)};$$

Pour avoir la limite à laquelle la pression P' devient nulle, pour croître ensuite négativement, il faut y substituer les valeurs de $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$ en φ, d'où il résulte:

$$P' = -M.b.\frac{A^2}{h^2}.\cos\varphi + \frac{3Mb.g.c}{h^2}.\cos\varphi.\sin\varphi,$$

et la valeur ψ de cet angle limite est par conséquent donné par l'équation

$$\sin\psi = \frac{A^2}{3gc} = \tfrac{2}{3}\sin\varphi_1 \text{ pour } A^2 = 2g.c.\sin\varphi_1.$$

Ainsi, tant que l'angle φ est compris entre φ_1 et ψ, la pression P' est positive, devient nulle pour $\varphi = \psi$, et negative pour $\varphi < \psi$, jusqu'à φ infiniment petit. Ainsi dans cette dernière étendûe le plan vertical d'appui n'est plus nécessaire, et le mouvement se fera comme si ce plan n'existait pas.

Rémarque VI. Pour former l'équation du problème eu égard aux frottements, on rémarquera d'abord qu'en général $P' = -U$, ce qui donne:

$$T.dX - f(Q-V)dX + f'(T-U).dY = 0,$$

$$-T.a.\sin\varphi.d\varphi + f(Q-V)a.\sin\varphi.d\varphi + f'.T.a.\cos\varphi.d\varphi - f'.U.a.\cos\varphi.d\varphi = 0,$$

ou en substituant d'abord la valeur de T:

$$\left.\begin{array}{l} -(Q.c - V.nA)\cos\varphi.d\varphi - U.mB.\sin\varphi.d\varphi + f(Q-V)a.\sin\varphi.d\varphi \\ \quad + f'(Q.c - V.nA).\dfrac{\cos^2\varphi.d\varphi}{\sin\varphi} - f'.U.mA.\cos\varphi.d\varphi \end{array}\right\} = 0.$$

En tenant ainsi séparés les deux termes indépendants de f, f' auxquels une intégration immédiate est applicable, et dont l'intégrale est déjà connue par l'équation (P'), on reconnaît ce qui reste à faire par l'introduction des termes en f, f'. On voit que la difficulté est ramenée à evaluer:

$$af.V.\sin\varphi.d\varphi \quad , \quad nA.fV.\frac{\cos^2\varphi.d\varphi}{\sin\varphi}, \quad ma.f.U.\cos\varphi.d\varphi;$$

les quantités U, V ayant les valeurs

$$U = M.b.\cos\varphi.\frac{d\varphi^2}{dt^2} + M.b.\sin\varphi.\frac{d^2\varphi}{dt^2}; \quad V = M.c.\sin\varphi.\frac{d\varphi^2}{dt^2} - M.c.\varphi.\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Si l'on pouvait surmonter ces difficultés de calcul, on pourrait sans doute éclaircir aussi complètement celle qui est signalée au §. (c, 8°), en prouvant par le fait même de l'analyse ce que l'on a admis dans le No. cité; à savoir que les pressions dynamiques se substituent aux pressions statiques dans toute l'étendue de l'intervalle angulaire compris entre φ' et O^0.

§. 12.

La matière que j'ai traitée jusqu' ici est certes délicate et épineuse: elle est enveloppée d'une métaphysique profonde que l'on ne saurait éclaircir, je pense, que par un examen attentif et la discussion des faits qui se produisent dans de certains cas particuliers. Non seulement elle offre ce genre de difficultés que j'ai signalées plus haut, et que je crois avoir expliquées d'une manière satisfaisante. L'hypothèse de la théorie ordinaire présente en outre des contradictions qu'il me paraît impossible d'expliquer, comme les premières, par le principe des

vitesses virtuelles effectives, et dont je n'entrevois pas encore l'application d'une manière nette et précise. L'exemple suivant sera éminemment propre à faire ressortir ce nouveau genre de difficultés.

§. 13.

Equilibre d'un prisme ou pilon à mentonnet, retenu entre des guides, et soumis à deux forces actives, l'une descendante Q agissant suivant l'axe, et l'autre ascendante F, agissant à l'extrémité du mentonnet.

Pour ne pas compliquer inutilement la question, je considère le cas d'un pilon à axe vertical (fig. 10), et je ferai pour abréger:

La largeur du prisme $DF = e$, $DE = \frac{1}{2}c$;

La longueur du mentonnet $BD = m$;

La distance verticale entre les deux guides $(AA') = l$;

Les coëfficients des frottements aux points $(A, A') = f, f'$.

Les pressions normales et horizontales en ces points $= \Pi, \Pi'$ dans l'état d'équilibre sous l'action des forces directes F', Q.

Si la théorie ordinaire est encore applicable ici, rien au premier abord ne paraît plus simple que la solution de la question actuelle d'équilibre entre les forces $Qf, f\Pi, f'\Pi'$. En effet, d'après l'hypothèse de cette théorie, il faut que le prisme puisse être considéré comme parfaitement libre, et en équilibre sous l'action des forces $F, Q, f\Pi, f'\Pi'$, considérées toutes comme actives, partant que l'on ait d'après les conditions générales appliquées au cas actuel:

$$F - Q - f.\Pi - f'.\Pi' = 0;$$
$$\Pi - \Pi' = 0;$$
$$F(m + \tfrac{1}{2}e) - \Pi.MG - \Pi'.M'G - f.\Pi.\tfrac{1}{2}e + f'.\Pi'.\tfrac{1}{2}e = 0.$$

La dernière condition suppose qu'on prenne les moments autour du centre de gravité G du prisme, et que la ligne d'action du poids Q passe par ce point; ce qui arrive nécessairement, si l'on entend par Q le poids total qui charge le prisme, augmenté du poids même de celui-ci. Or en vertu de la seconde condition, les deux autres donneront pour la valeur même de la force équilibrante et de la pression Π:

$$\text{(A.)} \quad \Pi = F.\frac{m + \frac{1}{2}e}{l - \frac{1}{2}e(f' - f)} \quad ; \quad F = Q.\frac{1 - \frac{e}{2l}(f' - f)}{1 - \frac{m + \frac{1}{2}e}{l}(f + f') - \frac{1}{2}e(f' - f)}.$$

Si l'on fait dans cette valeur de F en fonction des données, $f'=f$, on obtient un résultat particulier qui s'accorde exactement avec celui donné par *Navier* dans ses Applications de mécanique.

Mais si l'hypothèse de la théorie ordinaire est admissible en thèse générale, il doit également être permis de faire le raisonnement suivant. Puisque l'équilibre doit subsister entre les forces directes, les frottements et les réactions normales, il faut que la somme des moments des forces F, Q, $-\Pi$, $+f\Pi$ autour du point d'appui A', soit égale à zéro. J'omets dans cette somme les moments des forces $-\Pi'$, $f'\Pi'$, puisques elles passent en ce point: ainsi l'on aura:

$$F(m+e)-\Pi.l-f.\Pi.e-Q.\tfrac{1}{2}e=0,$$

partant
$$\Pi=F.\left(\frac{m+e}{l+f.e}\right)-Q.\frac{e}{2(l+f.e)}.$$

Il faut ensuite que la somme des moments des forces F, $-\Pi'$, $f'\Pi'$ et Q autour de A soit nulle, ce qui donnera:

$$F.m-\Pi'.l+f'\Pi'.e+Q.\tfrac{1}{2}e=0,$$

partant
$$\Pi'=F.\frac{m}{l-f'.e}+Q.\frac{e}{2(l-f'e)}.$$

La troisième condition manifeste qui résulte, si l'on veut, d'une manière incontestablement exacte du principe des moments virtuels effectifs, est d'ailleurs, comme d'abord:

$$F=Q+f.\Pi+f'\Pi'.$$

Si l'on introduit dans celle-ci les valeurs de Π, Π' en F, déduites des deux premières, on obtient, après réduction:

$$\text{(B.)}\qquad F(l-f'.e-m(f+f'))=\frac{Q}{2l}(l^2+f.f'.e^2).$$

Mais le résultat de la première méthode ou l'équation (A), peut être mise sous la forme

$$\text{(C.)}\qquad F(l-f'e-m(f+f'))=\frac{Q}{2l}(2l^2-e.l(f'-f)).$$

Donc, si les deux manières de raisonner sont exactes, (et l'une l'étant, on ne voit point pourquoi l'autre ne le serait pas), il faut que les deux valeurs de F données par (B) et (A) ou par (A) et (C), soient les mêmes, ce qui exige que l'on ait la condition

$$\frac{Q}{2l}.(l^2+f.f'.e^2)=\frac{Q}{2l}.(2l^2-l.e.(f'-f))$$

ou

$$l-(f'-f)e-f.f'.\frac{e^2}{l}=0.$$

Or cette équation de condition entre constantes, étant généralement impossible, il s'ensuit que les résultats (A, B) des deux méthodes, subordonnées néanmoins à un même raisonnement, sont contradictoires. Pour sauver cette manière de raisonner implicitement propre à la théorie ordinaire, de cette contradiction patente, on peut, il est vrai, opposer à la méthode qui amène l'équation (B), une objestion assez fondée et qui se réduit à ce qui suit.

Lorsqu'en estimant les moments des forces autour du point A', on prend la pression normale en A en sens contraire, il paraît évident que le frottement $f\Pi$ en A n'existe plus, puisque par désignation le prisme est pressé par une force directe $+\Pi$ contre l'appui, laquelle est détruite par la force active $-\Pi$ nouvellement introduite. Ainsi dans l'équilibre des forces autour de A', il n'y a plus la force $f\Pi$ en A. Si donc cette objection est fondée, il faut qu'aux équations de conditions de la seconde méthode on substitue les suivantes qui sont même plus simples:

$$1^\circ.\quad F.(m+e)-\Pi.l-Q.\tfrac{1}{2}e=0,$$
$$2^\circ.\quad F.m-\Pi'.l+Q.\tfrac{1}{2}e=0,$$
$$3^\circ.\quad F=Q+f.\Pi+f'\Pi'$$

d'où résulte:

$$\Pi=F.\left(\frac{m+e}{l}\right)-Q.\frac{e}{2l},$$

$$\Pi'=F.\frac{m}{l}+Q.\frac{e}{2l},$$

$$\text{(B}'.)\qquad F[l-f.e-(f+f')m]=\tfrac{1}{2}Q[2l+(f'-f)e],$$

et maintenant l'accord devrait au moins exister entre les résultats (B') et (A) ou (B') et (C). Or, pour que la valeur de F, déduite de (B), soit la même que celle de (C), il faut avoir l'équation de condition

$$e.(f'-f)(2p-2l)-e.(f'+f)=0,$$

dans laquelle $p=l-m(f'+f)$; ou, en remettant pour x sa valeur:

$$e.(m+\tfrac{1}{2}e).(f'-f)(f'+f)=0.$$

Mais celle-ci devient seulement identique dans les cas particuliers de $e=0$, de $m+\frac{1}{2}e=0$, ou $m=-\frac{1}{2}e$; et de $f'=f$: et sauf ces cas tout spéciaux, la

condition obtenue est inadmissible. Donc la troisième méthode est, comme la deuxième, en contradiction avec la première. Il est néanmoins clair que la question proposée n'est susceptible que d'une solution unique et définie, partant qu'on ne saurait lever la difficulté, en admettant une prétendûe indétermination. On ne serait pas plus fondé à admettre que j'interprête inexactement les idées qui ont universellement cours chez les auteurs; en outre on doit rémarquer qu'un accord parfait se rétablit dans tout ces résultats contradictoires dès qu'une fois on fait $f=0$, $f'=0$, pour ramener la question à l'état purement rationnel. Mais quelle est la vraie solution de la question de l'équilibre physique? On peut accorder avec assez de fondement que la seconde interprétation qui amène l'équation (B) est inadmissible; et en concluant par l'analogie avec d'autres cas, examinés précédemment, on ne saurait guères avoir de confiance dans les résultats (A, C) de la première, qui ne sont que l'expression stricte et littérale de la théorie ordinaire. Quant au résultat (B') de la troisième méthode, nous ne saurions décider s'il faut l'adopter ou le rejeter; et l'on peut conserver à cet égard les doutes les plus considérables, parcequ'en se prononçant pour l'affirmative, on n'a plus qu'à nuancer un tant-soit-peu les raisonnements qui conduisent à (B'), pour retomber dans cette hypothèse de la théorie ordinaire, qui est absolument inadmissible.

La question présente n'est donc point résolue; et il convient de rémarquer que toute la difficulté se réduit à la détermination exacte des pressions normales Π, Π'; car l'équation $F = f\Pi + f'.\Pi' + Q$ est incontestablement exacte, puisqu'elle peut etre considérée comme une conséquence des moments virtuels effectifs ou du principe des quantités de travail élémentaires qui s'exprime ici par

$$F.dh = Q.dh + (f\Pi + f'.\Pi')\,dh;$$

et celle-ci ramène immédiatement à l'autre par la suppression du facteur commun dh, ou de l'espace virtuel décrit par le point d'application de chaque force $F, Q, f\Pi, f'\Pi'$,

Rémarque.

On pourrait bien établir une solution, faisant dépendre la valeur de la force équilibrante F, de la position variable du prisme entre les deux guides, en remplaçant Q par les deux composantes $\frac{1}{2}Q$, $\frac{1}{2}Q$ en A, A', et décomposant d'abord la force F suivant AB, BA', etc..... Mais comme rien ne garantit cette loi de substitution et de décomposition de forces comme effective, j'omets cette solution pour le moment, sauf à y revenir une autre fois, s'il le faut; car je n'ai

dit ici ni mon premier, ni mon dernier mot. Pour des renseignements plus étendus on pourra consulter mes mémoires *sur l'équilibre de la vis a filet triangulaire*; *sur la machine à vapeur* et sur *l'équilibre physique des machines en général*, insérés dans le recueil de la Société-Royale des Sciences de Liége (1843 — 1853). Je suis prêt à discuter avec les géomètres qui auraient des objections solides à opposer à mes idées. Mais je puis dédaignor toute critique purement négative, parcequ'elle est sans fruit pour la science. Mon mémoire sur l'équilibre physique est, comme le présent travail, un développement explicatif de l'introduction placé en tête de chacun. On y trouve aussi la démonstration du principe des moments virtuels effectifs et arbitraires, indépendamment d'aucun autre principe et d'aucune autre notion de mécanique. Tout y repose sur la définition générale des machines et sur celle du centre d'inertie, telle que je l'ai exposée dans le memoire de statique inséré dans le tome (44) du présent journal rémarque (21).

Bruxelles ce 30 Juillet 1853.

8.

Elementary Theorems relating to Determinants.

(By Mr. *William Spottiswoode* Esq. M. A., J. R. S.)

(End of the memoir No. 5 p. 209.)

§. VIII.

On the connexion between Determinants and homogeneous Functions.

It was shewn in a former section that there was an intimate connexion between the determinant

$$\begin{Bmatrix} 1\,2\,..\,n \\ 1\,2\,..\,n \end{Bmatrix},$$

and the system of linear equations

$$(1.)\quad \begin{cases} (1.1)x_1+(1.2)x_2+\ldots\ldots+(1.n)x_n=0, \\ (2.1)\,x_1+(2.2)\,x_2+\ldots\ldots+(2.n)x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n.1)x_1+(n.2)x_2+\ldots\ldots+(n.n)x_n=0, \end{cases}$$

in as much as the vanishing of the determinant in question expresses the compatibility of the equations.

It is however easy to conceive a limitation in generality among the constituents. Such, in fact would be the case if the system of equations were not absolutely independent but derived from some function of which their lefthand members formed parts. Thus suppose:

$$(2.)\qquad U=(1.1)x_1^2+(2.2)x_2^2+..+2(1.2)x_1x_2+,$$

then

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{dU}{dx_1}=(1.1)x_1+(1.2)x_2+\ldots\ldots+(1.n)x_n \\ \frac{dU}{dx_2}=(2.1)x_1+(2.2)x_2+\ldots\ldots+(2.n)x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dU}{dx_n}=(n.1)x_1+(n.2)x_2+\ldots\ldots+(n.n)x_n \end{cases}$$

with the relations

$$(4.)\begin{cases} * & (1.2)=(2.1) \;\cdots\cdots\; (1.n)=(n.1) \\ (2.1)=(1.2) & * \qquad \cdots\cdots\; (2.n)=(n.2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (n.1)=(1.n)\,(n.2)=(2.n)\cdots\cdots & * \end{cases}$$

For this reason a determinant whose constituents satisfy the above relations, is called the complete *Determinant of a quadratic function* of n variables; or more briefly, a *Determinant of a quadratic form.*

The Theory of quadratic Functions differs in many important respects from that of Functions of higher orders; so much so that from this point it becomes necessary to examine separately the determinants rising from Functions of various degrees of the same number of variables, and those arising from Functions of the same degree of various numbers of variables.

The number of terms in a homogenous function of the nth degree of two variables (x, y) is, as is well known, $(n+1)$. If then the coefficients be called

$$a_0\;,\; a_1\;,\cdots\cdots a_n,$$

and if n be *even* $(n=2.m)$, the function may be thus written:

$$(5.)\begin{cases} U=(a_0x^m+ma_1.x^{m-1}y+\cdots\cdots+a_my^m)x^m \\ +\,m(a_1x^m+ma_2.x^{m-1}y+\cdots\cdots+a_{m+1}y^m)\,x^{m-1}y \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\;\;(a_mx^m+ma_{m+1}x^{m-1}y+\cdots\cdots+a_{2m+1}y^m)y^m, \end{cases}$$

which suggests the determinant

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots\cdots & a_m \\ a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m & a_{m-1} & \cdots\cdots & a_{2m+1} \end{vmatrix}$$

the evanescence of which is the condition that the system

$$\frac{d^mU}{dx^m}=0\;,\quad \frac{d^mU}{dx^{m-1}dy}=0\;,\quad \frac{d^mU}{dy^m}=0$$

may coexist. This system may be also thus concisely expressed:

$$(7.)\qquad \frac{d^mU}{d(x,y)^m}.$$

Mr. *Sylvester* suggested the notation $(x_1\, y_1)^n$ for a homogenous function

of the $n$the degree of the variables $x_1 y_1$. And M. *Lamé* in his recent work has used the notation

$$\frac{dv}{d(x_1 y_1)} = 0 \quad \text{to denote the system}$$

$$\frac{dU}{dx} = 0 \ , \ \frac{dU}{dy} = 0, \ldots$$

It has also been proved by Mr. *Sylvester* that, when the above determinant vanishes, the function is resoluble into the sum of $(m+1)$ powers of linear functions of x and y; thus

$$U = u_0^{2m+1} + u_1^{2m+1} + \ldots\ldots + u_m^{2m+1}$$

where

$$u_0 = l_0 x + m_0 y \quad , \quad u_1 = l_1 x + m_1 y \ , \ \ldots\ldots \ u_m = l_m x + m_m y \, .$$

If the above determinant be compared with the general form, there will result the relations

$$(8.) \qquad \begin{cases} (1.\,2) = (2.\,1) \\ (1.\,3) = (2.\,2) = (3.\,1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1.\,2) = (2.\,i-1) = \ldots\ldots = (i.\,1) \end{cases}$$

In fact, all the constituents lying on parallel *NE* and *SW* diagonals, are identical.

The case of functions of two variables of an *odd* degree may be considered as an incomplete case of those of an *even* degree, when either the first or last coefficient vanishes. The determinant in question is then the same as before with the farther condition

$$(9.) \qquad a_{2m} = (n, n) = 0 \, .$$

In the case of n being *even* $(n = 2_m)$, the number of the variables being p, let

$$\mu = \frac{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+p-1)}{1.2\ldots\ldots p} \, .$$

And let

$$M_1 \, , \, M_2 \, , \, \ldots\ldots \, , \, M_\mu \, ,$$

be the μ combinations of the p numbers $1, 2, \ldots\ldots p$ including repetitions; then the determinant may be written:

$$(10.)\quad \left\{\begin{array}{l}(M_1,M_1)(M_1,M_2)\ldots\ldots(M_1,M_\mu)\\(M_2,M_1)(M_2,M_2)\ldots\ldots(M_2,M_\mu)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(M_\mu,M_1)(M_\mu,M_2)\ldots\ldots(M_\mu,M_\mu)\,,\end{array}\right.$$

the evanescence of which is the condition that the equations

$$(11.)\quad \left\{\begin{array}{l}d^m U=0\\d(x_1,x_2,\ldots\ldots x_p)\,,\end{array}\right.$$

may coexist.

Passing to functions of *three* variables, the number of terms is, at is well known:

$$\frac{3.4\ldots\ldots(3+n-1)}{1.2\ldots\ldots n}=\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\,.$$

The coefficients may therefore be arranged in a triangular form, the sides of the triangle each containing $(n+1)$ places. And if the square be completed, the constituents of the resulting determinant will satisfy the conditions (4) of the present section. There is consequently a similarity between the determinant of a function of the *nth* degree of three variables and that of a function of $(n+1)$ variables of the *second* degree. But this arrangement is in fact foreign to the nature of the function; and the evanescence of the determinant does not, as Jam aware, express any property of particular interest.

To take an exemple, consider the *cubic* Fnnction

$$U=ax^3+by^3+cz^3+3(fy^2z+gz^2x+hx^2y+f'yz^2+g'zx^2+h'xy^2)+6kxyz\,.$$

Then the arrangement above alluded so would be:

$$\begin{array}{llll}a&h&g&f'\\h&b&f&g'\\g&f&c&h'\\f'&g'&h'&k\;,\end{array}$$

which, if developed, would give

$$Af'^2+Bg'^2+Ch'^2+2(Fg'h'+Ghf'+Hf'g')-Kk\;,$$

where $A,B\ldots\ldots$ are the six first minors of K, the value of K being obvious. In fact the first six terms represent the function reciprocal to

$$af'^2+bg'^2+ch'^2+2(fg'h'+gh'f'+hf'g')\,.$$

There is however another arrangement of the ten coefficients in the form

of a square, which although not quite natural to the function is somewhat more so than the above, vzt

$$\begin{matrix} a & h & g' & f' \\ h' & b & f & g' \\ g & f' & c & h' \\ f & g & h & k \end{matrix};$$

the evanescence of wich would express the following property:

$$U:\frac{d^2U}{dx^2}:\frac{d^2U}{dy^2}:\frac{d^2U}{dz^2}:\frac{d^2U}{dy^2dz}+\frac{d^2U}{dz^2dx}+\frac{d^2U}{dx^2dy}=x.\frac{d^2U}{dydz^2}:y.\frac{d^2U}{dzdx^2}:z.\frac{d^2U}{dxdy^2}:\frac{d^2U}{dxdydz}.$$

But the really natural arrangement of the coefficients produces properly not a single determinant, but to a group of determinants; thus, à un facteur prés:

$$\frac{d^2U}{dx^2}=ax+hy+g'z,$$
$$\frac{d^2U}{dy^2}=h'x+by+fz,$$
$$\frac{d^2U}{dz^2}=gx+fy+cz,$$
$$\frac{d^2U}{dydz}=ka+fy+f'z,$$
$$\frac{d^2U}{dzdx}=g'x+ky+gz,$$
$$\frac{d^2U}{dxdy}=hx+h'y+kz.$$

The simultaneous evanescence of all of which involves the simultaneous evanescence of all the determinants which can be formed from the Matrix

$$\begin{matrix} a & h' & g & k & g' & h \\ h & b & f' & f & k & h' \\ g' & f & c & f' & g & k. \end{matrix}$$

The number of such determinants is

$$\frac{6.5.4}{1.2.3}=20,$$

but of these only 3 are really independent.

It is perhaps worth notice that, if we try to tread the above function as an incomplete case of the function of the fourth degree, in which all the coefficients of termes not involving one of the variables ($e.g.x$) vanish, the determi-

nant breaks up into two factors; thus, wirting 1111, 2222,..... 1122, ... for the coefficients of $x^4, y^4, \ldots\ldots x^2, y^2\ldots\ldots$, the determinant for the function of the fourth degree, is

$$\begin{matrix} 1111 & 1122 & 1133 & 1123 & 1131 & 1112 \\ 2211 & 2222 & 2233 & 2223 & 2231 & 2212 \\ 3311 & 3322 & 3333 & 3323 & 3321 & 3312 \\ 2311 & 2322 & 2333 & 2323 & 2331 & 2312 \\ 3111 & 3122 & 3133 & 3123 & 3131 & 3112 \\ 1211 & 1222 & 1233 & 1223 & 1231 & 1212 \end{matrix}$$

which on equating to zero all the constituents not involving 1, and omitting the 1 common to all the rest, is equal, *à un facteur près*, to

$$\begin{vmatrix} 111 & 112 & 113 \\ 221 & 222 & 223 \\ 331 & 332 & 333 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 231 & 232 & 233 \\ 221 & 222 & 223 \\ 331 & 332 & 333 \end{vmatrix},$$

which are in fact two determinants from the matrix written above; but of these only one belongs to the determinant of the fourth order.

The number of coefficients in a function of four variables is

$$\frac{4.5\ldots\ldots(4+n-1)}{1.2\ldots\ldots n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1,2,3},$$

and in the same way that the number of coefficients in a function of *three* variables was always a triangular number, so that in a function of *four* variables is the sum of a series of triangular numbers, the number of places in the sides of the triangle, decreasing successively by unity, and from that circumstance has been called a *pyramidal number.*

The arrangement of the coefficients, regarded from this point of view, consequently involves space of three dimensions, and is beyond the cognizance of determinants; it belongs to the more extended theory of *Permutants.*

In the general case a function of the nth degree of m variables contains

$$\mu = \frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots\ldots m},$$

terms; and consequenthy its first differential-coefficients, taken with respect to the variables in succession, contain

$$\mu = \frac{(n-1)n\ldots\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots\ldots m},$$

terms. If then the coefficients of the various powers of the variables in these first differential-coefficients be written in lines under one another, there will result a rectangular Matrix of m horizontal and n vertical rows. This matrix, when regarded as representing an assemblage of determinants, possesses remarkable properties, as was shewn to some Extent by Dr. *Hesse* and further developed by *M. Sylvester*. (London Edinburgh Phil. Mag. Feb. 1853.)

Let it be required to determine the conditions under which a function of m variables is capable of being expressed as a function of $(m-r)$ variables. Let U be the function, and $x_1, x_2, \dots\dots x_m$ the variables, then

$$U = x_1 . \frac{dU}{dx_1} + x_2 . \frac{dU}{dx_2} + \cdots\cdots + x_m . \frac{dU}{dx_m},$$

and the function U will vanish in virtue of the m equations

$$\frac{dU}{dx_1} = 0 \; , \; \frac{dU}{dx_2} = 0 \quad , \quad \cdots\cdots \frac{dU}{dx_m} = 0 \, .$$

If however U be expressible as a function of $(m-r)$ variables, or as it is technically termed „loses a orders", it will vanish in virtue of $(m-r)$ out of the above m equations; that is to say, the r remaining differential-coefficients must be linear functions of the other $(m-r)$. In other words, there must exist r linear relations between the differential-coefficients. Let these be as follows;

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} \frac{dU}{dx_1} + \lambda_{12} \frac{dU}{dx_2} + \cdots\cdots + \lambda_{1m} \frac{dU}{dx_m} &= 0 \, , \\
\lambda_{21} \frac{dU}{dx_1} + \lambda_{22} \frac{dU}{dx_2} + \cdots\cdots + \lambda_{2m} \frac{dU}{dx_m} &= 0 \, , \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_{r1} \frac{dU}{dx_1} + \lambda_{r2} \frac{dU}{dx_2} + \cdots\cdots + \lambda_{rm} \frac{dU}{dx_m} &= 0 \, ,
\end{aligned}$$

and since these must be identically satisfied, the final conditions will be given, by equating to zero, the coefficient of all the powers of the variables, and eliminating the λ quantities from these last equations. If $r = 1$, the results will obviously be the various determinants of the mth degree which can be formed from the rectangular matrix described above, and the conditions may be said to be the simultaneous evanescence of the determinants contained in the matrix. If $r = 2$, any one of the differential-coefficients can be eliminated; the effect of which will be to strike out one of the m horizontal rows of the matrix; the result will

be the first minor with respect to that row, which can be formed from the matrix; aud since any row may be so struck out, the conditions may be said to be the simultaneous evanescence of the frist minors of the matrix, and similarly the conditions that U may lose r orders will be the simultaneous evanescence of the rth minors of the matrix. If $r = m - 1$, i. e., if U loses $(m-1)$ orders, or is expressible as a perfect power, all the coefficients of one of the differential-coefficients, i. e. all but one of U, must vanish; as might have been anticipated à priori.

It has already been remarked that a determinant of the nth degree has in general n first minors, $\frac{n(n-1)}{1.2}$ second, and

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots\ldots i}$$

ith minors; and since the determinant may be expressed as a linear function of any set of minors on the same level, it will vanish whenever all the minors on the same level vanish together. But, as all the minors of any such set are not independent, the evanescense of a smaller number will involve that of the rest. It is therefore important to determine what is the smallest number which will suffice.

Consider then the matrix formed by taking the i upper horizontal rows from a square array of u rows eachway; and let i be less than $\frac{1}{2}u$. It is clear that, since the number of minors of the degree $(\frac{1}{2}u-p)$, is the same as that of those of the degree $(\frac{1}{2}u+p)$, the consideration of the case, where i is less than $\frac{1}{2}u$, will give the general law.

Let the given determinant be

$$\nabla = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & \ldots\ldots & u \\ 1 & 2 & \ldots\ldots & u \end{Bmatrix},$$

and the matrix

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \ldots\ldots & i & \ldots\ldots & u \\ 1 & 2 & \ldots\ldots & i & & \end{Bmatrix}$$

i. e.

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \ldots\ldots & (1,i) & \ldots\ldots & (1,u) \\ (2,1) & (2,2) & \ldots\ldots & (2.i) & \ldots\ldots & (2,u) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (i,1) & (i,2) & \ldots\ldots & (i,i) & \ldots\ldots & (i,u), \end{matrix}$$

then the determinants formed from the $(i-1)$ first vertical rows, together with the ith, the $(i+1)$th, ... the uth respectively, may be thus written:

$$\begin{matrix} [i,1]\,(1,i)+[i,2](2,i)+\ldots\ldots+[i,i](i,i) \\ [i,1](1,i+1)+[i,2](2,i+1)+\ldots\ldots+[i,i](i,i+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [i,1](1,u)+[i,2](2,u)+\ldots\ldots+[i,i](i,u); \end{matrix}$$

and if these vanish, it is obvious that by direct elimination all the others may be at once obtained; hence it is sufficient that $(n-i+1)$ independent minors out of the whole set, vanish. The same would of course be true with respect to vertical rows, and consequently, if out of the matrix consisting of n vertical and m horizontal rows,

$$(n-i+1)\,(m-i+1)$$

independent ith minors vanish, all the ith minors of the matrix will vanish.

Hence in a square matrix, i. e., an ordinary determinant, the number of minors necessarily vanishing in order that all of the same order may vanish, will be for the orders

$$1\,,2\,,\,.....\,i$$

as the square numbers

$$n^2,(n-1)^2,\,.....\,(n-i+1)^2\,.$$

If however the determinant be not perfectly general, but of some symmetrical character, this number will be diminished. Thus, when the determinant is of a quadratic form, all conjugate minors are equal; and consequently, if the $(n-i+1)^2$ independent ith minors of a general determinant be arranged in a square, those which lie on one side of the principal diagonal will be equal to those on the other. In other words: the series of numbers representing the number of independent minors will be of the *triagonal* instead of the quadrigonal (or square) scale.

Thus, for example, in the determinants

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1\,2 \end{Bmatrix}$$

where

$$(1,2)=(2,1)\,,$$

the condition

$$(1,1)=0 \quad , \quad (1,2)=0 \quad , \quad (2,2)=0\,,$$

are all that exist. Again in the determinant

$$\begin{Bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{Bmatrix}$$

where

$$(2,3)=(3,2) \quad , \quad (3,1)=(1,3) \quad , \quad (1,2)=(2,1)\,,$$

we have

$$(1,1)=0 \quad , \quad (2,2)=0 \quad , \quad (3,3)=0\,,$$

$$(2,3)=0 \quad , \quad (3,1)=0 \quad , \quad (1,2)=0\,,$$

or

$$\left|\begin{matrix}2\,3\\2\,3\end{matrix}\right|=0\;,\;\left|\begin{matrix}3\,1\\3\,1\end{matrix}\right|=0\;,\;\left|\begin{matrix}1\,2\\1\,2\end{matrix}\right|=0\,,$$

$$\left|\begin{matrix}1\,2\\1\,3\end{matrix}\right|=0\;,\;\left|\begin{matrix}2\,3\\2\,1\end{matrix}\right|=0\;,\;\left|\begin{matrix}3\,1\\3\,2\end{matrix}\right|=0\,;$$

and so on.

There is a particular case of the homoloidal law, which deserves notice, from its apparently anomalous character. Consider the matrix

$$\left|\begin{matrix}1\,2\,.....\,n\\1\,2\end{matrix}\right|,$$

in which case $n-2+1=n-1$ independent determinants of the second degree will be

$$\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\,2\end{matrix}\right\},\;\left\{\begin{matrix}1\,3\\1\,2\end{matrix}\right\},\;.....\left\{\begin{matrix}1\,n\\1\,2\end{matrix}\right\}.$$

Now, if

$$(1,1)=0\;,\;(2,1)=0\,,$$

the evanescence of all these is ensured; but that of the other determinants, e. g.

$$\left\{\begin{matrix}2\,3\\1\,2\end{matrix}\right\},\;\left\{\begin{matrix}2\,4\\1\,2\end{matrix}\right\},\;.....\left\{\begin{matrix}3\,4\\1\,2\end{matrix}\right\},\;.....$$

is not. This contradiction is to be explained by the consideration that the matrix to which the latter system belongs, is

$$\left\{\begin{matrix}2\,3\,.....\,n\\1\,2\end{matrix}\right\},$$

while the former systems are negatory and might be increased in number without limit.

The same remark would hold good with respect to the matrix

$$\left|\begin{matrix}1\,2\,3\,.....\,n\\1\,2\,3\end{matrix}\right|,$$

when

$$(1,1)=0\;,\;(2,1)=0\;,\;(3,1)=0\,.$$

And so on, generally.

§. IX.

On Functional Determinants.

There is a class of determinants whose constituents are differential-coefficients of functions of variables, and which are called *functional determinants*; they are capable of numerous applications, and although subject to the same general laws of combination and development as ordinary determinants, possess many peculiarities, which make it necessary to discuss them separately.

If $f, f_1, \ldots f_n$ be functions of $x, x_1, \ldots x_n$ not independent of one another, but connected by some equation, such as,

$$(1.)\qquad \Pi = 0$$

then the equations

$$(2.)\qquad \frac{d\Pi}{dx} = 0\,,\quad \frac{d\Pi}{dx_1} = 0\,,\quad \ldots\ldots\quad \frac{d\Pi}{dx_n} = 0\,,$$

hold good on account of the independence of $x, x_1, \ldots x_n$; hence

$$(3.)\qquad \begin{cases} \frac{d\Pi}{df}\cdot\frac{df}{dx}+\frac{d\Pi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dx}+\ldots\ldots+\frac{d\Pi}{df_n}\cdot\frac{df_n}{dx}=0\,,\\ \frac{d\Pi}{df}\cdot\frac{df}{dx_1}+\frac{d\Pi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dx_1}+\ldots\ldots+\frac{d\Pi}{df_n}\cdot\frac{df_n}{dx_1}=0\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{d\Pi}{df}\cdot\frac{df}{dx_n}+\frac{d\Pi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dx_1}+\ldots\ldots+\frac{d\Pi}{df_n}\cdot\frac{df_n}{dx_n}=0\,, \end{cases}$$

and consequently

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{df}{dx}\cdot\frac{df_1}{dx}\ldots\ldots\frac{df_n}{dx}\\ \frac{df}{dx_1}\cdot\frac{df_1}{dx_1}\ldots\ldots\frac{df_n}{dx_1}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{df}{dx_n}\cdot\frac{df_1}{dx_n}\ldots\ldots\frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Conversely, if the latter equation hold good, the preceeding system may always be satisfied, and the functions $f, f_1, \ldots f_n$ are not independent.

If $f, f_1, \ldots f_r$ be functions of the variables $x, x_1, \ldots x_n$, independent of one another, and there be given the system of equations

$$(5.)\quad \begin{cases} s\dfrac{df}{dx}+s_1\dfrac{df}{dx_1}+\dots\dots+s_n\dfrac{df}{dx_n}=t\,, \\ s\dfrac{df_1}{dx}+s_1\dfrac{df_1}{dx_1}+\dots\dots+s_n\dfrac{df_1}{dx_n}=t_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s\dfrac{df_n}{dx}+s_1\dfrac{df_n}{dx_1}+\dots\dots+s_n\dfrac{df_n}{dx_n}=t_n \end{cases}$$

then, considering $x, x_1, \dots\dots x_n$ as functions of $f, f_1, \dots\dots f_n$, the equations

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dx}=1\;,\;\dfrac{dx}{dx_1}=0\;,\;\dots\dots\;\dfrac{dx}{dx_n}=0\,, \\ \dfrac{dx_1}{dx}=0\;,\;\dfrac{dx_1}{dx_1}=1\;,\;\dots\dots\;\dfrac{dx_1}{dx_n}=0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dx}=0\;,\;\dfrac{dx_n}{dx_1}=0\;,\;\dots\dots\;\dfrac{dx_n}{dx_n}=1\,, \end{cases}$$

give

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{df}{dx}\cdot\dfrac{dx}{df}+\dfrac{df_1}{dx}\cdot\dfrac{dx}{df_1}+\dots=1\;,\;\dfrac{df}{dx_1}\cdot\dfrac{dx}{df}+\dfrac{df_1}{dx_1}\cdot\dfrac{dx}{df_1}+\dots=0\;,\;\dots\dfrac{df}{dx_n}\cdot\dfrac{dx}{df}+\dfrac{df_1}{dx_n}\cdot\dfrac{dx}{df_1}=0, \\ \dfrac{df}{dx}\cdot\dfrac{dx_1}{df}+\dfrac{df_1}{dx}\cdot\dfrac{dx_1}{df_1}+\dots=0\;,\;\dfrac{df}{dx_1}\cdot\dfrac{dx_1}{df}+\dfrac{df_1}{dx_1}\cdot\dfrac{dx_1}{df_1}+\dots=1\;,\;\dots\dfrac{df}{dx_n}\cdot\dfrac{dx_1}{df}+\dfrac{df_1}{dx_n}\cdot\dfrac{dx_1}{df_1}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{df}{dx}\cdot\dfrac{dx_n}{df}+\dfrac{df_1}{dx}\cdot\dfrac{dx_n}{df_1}+\dots=0\;,\;\dfrac{df}{dx_1}\cdot\dfrac{dx_n}{df}+\dfrac{df_1}{dx_1}\cdot\dfrac{dx_n}{df_1}+\dots=0\;,\;\dots\dfrac{df}{dx_n}\cdot\dfrac{dx_n}{df}+\dfrac{df_1}{dx_n}\cdot\dfrac{dx_n}{df_1}=1, \end{cases}$$

and consequently

$$(8.)\quad \begin{cases} t\dfrac{dx}{df}+t_1\dfrac{dx}{df_1}+\dots\dots+t_n\dfrac{dx}{df_n}=s\,, \\ t\dfrac{dx_1}{df}+t_1\dfrac{dx_1}{df_1}+\dots\dots+t_n\dfrac{dx_1}{df_n}=s_1\,. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t\dfrac{dx_1}{df}+t_1\dfrac{dx_1}{df_1}+\dots\dots+t_n\dfrac{dx_1}{df_n}=s_n\,. \end{cases}$$

If $f, f_1, \dots\dots f_n$ be functions of the variables $x, x_1, \dots\dots x_n$, independent of one another, and there be given the equations

$$(9.)\quad \begin{cases} u\dfrac{df}{dx}+u_1\dfrac{df_1}{dx}+\dots\dots+u_n\dfrac{df}{dx}=v \\ u\dfrac{df}{dx_1}+u_1\dfrac{df_1}{dx_1}+\dots\dots+u_n\dfrac{df_n}{dx_1}=v_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u\dfrac{df}{dx_n}+u_1\dfrac{df_1}{dx_n}+\dots\dots+u_n\dfrac{df_n}{dx_n}=v^n \end{cases}$$

Then since

$$(10.)\begin{cases}\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{df}+\frac{df}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{df}+\ldots=1\,,\ \frac{df_1}{dx}\cdot\frac{dx}{df}+\frac{df_1}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{df}+\ldots=0\,,\ldots\frac{df_n}{dx}\cdot\frac{dx}{df}+\frac{df_n}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{df}+\ldots=0,\\ \frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{df_1}+\frac{df}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{df_1}+\ldots=0\,,\ \frac{df_1}{dx}\cdot\frac{dx}{df_1}+\frac{df_1}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{df_1}+\ldots=1\,,\ldots\frac{df_n}{dx}\cdot\frac{dx}{df_1}+\frac{df_n}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{df_1}+\ldots=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{df_n}+\frac{df}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{df_n}+\ldots=0\,,\ \frac{df_1}{dx}\cdot\frac{dx}{df_n}+\frac{df_1}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{df_n}+\ldots=0\,,\ldots\frac{df_n}{dx}\cdot\frac{dx}{df_n}+\frac{df_n}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{df_n}+\ldots=1,\end{cases}$$

there may be deduced

$$(11.)\qquad\begin{cases}v\frac{dx}{df}+v_1\frac{dx_1}{df}+\ldots\ldots+v_n\frac{dx_n}{df}=u\,,\\ v\frac{dx}{df_1}+v_1\frac{dx_1}{df_1}+\ldots\ldots+v_n\frac{dx_n}{df_1}=u_1\,,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v\frac{dx}{df_n}+v_1\frac{dx_1}{df_n}+\ldots\ldots+v_n\frac{dx_n}{df_n}=u_n.\end{cases}$$

Hence also by what has been proved above, $f, f_1, \ldots\ldots f_n$ being independent if

$$(12.)\qquad t=0\ \ ,\ \ t_1=0\ \ ,\ \ \ldots\ldots t_n=0\,,$$

then also

$$(13.)\qquad s=0\ \ ,\ \ s_1=0\ \ ,\ \ \ldots\ldots s_n=0\,;$$

and conversely.

Comparing the solutions of the systems of equations given above with those which would be found by the ordinary method of determinants and writing

$$(14.)\qquad \nabla=\begin{vmatrix}\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dx_1}\cdots\cdots\frac{df}{dx_n}\\ \frac{df_1}{dx}\cdot\frac{df_1}{dx_1}\cdots\frac{df_1}{dx_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{df_n}{dx}\cdot\frac{df_n}{dx_1}\cdots\frac{df_n}{dx_n}\end{vmatrix}$$

it is seen that

$$(15.)\begin{cases}\nabla\frac{dx}{df}=[0,0]\ ,\ \nabla\frac{dx_1}{df}=[0,1],\ \ldots\ldots\nabla\frac{dx_n}{df}=[0,n]\,,\\ \nabla\frac{dx}{df_1}=[1,0]\ ,\ \nabla\frac{dx_1}{df_1}=[1,1],\ \ldots\ldots\nabla\frac{dx_1}{df_1}=[1,n]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \nabla\frac{dx}{df_n}=[n,0]\ ,\ \nabla\frac{dx_1}{df_n}=[n,1],\ \ldots\ldots\nabla\frac{dx_n}{df_n}=[n,n]\end{cases}$$

which may also be written in the following forms:

$$
(16.)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\dfrac{d\nabla}{d\frac{df}{dx}} = \nabla\dfrac{dx}{df}, & \dfrac{d\nabla}{d\frac{df}{dx_1}} = \nabla\dfrac{dx_1}{df}, & \ldots\ldots & \dfrac{d\nabla}{d\frac{df}{dx_n}} = \nabla\dfrac{dx_n}{df}, \\
\dfrac{d\nabla}{d\frac{df_1}{dx}} = \nabla\dfrac{dx}{df_1}, & \dfrac{d\nabla}{d\frac{df_1}{dx_1}} = \nabla\dfrac{dx_1}{df_1}, & \ldots\ldots & \dfrac{d\Delta}{d\frac{df_1}{dx_n}} = \nabla\dfrac{dx_n}{df}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\dfrac{d\nabla}{d\frac{df_n}{dx}} = \nabla\dfrac{dx}{df_n}, & \dfrac{d\nabla}{d\frac{df_n}{dx_1}} = \nabla\dfrac{dx_1}{df_n}, & \ldots\ldots & \dfrac{d\nabla}{d\frac{df_n}{dx_n}} = \nabla\dfrac{dx_n}{df_n},
\end{array}\right.
$$

and inversely,

$$
(17.)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\dfrac{d\nabla}{d\frac{dx}{df}} = -\nabla\dfrac{df}{dx}, & \dfrac{d\nabla}{d\frac{dx}{df_1}} = -\nabla\dfrac{df_1}{dx}, & \ldots\ldots & \dfrac{d\nabla}{d\frac{dx}{df}} = -\nabla\dfrac{df_n}{dx}, \\
\dfrac{d\nabla}{d\frac{dx_1}{df}} = -\nabla\dfrac{df}{dx_1}, & \dfrac{d\nabla}{d\frac{dx}{df_1}} = -\nabla\dfrac{df_1}{dx_1}, & \ldots\ldots & \dfrac{d\nabla}{d\frac{dx_1}{df_n}} = -\nabla\dfrac{df_n}{dx_1}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\dfrac{d\nabla}{d\frac{dx_n}{df}} = -\nabla\dfrac{df}{dx_n}, & \dfrac{d\nabla}{d\frac{dx_n}{df_1}} = -\nabla\dfrac{df_1}{dx_n}, & \ldots\ldots & \dfrac{d\nabla}{d\frac{dx_n}{df_n}} = -\nabla\dfrac{df_n}{dx_n}.
\end{array}\right.
$$

If the determinant formed from the expressions on the left-hand sides of the system in the preceding page be equated to that formed by the corresponding expressions on the right-hand side, the theorem for the multiplication of determinants gives at once:

$$
(18.)\quad \left|\begin{array}{llll}
\frac{df}{dx} & \frac{df}{dx_1} & \ldots\ldots & \frac{df}{dx_n} \\
\frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dx_1} & \ldots\ldots & \frac{df_1}{dx_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{df_n}{dx} & \frac{df_n}{dx_1} & \ldots\ldots & \frac{df_n}{dx_n}
\end{array}\right| \left|\begin{array}{llll}
\frac{dx}{df} & \frac{dx}{df_1} & \ldots\ldots & \frac{dx}{df_n} \\
\frac{dx_1}{df} & \frac{dx_1}{df_1} & \ldots\ldots & \frac{dx_1}{df_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{dx_n}{df} & \frac{dx_n}{df_1} & \ldots\ldots & \frac{dx_n}{df_n}
\end{array}\right| = 1.
$$

The same result might be obtained by substituting for $[0,0]$, $[0,1]$,..... in the equation

$$
\left|\begin{array}{llll}
[0,0] & [0,1] & \ldots\ldots & [0,n] \\
[1,0] & [1,1] & \ldots\ldots & [1,n] \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
[n,0] & [n,1] & \ldots\ldots & [1,n]
\end{array}\right| = \nabla^n.
$$

In connexion with which the following formula may be noticed:
If f, f_1, f_n are related by the $(n+1)$ equations

$$(19.)\qquad F=0\ ,\quad F_1=0\ ,\quad \dots\dots F_n=0\,,$$

n of the $(n+1)$ variables may be eliminated from each of these last functions, so that each may be considered as a function of a single variable, and of the functions $f, f_1, \dots\dots f_n$; and consequently

$$(20.)\begin{cases} \frac{dF}{dx}+\frac{dF}{df}\cdot\frac{df}{dx}+\dots\dots=0, & \frac{dF}{dx_1}+\frac{dF}{df}\cdot\frac{df}{dx_1}+\dots\dots=0, \quad \dots\dots \frac{dF}{dx_n}+\frac{dF}{df}\cdot\frac{df}{dx_n}+\dots=0 \\ \frac{dF_1}{dx}+\frac{dF_1}{df}\cdot\frac{df}{dx}+\dots\dots=0, & \frac{dF_1}{dx_1}+\frac{dF_1}{df}\cdot\frac{df}{dx_1}+\dots\dots=0, \quad \dots\dots \frac{dF_1}{dx_n}+\frac{dF_1}{df}\cdot\frac{df}{dx_n}+\dots=0, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \frac{dF_n}{dx}+\frac{dF_n}{df}\cdot\frac{df}{dx}+\dots\dots=0, & \frac{dF_n}{dx_1}+\frac{dF_n}{df}\cdot\frac{df}{dx_1}+\dots\dots=0, \quad \dots\dots \frac{dF_n}{dx_n}+\frac{dF_n}{df}\cdot\frac{df}{dx_n}+\dots=0. \end{cases}$$

Transposing the terms $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dx_1}$, ... and equating the determinant formed from the expressions on the left-hand sides of these equations to that formed from those on the right, the formula for the multiplication of determinants gives:

$$(21.)\ (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dF}{dx_1}\dots\frac{dF}{dx_n} \\ \frac{dF_1}{dx}\cdot\frac{dF_1}{dx_1}\dots\frac{dF_1}{dx_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{dF_n}{dx}\cdot\frac{dF_n}{dx_1}\dots\frac{dF_1}{dx_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dF}{df}\cdot\frac{dF}{df_1}\dots\frac{dF}{df_n} \\ \frac{dF_1}{df}\cdot\frac{dF_1}{df_1}\dots\frac{dF}{df_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{dF_n}{df}\cdot\frac{dF_n}{df_1}\dots\frac{dF_n}{df^n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dx}\dots\frac{df}{dx^n} \\ \frac{df_1}{dx}\cdot\frac{df_1}{dx_1}\dots\frac{df_1}{dx_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{df_n}{dx}\cdot\frac{df_n}{dx_1}\dots\frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

Determinants are useful also in the transformation of multiple integrals, and lead to a simple solution of the general problem which may be thus stated. Let

$$(22.)\qquad V=\int\int\dots U\,dx\,dx_1\dots dx_n\,,$$

and suppose it be required to transform the integral to one in which $y, y_1, \dots y_n$ shall be the independent variables, then

$$\begin{aligned} dx+ &= \frac{dx}{dy}dy+\frac{dx}{dy_1}dy_1+\dots\dots+\frac{dx}{dy_n}dy_n, \\ dx_1 &= \frac{dx_1}{dy}dy+\frac{dx_1}{dy_1}dy_1+\dots\dots+\frac{dx_1}{dy_n}dy_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dx_n &= \frac{dx_n}{dy}dy+\frac{dx_n}{dy_1}dy_1+\dots\dots+\frac{dx_n}{dy_n}dy_n, \end{aligned}$$

and since $x, x_1, \ldots\ldots x_n$ vary independently, we must put

$$dx_1 = 0 \quad , \quad dx_2 = 0 \quad , \quad \ldots\ldots \quad dx_n = 0,$$

in order to find dx. This gives

$$\nabla dy = \nabla_1 dx,$$

and consequently dx and dy vanish together, (the value of ∇_1 is obvious). And therefore for the determination of the remaining differentials there exist the equations

$$\begin{cases} dx_1 = \frac{dx_1}{dy_1} dy_1 + \frac{dx_1}{dy_2} dy_2 + \ldots\ldots + \frac{dx_1}{dy_n} dy_n, \\ dx_2 = \frac{dx_2}{dy_1} dy_1 + \frac{dx_2}{dy_2} dy_2 + \ldots\ldots + \frac{dx_2}{dy_n} dy_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n = \frac{dx_n}{dy_1} dy_1 + \frac{dx_n}{dy_2} dy_2 + \ldots\ldots + \frac{dx_n}{dy_n} dy_n. \end{cases}$$

Proceeding as before, and putting

$$dx_2 = 0 \quad , \quad dx_3 = 0 \quad , \quad \ldots\ldots \quad dx_n = 0,$$

there will result

$$\nabla_1 dy_1 = \nabla_2 dx_1,$$

and so on successively until

$$\nabla_n dy_n = dx_n.$$

Hence multiplying all these expressions together, and dividing out the common factor,

$$\nabla_1, \nabla_2 \ldots\ldots \nabla_n,$$

there will finally result:

$$(23.) \qquad \nabla dy . dy_1 \ldots\ldots dy_n = dx . dx_1 \ldots\ldots dx_n,$$

and consequently

$$(24.) \qquad \nabla = \iint \ldots\ldots U \nabla dy . dy_1 \ldots\ldots dy_n.$$

If

$$U = 0,$$

and

$$(0,1) = \frac{dU}{dx_1} = 0 \quad , \quad (0,2) = \frac{dU}{dx_2} = 0 \quad , \quad \ldots\ldots \quad (0,n) = \frac{dU}{dx_n} = 0,$$

then, differentiating,

$$\begin{aligned} &(1,1) dx_1 + (2,1) dx_2 + \ldots\ldots + (n_1, 1) dx_n = 0, \\ &(1,2) dx_1 + (2,2) dx_2 + \ldots\ldots + (n, 2) dx_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(1,n) dx_1 + (2,n) dx_2 + \ldots\ldots + (n, n) dx_n = 0, \end{aligned}$$

and

$$\nabla = \begin{vmatrix} (1,1)\,(1,2) \cdots\cdots (1,n) \\ (2,1)\,(2,2) \cdots\cdots (2,n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)\,(n,2) \cdots\cdots (n,n) \end{vmatrix} = 0$$

and the preceding system gives

$$\begin{array}{l} \lambda_1 dx_1 = [1,1]\ ,\ \lambda_1 dx_2 = [1,1]\ ,\ \cdots\ \lambda_1 dx_n = [1,n], \\ \lambda_2 dx_1 = [2,1]\ ,\ \lambda_2 dx_2 = [2,1]\ ,\ \cdots\ \lambda_2 dx_n = [2,n], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n dx_1 = [n,1]\ ,\ \lambda_n dx_2 = [n,2]\ ,\ \cdots\ \lambda_n dx_n = [n,n]' \end{array}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_n$ being indeterminate multipliers. Suppose moreover that

$$\{0,1\} = \frac{d\nabla}{dx_1},\quad \{0,2\} = \frac{d\nabla}{dx_2},\quad \cdots\cdots \{0,n\} = \frac{d\nabla}{dx_n},$$

then, it being observed that $(i,j) = (j,i)$, and $[i,j] = [j,i]$, it follows that

$$\begin{array}{rl} \{0,1\} = & (1,1,1)\ [1,1] + (1,2,1)\ [1,2] + \cdots\cdots + (1,n,1)\ [1,n], \\ & \pm (1,1,2)\ [2,1] + (1,2,2)\ [2,2] + \cdots\cdots + (1,n,2)\ [2,n], \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (1,1,n)\ [n,1] + (1,2,n)\ [n,2] + \cdots\cdots + (1,n,n)\ [n,n], \\ = & \lambda_1\ \{(1,1,1)dx_1 + (1,1,2)dx_2 + \cdots\cdots + (1,1,n)dx_n\} \\ + & \lambda_2\ \{(1,2,1)dx_1 + (1,22)dx_2 + \cdots\cdots + (1,n,n)dx_n\} \\ + & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + & \lambda_n\ \{(1,n,1)dx_1 + (1,n,2)dx_2 + \cdots\cdots + (1,n,n)dx_n\} \end{array}$$

whence the following system may be formed:

$$\begin{array}{l} \{0,1\} = \lambda_1 D(1,1) + \lambda_2 D(1,2) + \cdots\cdots + \lambda_n (1,n), \\ \{0,2\} = \lambda_1 D(2,1) + \lambda_2 D(2,2) + \cdots\cdots + \lambda_n (2,n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{0,n\} = \lambda_1 D(n,1) + \lambda_2 D(n,2) + \cdots\cdots + \lambda_n (n,n), \end{array}$$

where D indicates the total differential. But since

$$\lambda_2 dx_1 = \lambda_1 dx_2\quad ,\quad \lambda_3 dx_1 = \lambda_1 dx_3\ \cdots\cdots\ \lambda_n dx_1 = \lambda_1 dx_n\ ,$$

consequently

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \cdots\cdots \lambda_n = dx_1 : dx_2 : \cdots\cdots dx_n;$$

and if θ be the common ratio of each quantity on the left-hand side of this system to the corresponding quantity on the right-hand side, the above system may be written thus:

$$\{0,1\} = \theta D^2(0,1) \quad , \quad \{0,2\} = \theta D^2(0,2) \quad , \quad \ldots\ldots \quad \{0,n\} \quad \theta D^2(0,n) \, .$$

But since

$$(0,1) = 0 \quad , \quad (0,2) = 0 \quad , \quad = (0,n) = 0 \, ,$$

therefore also

$$D^2(0,1) = 0 \quad , \quad D^2(0,2) = 0 \quad , \quad \ldots\ldots \quad D^2(0,n) = 0 \, ,$$

and consequently

$$\{0,1\} = 0 \quad , \quad \{0,2\} = 0 \quad , \quad \cdots\cdots \{0,n\} = 0 \, ,$$

these again give

$$\begin{array}{l} \{1,1\}\,dx_1 + \{1,2\}\,dx_2 + \cdots\cdots + \{1,n\}\,dx_n = 0 \, , \\ \{2,1\}\,dx_1 + \{2,2\}\,dx_2 + \cdots\cdots + \{2,n\}\,dx_n = 0 \, , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{n,1\}\,dx_1 + \{n,2\}\,dx_2 + \cdots\cdots + \{n,n\}\,dx_n = 0 \, , \end{array}$$

and consequently

$$\begin{vmatrix} \{1,1\} & , & \{1,2\} & , & \cdots\cdots & \{1,n\} \\ \{2,1\} & , & \{2,2\} & , & \cdots\cdots & \{2,n\} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ \{n,1\} & , & \{n,2\} & , & \cdots\cdots & \{n,n\} \end{vmatrix} = 0 \, .$$

From the above formulae the following relations are easily deduced:

$$\begin{array}{l} [1,1] : [1,2] : \cdots\cdots [1,n] = [\{1,1\}] : [\{1,2\}] : \cdots\cdots [\{1,n\}] \, , \\ [2,1] : [2,2] : \cdots\cdots [2,n] \quad : [\{2,1\}] : [\{2,2\}] : \cdots\cdots [\{2,n\}] \, , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [n,1] : [2,n] : \cdots\cdots [n,n] \quad : [\{n,1\}] : [\{n,2\}] : \cdots\cdots [\{n,n\}] \, , \end{array}$$

where $[\{i,j\}]$ is the inverse of $\{j,i\}$. This system also involves the following:

$$(25.) \left\{ \begin{array}{l} (1,1) : (1,2) : \cdots\cdots (1,n) = \{1,1\} : \{1,2\} : \cdots\cdots \{1,n\} \, , \\ : (2,1) : (2,2) : \cdots\cdots (2,n) \quad : \{2,1\} : \{2,2\} : \cdots\cdots \{1,n\} \, , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ : (n,1) : (n,2) : \cdots\cdots (n,n) \quad : \{n,1\} : \{n,2\} : \cdots\cdots \{n,n\} \, . \end{array} \right.$$

This last system of relations was given by Dr. *Hesse* (*Crelle*, tom. XL.) with a demonstration by *Jacobi*.

The above equations are appicable to certain questions in Geometry. Thus, in the case where $n = 3$, the equation

$$U = 0$$

represents a *cone* when x, x_1, x_2 are the coordinates of a point; and it represents a *plane curve* when the ratios of any two variables to the third are the coordinates of a point in the plane. This in fact is the same thing as forming a plane curve by the intersection of a cone and a plane. In order to find the condition for a point of inflexion on the plane curve, it will therefore be sufficient to find the condition that the principal (and consequently all the) radii of curvature of the cone at a certain point (x, x_1, x_2) shall be infinite. The condition in question is, as is well known, represented by the system

$$(0,1)=0 \quad , \quad (0,2)=0 \quad , \quad (0,3)\,,$$

or

$$(1,1)\,dx_1+(1,2)\,dx_2+(1,3)\,dx_3=0\,,$$
$$(2,1)\,dx_1+(2,2)\,dx_2+(2,3)\,dx_3=0\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(3,1)\,dx_1+(3,2)\,dx_2+(3,3)\,dx_3=0\,,$$

and consequently

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{vmatrix} = 0\,.$$

This equation combined with that to the curve, will determine the points of inflexion of the curve. It follows therefore that a curve of the nth order has in general $3n\,(n-2)$ points of inflexion.

Consider again the equation

$$U=0\,,$$

and suppose that, as before,

$$(0\,,1)=0 \quad , \quad (0\,,2)=0 \quad , \quad \ldots\ldots\,(0\,,n)=0\,.$$

These equations are in general sufficient to determine the ratios

$$x_1 : x_2 : \ldots\ldots\, x_n\,,$$

and the result of eliminating the variables is the condition of their coexistence. This resulting function, or *Resultant*, as it is called, has not get been found in the general case free from extraneous factors, but the following properties seem worth notice from their connexion with the Theory of Elimination.

Suppose that U is of the *third* order, and that the above equations, together with the results above derived from them, hold good for m consecutive values of the variables; it is proposed to determine the conditions that this may be the case; i. e. to find the form of the *Resultant* under these circumstances.

Let

$$U = (1,1,1,)x_1^3 + (2,2,2,)x_2^3 + .. + 3(1,1,2)x_1^2x_2 + 3(1,2,2,)x_1x_2^2 + .. + 6(1,2,3)x_1x_2x_3 + .. = 0,$$

then

$$(1) = (1,1,1)x_1^2 + (1,2,2)x_2^2 + ... + 2(1,1,2)x_1x_2 + ... = 0\ ,$$
$$(2) = (2,1,1)x_1^2 + (2,2,2)x_2^2 + ... + 2(2,1,2)x_1x_2 + ... = 0\ .$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

These give rise to the determinant

$$\nabla = \begin{vmatrix} (1\,,1) & (1\,,2) & \cdots\cdots \\ (2\,,1) & (2\,,2) & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix} = 0\ .$$

This equation, as is known, involves also

$$\{1\} = 0 \quad , \quad \{2\} = 0 \quad , \quad .....$$

where $\{1\}$, $\{2\}$, ... have the same meanings with respect to ∇ that (1), (2),..... have with respect to the given function. Dr. *Hesse*'s Theorem further gives the following relations:

$$\{1\,,1\} = \theta(1\,,2) \quad , \quad \{1\,,2\} = \theta(1\,,2)\ , ...$$
$$\{2\,,1\} = \theta(2\,,1) \quad , \quad \{2\,,2\} = \theta(2\,,2)\ , ...$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

in which θ merely indicates the ratio of each lefthand member of these equation to the corresponding righthand membres. Then writing

$$r + s + ... \doteq m\ ,$$

$$\frac{d^{r+s+...}\theta}{dx_1^r\,dx_2^s..} = \theta\left[{r,s,.. \atop 1,2,..}\right] = \Theta\ ,$$

$$\theta\left[{r-1,\ s,\ .. \atop 1,\quad 2,\ ..}\right] = \Theta_1 \quad , \quad \theta\left[{r,\ s-1,\ .. \atop 1,\quad 2,\ ..}\right] = \Theta_2\ , ...$$

$$\{1,1,.....(r\text{terms}),2,2,.....(s\text{terms}),.....\} = \{\bar{r},\bar{s},.....\}.$$

Leibnitz's theorem gives

$$\{\bar{r},\bar{s},.....1,1\} = r\,\Theta_1(1,1,1) + s\,\Theta_2(1,1,2) + ... + \Theta(1,1)\ ,$$
$$\{\bar{r},\bar{s},.....1,2\} = r\,\Theta_1(1,2,1) + s\,\Theta_2(1,2,2) + ... + \Theta(2,2)\ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\{\bar{r},\bar{s},.....2,2\} = r\,\Theta_1(2,2,1) + s\,\Theta_2(2,2,2) + ... + \Theta(2,2)\ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Or, substituting for $(1,1)$, $(1,2)$, ... $(2,2)$ ....., their values:

$$\begin{aligned}
\{\overline{r}, \overline{s}, \cdots 1,1\} &= (r\theta_1 + \theta x_1)(1,1,1) + (s\theta_2 + \theta x_2)(1,1,2) + \ldots\ldots \\
\{\overline{r}, \overline{s}, \cdots 1,2\} &= (r\theta_1 + \theta x_1)(1,2,1) + (s\theta_2 + \theta x_2)(1,2,2) + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\{\overline{r}, \overline{s}, \cdots 2,2\} &= (r\theta_1 + \theta x_1)(2,2,1) + (s\theta_2 + \theta x_2)(2,2,2) + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

whence eliminating $r\theta_1 + \theta x_1$, $s\theta_2 + \theta x_2$, ...

$$\left\| \begin{array}{ccccc}
\{\overline{r}, \overline{s}, \ldots\ldots 1,1\} & \{\overline{r}, \overline{s}, \ldots\ldots 1,2\} & \ldots\ldots & \{\overline{r}, \overline{s}, \ldots\ldots 2,2\} & \ldots\ldots \\
(1,1,1) & (1,2,1) & \ldots\ldots & (2,2,1) & \ldots\ldots \\
(1,1,2) & (1,2,2) & \ldots\ldots & (2,2,2) & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array} \right\| = 0,$$

and if
$$m = r + s + \ldots\ldots = u - 2$$

the constituents of this system of determinants will be entirely independent of the variables; and $\{\overline{r}, \overline{s}, \ldots\ldots 1,1\}$, $\{\overline{r}, \overline{s}, \ldots\ldots 1,2\}$, ... being of the nth order, the determinants will be of the order $2n$. There will of course be a system of determinants of this form corresponding to all of $r, s, \ldots\ldots$ consistent with the condition above given.

Such is the general Theory when the given function is of the *third* order; but it will be not without interest to compare the present results with that given by the ordinary method in the known case of three variables. In this case the systems of determinants will be as follows:

$$\left\| \begin{array}{cccccc}
\{1,1,1\} & \{1,2,2\} & \{1,3,3\} & \{1,2,3\} & \{1,3,1\} & \{1,1,2\} \\
(1,1,1) & (1,2,2) & (1,3,3) & (1,2,3) & (1.3,1) & (1,1,2) \\
(2,1,1) & (2,2,2) & (2,3,3) & (2,2,3) & (2,3,1) & (2,1,2) \\
(3,1,1) & (3,2,2) & (3,3,3) & (3,2,3) & (3,3,1) & (3,1,2)
\end{array} \right\| = 0,$$

$$\left\| \begin{array}{cccccc}
\{2,1,1\} & \{2,2,2\} & \{2,3,3\} & \{2,2,3\} & \{2,3,1\} & \{2,1,2\} \\
(1,1,1) & (1,2,2) & (1,3,3) & (1,2,3) & (1,3,1) & (1,1,2) \\
(2,1,1) & (2,2,2) & (2,3,3) & (2,2,3) & (2,3,1) & (2,1,2) \\
(3,1,1) & (3,2,2) & (3,3,3) & (3,2,3) & (3,3,1) & (3,1,2)
\end{array} \right\| = 0,$$

$$\left\| \begin{array}{cccccc}
\{3,1,1\} & \{3,2,2\} & \{3,3,3\} & \{3,2,3\} & \{3,3,1\} & \{3,1,2\} \\
(1,1,1) & (1,2,2) & (1,3,3) & (1,2,3) & (1,3,1) & (1,1,2) \\
(2,1,1) & (2,2,2) & (2,3,3) & (2,2,3) & (2,3,1) & (2,1,2) \\
(3,1,1) & (3,2,2) & (3,3,3) & (3,2,3) & (3,3,1) & (3,1,2)
\end{array} \right\| = 0,$$

all of which are of the sixth order.

On the otherhand, if the six combinations of the variables be eliminated linearly from the six equations

$$\begin{array}{ccccc} \{1\}=0 & , & \{2\}=0 & , & \{3\}=0\,, \\ (1)=0 & , & (2)=0 & , & (3)=0\,, \end{array}$$

there will result

$$\left|\begin{array}{cccccc}
\{1,1,1\} & \{1,2,2\} & \{1,3,3\} & \{1,2,3\} & \{1,3,1\} & \{1,1,2\} \\
\{2,1,1\} & \{2,2,2\} & \{2,3,3\} & \{2,3,3\} & \{2,3,1\} & \{2,1,2\} \\
\{3,1,1\} & \{3,2,2\} & \{3,3,3\} & \{3,3,3\} & \{3,3,1\} & \{3,1,2\} \\
(1,1,1) & (1,2,2) & (1,3,3) & (1,2,3) & (1,3,1) & (1,1,2) \\
(2,1,1) & (2,2,2) & (2,3,3) & (2,3,3) & (2,3,1) & (2,1,2) \\
(3,1,1) & (3,2,2) & (3,3,3) & (3,2,3) & (3,3,1) & (3,1,2)
\end{array}\right| = 0;$$

which as usual is of the twelfth order. It appears therefore that the coefficients of the determinants

$$\left\|\begin{array}{cccccc}
\{2,1,1\} & \{2,2,2\} & \{2,3,3\} & \{2,2,3\} & \{2,3,1\} & \{2,1,2\} \\
\{3,1,1\} & \{3,2,2\} & \{3,3,3\} & \{3,2,3\} & \{3,3,1\} & \{3,1,2\}.
\end{array}\right\|$$

$$\left\|\begin{array}{cccccc}
\{3,1,1\} & \{3,2,2\} & \{3,3,3\} & \{3,2,3\} & \{3,3,1\} & \{3,1,2\} \\
\{1,1,1\} & \{1,2,2\} & \{1,3,3\} & \{1,2,3\} & \{1,3,1\} & \{1,1,2\}
\end{array}\right\|$$

$$\left\|\begin{array}{cccccc}
\{1,1,1\} & \{1,2,2\} & \{1,3,3\} & \{1,2,3\} & \{1,3,1\} & \{1,1,2\} \\
\{2,1,1\} & \{2,2,2\} & \{2,3,3\} & \{2,2,3\} & \{2,3,1\} & \{2,1,2\}
\end{array}\right\|$$

separately vanish.

With respect to the interpretation of these results, it is known that, if

$$U=0\,,$$

be the equation to a curve of the third (or any) order:

$$\nabla = \left\{\begin{array}{c} \frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dy}\cdot\frac{d}{dz} \\ \frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dy}\cdot\frac{d}{dz} \end{array}\right\} U=0\,,$$

is the equation to the curve passing through the double points of U; but if the system

$$U = 0$$

$$\frac{dU}{dx} = 0 \; , \quad \frac{dU}{dy} = 0 \; , \quad \frac{dU}{dz} = 0$$

$$\nabla = 0$$

$$\frac{d\nabla}{dx} = 0 \; , \quad \frac{d\nabla}{dy} = 0 \; , \quad \frac{d\nabla}{dz} = 0 \; ,$$

hold good for two consecutive values of the ratios $x:y:z$, the curves U and ∇ will coïncide for two consecutive points. And consequently the above written results express the condition that the curve and its „*Hessian*" (∇) shall touch.

§. X.

On compound determinants.

A determinant, the constituents of which are, not simple algebraical quantities, but themselves determinants, is called a *compound determinant.*

The umbral notation, above used, is immediately applicable for the expressions of these complicated functions: thus, in the same way that

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1\,2 \end{Bmatrix}$$

denotes

$$(1,1)\,(2,2) + (1,2)\,(2,1)\,,$$

the expression

$$\begin{Bmatrix} \overline{1\,2} & \overline{3\,4} \\ 1\,2 & 3\,4 \end{Bmatrix},$$

will denote (Conf. *Sylvester*, Phil. Mag. April 1851):

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1\,2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3\,4 \\ 3\,4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 3\,4 \\ 1\,2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 3\,4 \end{Bmatrix}$$

$$= \{(1,1)\,(2,2) - (1,2)\,(2,1)\}\{(3,3)\,(4,4) - (3,4)\,(4,3)\}$$
$$- \{(1,3)\,(2,4) - (1,4)\,(2,3)\}\{(3,1)\,(4,2) - (3,2)\,(4,1)\}\,,$$

and in general:

$$\begin{Bmatrix} \overline{1_1\,2_1\,\ldots\ldots u_1} & \overline{1_2\,2_2\,\ldots\ldots u_2} \ldots\ldots & \overline{1_n\,2_n\,\ldots\ldots u_n} \\ 1_1\,2_1\,\ldots\ldots u_1 & 1_2\,2_2\,\ldots\ldots u_2 \ldots\ldots & 1_n\,2_n\,\ldots\ldots u_n \end{Bmatrix}$$

will denote the determinant

$$\Sigma \pm \left\{ \begin{matrix} 1_1\, 2_1 \,.....\, u_1 \\ 1_1\, 2_1 \,.....\, u_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1_2\, 2_2 \,.....\, u_2 \\ 1_2\, 2_2 \,.....\, u_2 \end{matrix} \right\} ..... \left\{ \begin{matrix} 1_n\, 2_n \,.....\, u_n \\ 1_n\, 2_n \,.....\, u_n \end{matrix} \right\}$$

$$\left| \begin{array}{cccc} \left\{ \begin{matrix} 1_1\, 2_1 \,.....\, u_1 \\ 1_1\, 2_1 \,.....\, u_1 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 1_1\, 2_1 \,.....\, u_1 \\ 2_2\, 2_2 \,.....\, u_2 \end{matrix} \right\} & .... & \left\{ \begin{matrix} 1_1\, 2_1 \,.....\, u_1 \\ 1_n\, 2_n \,.....\, u_n \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} 1_2\, 2_2 \,.....\, u_2 \\ 1_1\, 2_1 \,.....\, u_1 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 1_2\, 2_2 \,.....\, u_2 \\ 1_2\, 2_2 \,.....\, u_2 \end{matrix} \right\} & ..... & \left\{ \begin{matrix} 1_2\, 2_2 \,.....\, u_2 \\ 1_n\, 2_n \,....\, u_n \end{matrix} \right\} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \left\{ \begin{matrix} 1_n\, 2_n \,.....\, u_n \\ 1_1\, 2_1 \,.....\, n_1 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 1_n\, 2_n \,.....\, u_n \\ 1_2\, 2_2 \,.....\, u_n \end{matrix} \right\} & ..... & \left\{ \begin{matrix} 1_n\, 2_n \,.....\, u_n \\ 1_n\, 2_n \,.....\, u_n \end{matrix} \right\} \end{array} \right|$$

The *Order* of a compound determinant is the number of rows, horizontal or vertical, of determinants forming its constituents. Its *Class* is the degree of minority of its constituents, with respect to the matrix to which all the elementary constituents $(1,1)$, $(1,2)$, ... belong.

A compound determinant of the *first Class* and of the nth *Order* is one composed of all the first minors of the determinant formed by arranging all the constituents $(1,1)$, $(1,2)$, ... in a square array. And generally, a compound determinant of the ith class and jth order, with respect to a matrix of n rows, will be, when developed, of the degree

$$j(n-i).$$

Generally speaking, however, it resolves itself into two or more factors, each of which is an ordinary determinant, and the sum of whose degrees is $j(n-i)$.

A compound determinant of the ith class and of the

$$\mu = \frac{n(n-1).....(n-i+1)}{1.2.....i} \text{th},$$

order, with respect to a matrix of n rows, may be also called the *complete compound determinant of the* ith *class*, with respect to that Matrix; because it is composed of all the ith minors of the matrix.

If however the order of a compound determinant of the ith class, with respect to a matrix of n rows, be less than μ, the minors omitted may be called the *dropped groups* of the system.

A compound determinant may be also briefly expressed by writing within the brackets, not the numbers corresponding to the rows of each constituent

determinant, but those corresponding to the rows omitted. Thus the complete compound determinant of the first class may be written thus:

$$\left\{\binom{1}{1}\binom{2}{2}\cdots\cdots\binom{n}{n}\right\},$$

that of the *second* class, thus:

$$\left\{\binom{1\,2}{1\,2}\binom{1\,3}{1\,3}\cdots\cdots\binom{2\,3}{2\,3}\cdots\cdots\right\},$$

and generally that of the ith class:

$$\left\{\begin{pmatrix}1_1\,1_2\,\cdots\cdots\,1_i\\1_1\,1_2\,\cdots\cdots\,1_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2_1\,2_2\,\cdots\cdots\,2_i\\2_1\,2_2\,\cdots\cdots\,2_i\end{pmatrix}\cdots\cdots\begin{pmatrix}\mu_1\,\mu_2\,\cdots\cdots\,\mu_i\\\mu_1\,\mu_2\,\cdots\cdots\,\mu_i\end{pmatrix}\right\},$$

where

$$\mu=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-i+1)}{1.2\cdots\cdots i};$$

for, if it be convened that any expression such as

$$\binom{i}{j}$$

signifie, with respect to the determinant

$$\left\{\begin{matrix}1\;2\;\cdots\cdots\;u\\1\;2\;\cdots\cdots\;u\end{matrix}\right\},$$

that Minor in which the ith horizontal and jth vertical row has been omitted, the expression

$$\left\{\binom{1}{2}\binom{2}{2}\right\}$$

will signify

$$\begin{vmatrix}\binom{1}{1}\binom{1}{2}\\\binom{2}{1}\binom{2}{2}\end{vmatrix}$$

$$=\binom{1}{1}\binom{2}{2}-\binom{1}{2}\binom{2}{1}$$

$$=\left\{\begin{matrix}2\;3\;\cdots\cdots\;u\\2\;3\;\cdots\cdots\;u\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3\;4\;\cdots\cdots\;1\\3\;4\;\cdots\cdots\;1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}3\;4\;\cdots\cdots\;1\\2\;3\;\cdots\cdots\;u\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2\;3\;\cdots\cdots\;u\\3\;4\;\cdots\cdots\;1\end{matrix}\right\}.$$

And so on, generally, as in the notation first given.

It will sometimes be convenient to designate the complete compound determinant of each class by the same letter as the ordinary determinant with the addition of a suffix corresponding to its class; thus, the complete compound determinant of the ith class may be represented by the symbol

$$\nabla_i\,,$$

and the series of complete compound determinants by the series

$$\nabla_1\,,\ \nabla_2\,,\ \ldots\ldots\nabla_n\,,$$

of which, by its definition,

$$\nabla_n = \nabla\,,$$

since the uth minors of a determinant of the uth degree are the constituents themselves.

It is often convenient to use the symbols

$$\begin{array}{c} [1,1]\,[2,1]\ \ldots\ldots\ [n,1]\,, \\ [1,2]\,[2,2]\ \ldots\ldots\ [n,2]\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [1,n]\,[2,n]\ \ldots\ldots\ [n,n]\,, \end{array}$$

for those first minors of the determinant ∇, which in its expansion are the coefficients of the constituents

$$\begin{array}{c} (1,1)\,(1,2)\ \ldots\ldots\ (1,n)\,, \\ (2,1)\,(2,2)\ \ldots\ldots\ (2,n)\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n,1)\,(n,2)\ \ldots\ldots\ (n,n)\,, \end{array}$$

respectively. It will be noticed that the symbolical numbers in these systems are conjugate; the reason of which arrangement will appear from its application to linear equations. For, from the above definition it follows that the solutions of the system

$$\begin{array}{c} (1,1)x_1 + (1,2)x_2 + \ldots\ldots + (1,n)x_n = u_1\,, \\ (2,1)x_1 + (2,2)x_2 + \ldots\ldots + (2,n)x_n = u_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n,1)x_1 + (n,2)x_2 + \ldots\ldots + (n,n)x_n = u_n\,, \end{array}$$

will be

$$\begin{array}{c} \nabla x_1 = [1,1]u_1 + [1,2]u_2 + \ldots\ldots + [1,n]u_n\,, \\ \nabla x_2 = [2,1]u_1 + [2,2]u_2 + \ldots\ldots + [2,n]u_n\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nabla x_n = [n,1]u_1 + [n,2]u_2 + \ldots\ldots + [n,n]u_n\,, \end{array}$$

which are of the same form as the original equations. From this circumstance the system [1 1], [2,1], ····· is called the *System inverse* to (1,1), (1,2), ····· It will be seen presently the system ∇^{n-1} (1,1), ∇^{n-1} (1,2) ····· is the system inverse to [1,1], [2,1], ·····; so that, *à un facteur près*, the two first-mentioned systems are inverse to one another. In the same way two sets of linear equations, one of which consists of the solutions of the other, are said to be inverse, *à un facteur près*, to one another.

And first with respect to the inverse system, or system of first minors i. e. compound determinants of the first Class; from the law of formation as explained in (§. I.), the following system is a direct consequence:

$$\begin{array}{l}
(1,1)[1,1]+(1,2)[2,1]+..=\nabla,\ (1,1)[1,2]+(1,2)[2,2]+..=0,\ ..(1,1)[1,n]+(1,2)[2,n]+..=0,\\
(2,1)[1,1)+(2,2)[2,1]..+=0,\ (2,1)[1,2]+(2,2)[2,2]+..=\nabla,\ ..(2,1)[1,n]+(2,2)[2,n]+..=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(n,1)[1,1]+(n,2)[2,1]+..=0,\ (n,1)[1,2]+(n,2)[2,2]+..=0,\ ..(n,1)[1,n]+(n,2)[2,n]+..=\nabla,
\end{array}$$

where

$$\nabla=\left\{\begin{matrix}1\ 2\ \cdots\cdots\ n\\ 1\ 2\ \cdots\cdots\ n\end{matrix}\right\},$$

and forming the determinant of the expressions on the left hand sides of these equations, and also that of those on the right hand sides, and equating the results, it is found:

$$\left|\begin{matrix}
(1,1)[1,1]+(1,2)[2,1]+\cdots\cdots(1,1)[1,2]+(1,2)[2,2]+\cdots\cdots+(1,1)[1,n]+(1,2)[2,n]+\cdots\cdots\\
(2,1)[1,1]+(2,2)[2,2]+\cdots\cdots(2,1)[1,2]+(2,2)[2,2]+\cdots\cdots+(2,1)[1,n]+(2,2)[2,n]+\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(n,1)[1,1]+(n,2)[2,1]+\cdots\cdots(n,1)[1,2]+(n,2)[2,2]+\cdots\cdots+(n,1)[1,n]+(2,2)[2,n]+\cdots\cdots
\end{matrix}\right|$$

$$=\left|\begin{matrix}\nabla & * & \cdots\cdots & *\\ * & \nabla & \cdots\cdots & *\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ * & * & \cdots\cdots & \nabla\end{matrix}\right|,$$

or

$$\nabla\left|\begin{matrix}[1,1] & [1,2] & \cdots\cdots & [1,n]\\ [2,1] & [2,2] & \cdots\cdots & [2,n]\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ [2,1] & [n,2] & \cdots\cdots & [n,n]\end{matrix}\right|=\nabla^{n}.$$

Before proceeding to discuss the compound determinants of other orders of the first Class, it will be need to notice another series of theorems to which that above established belongs. It is a remarkable fact in the history of determinants

that most of the properties discovered at an early period where apparently of an isolated character; but have since been found tho belongs to chain of analogous properties, of which these first discovered formed the initial or final link. The property, of which we are now speaking, belongs in fact to two chains, according as it is written

$$\nabla\nabla_1 = \nabla^n,$$

or

$$(1.) \qquad \nabla_1 = \nabla^{n-1},$$

Considering, in the first place, the former of these expressions, we have by the Theorems of (§. I):

$$\nabla = \Sigma\pm\begin{Bmatrix}1\,2\,\ldots\ldots j\ldots\ldots i\\1\,2\,\ldots\ldots j\ldots\ldots i\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}(i+1)\,(i+2)\,\ldots\ldots n\\(i+1)\,(i+2)\,\ldots\ldots n\end{Bmatrix},$$

$$0 = \Sigma\pm\begin{Bmatrix}1\,2\,\ldots\ldots (i+k)\ldots\ldots i\\1\,2\,\ldots\ldots (i+k)\ldots\ldots i\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}(i+1)\,(i+2)\,\ldots\ldots n\\(i+1)\,(i+2)\,\ldots\ldots n\end{Bmatrix}.$$

Hence, forming all the

$$\mu = \frac{n(n-1)\,\ldots\ldots\,(n-i+1)}{1.\,2\,\ldots\ldots\,i},$$

minors of the form

$$\begin{Bmatrix}1\,2\,\cdots\cdots i\\1\,2\,\cdots\cdots i\end{Bmatrix},$$

and calling them

$$A_{11}\ ,\ A_{12}\ ,\ \cdots\cdots A_{1\mu}\,,$$

and also all the minors of the form

$$\begin{Bmatrix}(i+1)\,(i+2)\,\cdots\cdots n\\(i+1)\,(i+2)\,\cdots\cdots n\end{Bmatrix},$$

and calling them

$$B_{11}\ ,\ B_{12}\ ,\ B_{1\mu}\,,$$

and forming the system

$$\begin{array}{lll}\Sigma A_{1i}\,B_{1i} = \nabla\ , & \Sigma A_{2i}\,B_{1i} = 0\ , & \cdots\cdots \Sigma A_{\mu i}\,B_{1i} = 0,\\ \Sigma A_{1i}\,B_{2i} = 0\ , & \Sigma A_{2i}\,B_{2i} = \nabla\ , & \cdots\cdots \Sigma A_{\mu i}\,B_{2i} = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Sigma A_{1i}\,B_{\mu i} = 0\ , & \Sigma A_{2i}\,B_{\mu i} = 0\ , & \cdots\cdots \Sigma A_{\mu i}\,B_{\mu i} = \nabla,\end{array}$$

we have

$$\begin{vmatrix} \Sigma A_{1i}B_{1i} & \Sigma A_{2i}B_{1i} & \dots & \Sigma A_{\mu i}B_{1i} \\ \Sigma A_{1i}B_{2i} & \Sigma A_{2i}B_{2i} & \dots & \Sigma A_{\mu i}B_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma A_{1i}B_{\mu i} & \Sigma A_{2i}B_{\mu i} & \dots & \Sigma A_{\mu i}B_{\mu i} \end{vmatrix}$$

$$(2.) \quad = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1\mu} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{\mu 1} & A_{\mu 2} & \dots & A_{\mu\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1\mu} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{\mu 1} & B_{\mu 2} & \dots & B_{\mu\mu} \end{vmatrix} = \nabla^{\mu},$$

and consequently, by giving i all values from 1 to $\frac{1}{2}n$ or $\frac{1}{2}(n-1)$, according as n is even or odd, there will be a scale of relations of which that given in the first instance is but the initial or final one.

Proceeding to the compound determinant of the $(n-1)$ order and of the first class, we may use only the last $(n-1)$ vertical and horizontal rows of equations; then transposing the first terms and forming the determinants of both sides, we have

$$[1,1] \begin{vmatrix} [2,2] & [3,2] & \dots & [n,2] \\ [2,3] & [3,3] & \dots & [n,3] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [2,n] & [3,n] & \dots & [n,n] \end{vmatrix}$$
$$= \nabla^{n-1} - \nabla^{n-2}\{(2,1)[2,1] + (3,1)[3,1] + \dots\}$$
$$= \nabla^{n-2}(1,1)[1,1];$$

hence

$$\left\{\binom{2}{2}\binom{3}{3}\dots\binom{n}{n}\right\}$$
$$= \left\{\begin{matrix} \overline{3\,4\dots 1} & \overline{4\,5\dots 2} & \dots & \overline{1\,2\dots(n-1)} \\ 3\,4\dots 1 & 4\,5\dots 2 & \dots & 1\,2\dots(n-1) \end{matrix}\right\}$$

$$(3.) \quad = (1,1)\left\{\begin{matrix} 1\,2\dots n \\ 1\,2\dots n \end{matrix}\right\}^{n-2}.$$

Similarly there would be found

$$(4.) \quad \left\{\binom{2}{3}\binom{3}{4}\dots\binom{n}{1}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} \overline{3\,4\dots 1} & \overline{4\,5\dots 2} & \dots & \overline{1\,2\dots(n-1)} \\ 4\,5\dots 2 & 5\,6\dots 3 & \dots & 2\,3\dots n \end{matrix}\right\} = (1,2)\left\{\begin{matrix} 1\,2\dots n \\ 2\,3\dots 1 \end{matrix}\right\}^{n-2},$$

and so on for the whole system.

But this, as well as more general theorem, may be established almost upon inspection by adopting the formulae of (§. I) thus:

$$(5.) = \Sigma \pm \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \binom{i}{i} \binom{i+1}{i+1} \cdots \binom{n}{n} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} (i+1)(i+2) \ldots\ldots (i-1) \\ (i+1)(i+2) \ldots\ldots (i-1) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} (i+2)(i+3) \ldots\ldots i \\ (i+2)(i+3) \ldots\ldots i \end{matrix} \right\} \ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \ldots\ldots (n-1) \\ 1\,2 \ldots\ldots (n-1) \end{matrix} \right\} \end{array} \right. .$$

Now the row (vertical and horizontal) $i, i+1, \ldots\ldots n$, is omitted in these factors respectively; hence, if we suppose the whole set of constituents, arranged in one matrix, the order of the rows (vertical and horizontal) changed to the following

$$1, 2, \ldots\ldots n \quad ; \quad 1, 2, n \quad ; \quad \ldots\ldots 1, 2, \ldots\ldots (i-1),$$

and the grouping altered to the following:

$$(1, 2, \ldots\ldots n) \quad ; \quad (1, 2, \ldots\ldots n) \quad : \quad (1, 2, \ldots\ldots (i-1)),$$

the above determinant may be written thus:

$$\Sigma \pm \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \ldots\ldots n \\ 1\,2 \ldots\ldots n \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \ldots\ldots n \\ 1\,2 \ldots\ldots n \end{matrix} \right\} \ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \ldots\ldots (i-1) \\ 1\,2 \ldots\ldots (i-1) \end{matrix} \right\} .$$

But since there can be but the single factor of the form

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \ldots\ldots n \\ 1\,2 \ldots\ldots n \end{matrix} \right\},$$

under the sign Σ (for any other would involve a repetition of rows, and would consequently vanish); so that the determinant finally becomes

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \ldots\ldots n \\ 1\,2 \ldots\ldots n \end{matrix} \right\}^{n-i-2} \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \ldots\ldots (i-1) \\ 1\,2 \ldots\ldots (i-1) \end{matrix} \right\},$$

which, by putting

$$i-1 = 0 \quad , \quad 1, 2, \ldots\ldots (n-2),$$

gives the series of values for the compound determinants of the first-class and of the orders $n, n-1, \ldots\ldots 2$.

This may be written with a little more generality, so as to express the omission of any row horizontal or vertical, thus:

$$(6.)\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\left|\binom{n_i}{n_j}\binom{n_{i+1}}{n_{j+1}}\cdots\cdots\binom{n_n}{n_{j-i}}\right| \\ \left|\overline{\begin{matrix} n_{i+1} & n_{i+2} & \dots\dots & n_{i-1} \\ n_{j+1} & n_{j+2} & \dots\dots & n_{j-1}\end{matrix}} \quad \overline{\begin{matrix} n_{i+2} & n_{i+3} & \dots\dots & n_i \\ n_{j+2} & n_{j+3} & \dots\dots & n_j\end{matrix}} \;\dots\dots\; \overline{\begin{matrix} n_1 & n_2 & \dots\dots & n_{n-1} \\ n_{j-i+1} & n_{j-i+2} & \dots\dots & n_{j-i-1}\end{matrix}}\right| \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{matrix} n_1 & n_2 & \dots\dots & n_n \\ n_{j-i+1} & n_{j-i+2} & \dots\dots & n_{j-i}\end{matrix}\right|^{n-i-2} \left|\begin{matrix} n_1 & n_2 & n_2 & \dots\dots & n_{i-2} \\ n_{j-i+1} & n_{j-i-1} & n_{j-i+2} & \dots\dots & n_j\end{matrix}\right| .$$

This is the general formula for compound determinants of the first class; and giving i and j successively all values from 1 to $(n-1)$, we may deduce the whole theory of compound determinants of the *first* class, and of the degrees $(n-1), (n-2), \dots\dots 2, 1$ respectively.

Proceeding to compound determinants of the *second* class, we have for the complete determinant:

$$(7.)\left\{\begin{array}{l} \qquad \nabla_2 = \left\{\binom{1\ 2}{1\ 2}\binom{1\ 3}{1\ 3}\cdots\cdots\binom{2\ 3}{2\ 3}\cdots\cdots\right\} \\ = \left\{\overline{\begin{matrix} 3\ 4 \dots\dots n \\ 3\ 4 \dots\dots n\end{matrix}} \quad \overline{\begin{matrix} 2\ 4 \dots\dots n \\ 2\ 4 \dots\dots n\end{matrix}} \;\dots\dots\; \overline{\begin{matrix} 1\ 4 \dots\dots n \dots\dots \\ 1\ 4 \dots\dots n \dots\dots\end{matrix}}\right\}, \end{array}\right.$$

where the number of groups is

$$\frac{n(n-1)}{1.2},$$

and the number of constituents in each is $(n-2)$; hence the degree of the simple determinant to which it may be transformed, is $n\mu_2$, where

$$\mu_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2},$$

and, since each of the elementary constituents is used μ_2 times, the whole compound determinant will be:

$$(8.)\qquad = \left\{\begin{matrix} 1\ 2 \dots\dots n \\ 1\ 2 \dots\dots n\end{matrix}\right\}^{\mu_2}.$$

The subject of compound determinants of the second class here divides itself into two parts, according as any given row is, or is not, omitted more than once from the dropped groups. Suppose first, that no row is twice omitted; the determinant may then be thus expressed:

$$\left\{\binom{3\ 4}{3\ 4}\binom{5\ 6}{5\ 6}\cdots\cdots\binom{1\ 3}{1\ 3}\binom{2\ 4}{2\ 4}\cdots\cdots\right\} \left\{\begin{matrix} \overline{5\ 6 \dots\dots 1}\ \overline{7\ 8 \dots\dots 3} \dots\dots \overline{1\ 2 \dots\dots (n-2)} \\ 5\ 6 \dots\dots 1\ \ 7\ 8 \dots\dots 3 \dots\dots 1\ 2 \dots\dots (n-2)\end{matrix}\right\},$$

which will be equivalent to the former case, except that the first factor, instead of being

$$\left\{\begin{matrix} 1\ 2 \ldots\ldots n \\ 1\ 2 \ldots\ldots n \end{matrix}\right\},$$

will be deficient in the last $(n-2)$ rows, vertical and horizontal. The result will therefore be:

$$(9.)\qquad \left\{\begin{matrix} 1\ 2 \\ 1\ 2 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 1\ 2 \ldots\ldots n \\ 1\ 2 \ldots\ldots n \end{matrix}\right\}^{\mu_2-1};$$

and, as in the case of compound determinants of the first class, the general expression will be given by writing the numbers $1, 2, \ldots n$, as suffixes to n, instead of as elementary symbols.

Similarly, the omission of another of the constituent determinants, e. g.

$$\left\{\begin{matrix} 5\ 6 \ldots\ldots 1 \\ 5\ 6 \ldots\ldots 1 \end{matrix}\right\}$$

we should have:

$$\left\{\binom{5\ 6}{5\ 6}\binom{7\ 8}{7\ 8}\ldots\ldots\binom{1\ 3}{1\ 3}\binom{2\ 4}{2\ 4}\ldots\ldots\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} 7\ 8 \ldots\ldots 3 & 9\ 10 \ldots\ldots 5 & \ldots\ldots & 1\ 2 \ldots\ldots (n-2) \\ 7\ 8 \ldots\ldots 3 & 9\ 10 \ldots\ldots 5 & \ldots\ldots & 1\ 2 \ldots\ldots (n-2) \end{matrix}\right\},$$

which would be equivalent to the previous case, with the exception of the first factor, wanting all the rows but 3, 4; hence the determinant becomes:

$$(10.)\ \Sigma\pm\left\{\begin{matrix} 1\ 2 \\ 1\ 2 \end{matrix}\right\}\left\{\left\{\begin{matrix} 3\ 4 \\ 3\ 4 \end{matrix}\right\}\right\}\left\{\begin{matrix} 1\ 2 \ldots\ldots n \\ 1\ 2 \ldots\ldots n \end{matrix}\right\}^{\mu_2-2} = \left\{\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 1\ 2 \ldots\ldots n \\ 1\ 2 \ldots\ldots n \end{matrix}\right\}^{\mu_2-2},$$

which again may be made general by writing

$$n_1,\ n_2,\ n_2,$$

instead of $\qquad 1, 2, \ldots\ldots n.$

And generally, when no omitted row recurs in the dropped groups, the compound determinant of the ith order and second class will be:

$$(11.)\quad \begin{cases} \left\{\binom{2i+1\ \ 2i+2}{2i+1\ \ 2i+2}\binom{2i+3\ \ 2i+4}{2i+3\ \ 2i+4}\ldots\ldots\binom{1\ 3}{1\ 3}\binom{2\ 4}{2\ 4}\ldots\ldots\right\} \\ = \left\{\begin{matrix} 1\ 2 \ldots\ldots 2i \\ 1\ 2 \ldots\ldots 2i \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 1\ 2 \ldots\ldots n \\ 1\ 2 \ldots\ldots n \end{matrix}\right\}^{\mu_2-i} \end{cases}$$

Suppose, however, that one or more of the omitted rows recur; then

$$\nabla_2 = \left\{\binom{1\ 2}{1\ 2}\binom{1\ 3}{1\ 3}\ldots\ldots\binom{2\ 3}{2\ 3}\ldots\right\},$$

and

$$(12.)\quad \begin{cases} \left\{\begin{pmatrix}1\ 4\\1\ 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\ 5\\1\ 5\end{pmatrix}\cdots\cdots\begin{pmatrix}2\ 3\\2\ 3\end{pmatrix}\cdots\cdots\right\} = \left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\1\ 2\ 3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1\ 2\ \ldots\ldots\ n\\1\ 2\ \ldots\ldots\ n\end{matrix}\right\}^{\mu_2-2} \\ = (1,1)\left\{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\1\ 2\ 3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1\ 2\ \ldots\ldots\ n\\1\ 2\ \ldots\ldots\ n\end{matrix}\right\}^{\mu_2-2}. \end{cases}$$

Similarly:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\ 5\\1\ 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\ 6\\1\ 6\end{pmatrix}\cdots\cdots\begin{pmatrix}2\ 3\\2\ 3\end{pmatrix}\cdots\cdots\right\}$$

$$(1,1)^2\left\{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\1\ 2\ 3\ 4\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1\ 2\ \ldots\ldots\ n\\1\ 2\ \ldots\ldots\ n\end{matrix}\right\}^{\mu_2-3},$$

and generally

$$\left\{\begin{pmatrix}1\ \ i+1\\1\ \ i+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\ \ i+2\\1\ \ i+2\end{pmatrix}\cdots\cdots\begin{pmatrix}2\ 3\\2\ 3\end{pmatrix}\cdots\cdots\right\}$$

$$(13.)\quad (1,1)^{i-2}\left\{\begin{matrix}1\ 2\ \ldots\ldots\ i\\1\ 2\ \ldots\ldots\ i\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1\ 2\ \ldots\ldots\ n\\1\ 2\ \ldots\ldots\ n\end{matrix}\right\}^{\mu_2+i+1}$$

Again

$$(14.)\quad \left\{\begin{pmatrix}1\ 4\\1\ 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\ 5\\1\ 5\end{pmatrix}\cdots\cdots\begin{pmatrix}2\ 3\\2\ 3\end{pmatrix}\cdots\cdots\right\}\left\{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\1\ 2\ 3\end{matrix}\right\}^2\left\{\begin{matrix}1\ 2\ \ldots\ldots\ n\\1\ 2\ \ldots\ldots\ n\end{matrix}\right\}^{\mu_2-3};$$

and so on.

Again, the complete compound determinant of the ith class may be expressed thus:

$$\left\{\begin{pmatrix}1_1\ 1_2\ \ldots\ldots\ 1_i\\1_1\ 1_2\ \ldots\ldots\ 1_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2_1\ 2_2\ \ldots\ldots\ 2_i\\2_1\ 2_2\ \ldots\ldots\ 2_i\end{pmatrix}\cdots\cdots\begin{pmatrix}\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ldots\ \lambda_i\\\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ldots\ \lambda_i\end{pmatrix}\right\},$$

where

$$\lambda = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots\ldots i},$$

and this

$$\left\{\begin{matrix}1\ 2\ \ldots\ldots\ n\\1\ 2\ \ldots\ldots\ n\end{matrix}\right\}^{\mu_i},$$

where

$$\mu_i = \frac{i\lambda}{n} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots\ (i-1)};$$

similarly

$$(15.)\quad \begin{cases} \left\{\begin{pmatrix}2_1\ 2_2\ \ldots\ldots\ 2_i\\2_1\ 2_2\ \ldots\ldots\ 2_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3_1\ 3_2\ \ldots\ldots\ 3_i\\3_1\ 3_2\ \ldots\ldots\ 3_i\end{pmatrix}\cdots\cdots\begin{pmatrix}\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ldots\ \lambda_i\\\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ldots\ \lambda_i\end{pmatrix}\right\} \\ = \left\{\begin{matrix}1_1\ 1_2\ \ldots\ldots\ 1_i\\1_1\ 1_2\ \ldots\ldots\ 1_i\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1\ 2\ \ldots\ldots\ n\\1\ 2\ \ldots\ldots\ n\end{matrix}\right\}^{\mu_2-1}; \end{cases}$$

and so on. Other formulae may be written as required (Phil. Mag. April 1851.)

The following theorem, enunciated by Mr. *Sylvester*, seems to be all that need be added upon the subject:

$$\begin{Bmatrix} 1_1 1_2 \cdots 1_m 1_{m+1} \cdots 1_{m+n} & 2_1 2_2 \cdots 2_m 2_{m+1} \cdots 2_{m+n} & \cdots & \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m \mu_{m+1} \cdots \mu_{m+n} \\ 1_1 1_2 \cdots 1_m 1_{m+1} \cdots 1_{m+n} & 2_1 2_2 \cdots 2_m 2_{m+1} \cdots 2_{m+n} & \cdots & \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m \mu_{m+1} \cdots \mu_{m+n} \end{Bmatrix}$$

$$(16.)\quad \begin{Bmatrix} 1_{m+1}\ 1_{m+2} \cdots 1_{m+n} \\ 1_{m+1}\ 1_{m+2} \cdots 1_{m+n} \end{Bmatrix}^{\mu'} \begin{Bmatrix} 1_1\ 1_2 \cdots 1_{m+n} \\ 1_1\ 1_2 \cdots 1_{m+n} \end{Bmatrix}^{\mu''},$$

where

$$\mu = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots\ldots r},$$

$$\mu' = \frac{(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-r+1)}{1.2\ \ldots. r},$$

$$\mu'' = \frac{(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots\ldots(r-1)}.$$

In connexion with this fact of the subject, the following theorem is of importance. (*Sylvester*, *Cambridge* and *Dublin* Mathematical Journal, Feb. 1853.)

Let ${}^1A$ represent the line of terms ${}^1a_1, {}^1a_2, \cdots {}^1a_m$,
${}^1B$ . . . . ${}^1b_1, {}^1b_2, \cdots {}^1b_m$.

Let ${}^1A \times {}^1B$ represent $\Sigma({}^1a_r \times {}^1b_r)$, where of course there are r terms within the symbol of summation.

Again, let ${}^2A$ represent the line ${}^2a_1, {}^2a_2, \cdots {}^2a_m$,
${}^2B$ . . . . . . ${}^2b_1, {}^2b_2, \cdots {}^2b_m$,

and let $\frac{{}^1A}{{}^2A} \times \frac{{}^1B}{{}^2B}$ represent $\Sigma\left\{\begin{vmatrix} {}^1a_r, & a_s \\ {}^2a_r, & {}^1a_s \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} {}^1b_r, & {}^1b_s \\ {}^2b_r, & {}^2b_s \end{vmatrix}\right\}$,

$\begin{vmatrix} {}^1a_r, & {}^1a_s \\ {}^2a_r, & {}^2a_s \end{vmatrix}$ denoting the determinant $({}^1a_r . {}^2a_s - {}^1a_s . {}^2a_r)$,

$\begin{vmatrix} {}^1b_r, & {}^1b_s \\ {}^2b_r, & {}^2b_s \end{vmatrix}$ . . . . $({}^1b_r . {}^2b_s - {}^1b_s . {}^2b_r)$,

there will of course be $m.\frac{1}{2}(m-1)$ terms comprised within the sign of summation; and so, in general, let

$$\begin{vmatrix} {}^1A \\ {}^2A \\ {}^3A \\ \vdots \\ {}^mA \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} {}^1B \\ {}^2B \\ {}^3B \\ \vdots \\ {}^mB \end{vmatrix} \quad m \text{ being less than } n,$$

(and where in general ${}^rA$ denotes ${}^ra_1, {}^ra_2, \dots {}^ra_n$ and ${}^rB$ denotes ${}^rb_1, {}^rb_2, \dots {}^rb_n$) represent

$$\Sigma\left\{\begin{vmatrix} {}^1a_{k_1}, {}^1a_{k_2}, \dots {}^1a_{k_m} \\ {}^2a_{k_1}, {}^2a_{k_2}, \dots {}^2a_{k_m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ {}^ma_{k_1}, {}^ma_{k_2}, \dots {}^ma_{k_m} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} {}^1b_{k_1}, {}^1b_{k_2}, \dots {}^1b_{k_m} \\ {}^2b_{k_1}, {}^2b_{k_2}, \dots {}^2b_{k_m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ {}^mb_{k_1}, {}^mb_{k_2}, \dots {}^mb_{k_m} \end{vmatrix}\right\}$$

Now let (r) be any integer less than (m), and let

$$\mu = \frac{m.(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2\dots r},$$

and let $G_1, G_2, \dots G_\mu$ denote the μ rectangular matrices of the forms

$$\left.\begin{vmatrix} A_{\theta_1} \\ A_{\theta_2} \\ \dots \\ A_{\theta_r} \end{vmatrix}\right\} \text{respectively,}$$

and let $H_1, H_2, \dots H_\mu$ denote the μ rectangular matrices of the forms

$$\left.\begin{vmatrix} B_{\theta_1} \\ B_{\theta_2} \\ \dots \\ B_{\theta_r} \end{vmatrix}\right\} \text{respectively.}$$

Now form the determinant

$$\begin{matrix} G_1 \times H_1 & ; & G_1 \times H_2 \dots & ; & G_1 \times H & ; \\ G_2 \times H_1 & ; & G_2 \times H_2 \dots & ; & G_2 \times H_\mu & ; \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ G_\mu \times H_1 & ; & G_\mu \times H_2 \dots & ; & G_\mu \times H_\mu & ; \end{matrix}$$

then, if we give r the successive values $1, 2, 3 \dots m$, (in which last case the determinant in question reduces to a single term), the values of the determinant above written will be severally in the proportions of

$$K, K^m, K^{\frac{1}{2}m(m-1)}, \dots K^m, K;$$

that is to say, the logarithms of these several determinants will be as the coefficients of the binomial expression $(1+x)^m$.

When we make $r = m$, and equate the determinant corresponding to this value of r with that formed by making $r = 1$, the theorem becomes identical with a theorem previously given by M. *Cauchy*, for the product of rectangular Matrixes.

This, a direct corollary from the formula (16), when that formula is particularized by making

$$\left.\begin{matrix} a_{m+1} & , & a_{m+2} & , & \cdots\cdots a_{m+n} \\ b_{m+1} & , & b_{m+2} & , & \cdots\cdots b_{m+r} \end{matrix}\right\},$$

represent a determinant, all whose terms are zeros, except those which lie on the principal Diagonal, these latter being all units.

From this same theorem the ordinarv rule for the multiplication of determinants is an immediate consequence; as has been remarked by Mr. *Sylvester*. For let $m = n$, and

$$\left\}\begin{matrix} 1\ 2 \cdots\cdots 2p \\ 1\ 2 \cdots\cdots 2n \end{matrix}\right\{,$$

represent the determinant

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1n} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2n} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots\cdots & b_{nn} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots\cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

and the rule follows from inspection. Thus

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a \\ 0 & 1 & a' & b' \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

$$= \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a' \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & b' \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a' \\ \alpha' & \beta' & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & b' \\ \alpha' & \beta' & 0 \end{vmatrix} \end{matrix} \right\|$$

$$= \begin{vmatrix} a\,\alpha + a'\,\beta & b\,\alpha + b'\,\beta \\ a\,\alpha' + a'\,\beta & b\,\alpha' + b'\,\beta' \end{vmatrix}.$$

The same remark is also true even when $m = n$, if it be understood that, when two determinants of different degrees are to be multiplied together, rows are to be added to the determinant of the lower degree, sufficient in number to equalize the degrees, and consisting of zeros in all places, except on the principal diagonal, where units are to be written. Thus, if the determinants

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix},$$

are to be multiplied together, the second is to be written thus:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

The following Theorem is given by Dr. *Schläfli* in the „Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien. Math. Classe. Bd. IV. p. 52."

Let the determinant

$$\nabla = \begin{vmatrix} a & b & \ldots\ldots \\ a' & b' & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

be of the nth degree; and let the determinant formed from its first minors, be

$$\nabla_1 = \begin{vmatrix} A & B & \ldots\ldots \\ A' & B' & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}.$$

Furthermore, let

$$\Omega = \begin{vmatrix} a^r & b^r & \cdots\cdots & a^{r-1}b & \cdots\cdots \\ ra^{r-1}a' & rb^{r-1}b' & \cdots\cdots & (r-1)a^{r-2}a'b + a^{r-1}b' & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix},$$

the vertical rows of which consist of the several terms of

$$\begin{array}{l} (a + a' + \cdots\cdots)^r, \\ (b + b' + \cdots\cdots)^r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a + a' + \cdots\cdots)^{r-1}(b + b' + \cdots\cdots), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

respectively; and the horizontal of the several terms of

$$\begin{array}{l} (a + b + \cdots\cdots)^r, \\ (a' + b' + \cdots\cdots)^r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a + b + \cdots\cdots)^{r-1}(a' + b' + \cdots\cdots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

It is proposed to determine the value of Ω in terms of ∇. For this purpose form Ω_1 from ∇, thus:

$$\Omega_1 = \begin{vmatrix} A^r & B^r & \cdots\cdots & rA^{r-1}B & \cdots\cdots \\ A^{r-1}A' & B^{r-1}B' & \cdots\cdots & (r-1)A^{r-2}A'B + B^{r-1}B' & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}.$$

Then multiplying Ω and Ω_1 together by the usual formula, and remembering that

$$\begin{array}{ll} aA + bB + \cdots\cdots = \nabla, & aA' + bB' + \cdots\cdots = 0, \cdots\cdots \\ a'A + b'B + \cdots\cdots = 0, & a'A' + b'B' + \cdots\cdots = \nabla, \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

and also that

$$a^rA^r + b^rB^r + \cdots\cdots + ra^{r-1}A^{r-1}bB + \cdots\cdots$$
$$= (aA + bB + \cdots\cdots)^r \qquad = \nabla^r,$$
$$a^{r-1}A^{r-1}aA' + b^{r-1}B^{r-1}b'B' + \cdots\cdots + (r-1)a^{r-1}A^{r-2}A'B + a^{r-1}A^{r-1}bB' + \cdots$$
$$= (aA + bB + \cdots\cdots)^{r-1}(aA' + bB' + \cdots\cdots) \qquad = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$ra^{r-1}a'A^r + rb^{r-1}b'B^r + \cdots\cdots + \{(r-1)a^{r-2}a'b + a^{r-1}b'\}\, rA^{r-1}B + \cdots\cdots$$
$$= (aA + bB + \cdots\cdots)^{r-1}(a'A + b'B + \cdots\cdots) + (r-1)(\cdots\cdots)(\cdots\cdots) \quad = 0,$$
$$ra^{r-1}A^{r-1}a'A' + rb^{r-1}B^{r-1}b'B' + \cdots\cdots +$$
$$= (aA + bB + \cdots\cdots)^{r-1}(a'A' + b'B' + \cdots\cdots) + (r-1)(\cdots\cdots)(\cdots\cdots) \quad = \nabla^r,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so that
$$\Omega\Omega_1 = \begin{vmatrix} \nabla^r & * & \cdots & * \\ * & \nabla^r & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & \cdots & \nabla^r \end{vmatrix}$$

$$= \nabla^r \frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+r+1)}{1.\ 2\ldots\ldots r}$$

$$= \nabla \frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+r-1)}{1.\ 2\ldots\ldots(r-1)},$$

and, since ∇ is not resoluble into factors, Ω_1 must be some power of ∇; so that we may conclude from the degree of Ω_1:

$$\Omega = \nabla \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ (n+r-1)}{1.\ 2\ldots\ldots(r-1)}.$$

The manipulation of determinants may also be well exemplified by the means of linear equations, as follows, when

$$u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = 0 \quad , \quad u_i = 0.$$

The above equations give rise to the following:

$$\begin{array}{l} [i+1, i+1]u_{i+1} + [i+1, i+2]u_{i+2} + \cdots\cdots + [i+1, n]u_n = \nabla, \\ [i+2, i+1]u_{i+1} + [i+2, i+2]u_{i+2} + \cdots\cdots + [i+2, n]a_n = \nabla, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [n, i+1]u_{i+1} \ + \ [n, i+2]u_{i+2} \ + \cdots\cdots + \ [n, n]u_n \quad = \nabla. \end{array}$$

Whence also the inverse system:

$$\begin{vmatrix} [i+1, i+1] & [i+1, i+2] & \cdots\cdots & [i+1, n] \\ [i+2, i+1] & [i+2, i+2] & \cdots\cdots & [i+2, n] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [n, i+1] & [n, i+2] & \cdots\cdots & [n, n] \end{vmatrix} u_{i+1}$$

$$= \nabla \begin{vmatrix} [i+2, i+2] & [i+2, i+3] & \cdots\cdots & [i+2, n] \\ [i+3, i+2] & [i+3, i+3] & \cdots\cdots & [i+3, n] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [n, i+2] & [n, 1+3] & \cdots\cdots & [n, n] \end{vmatrix} x_{i+1} + \cdots\cdots,$$

Now writing the first i equations of the given systems thus:

$$\begin{array}{l}
(1,1)x_1+(1,2)x_2+\cdots\cdots+(1,i)x_i = -(1,i+1)x_{i+1}-\cdots\cdots-(1,n)x_n \\
(2,1)x_1+(2,2)x_2+\cdots\cdots+(2,i)x_i = -(2,i+1)x_{i+1}-\cdots\cdots-(2,n)x_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(i,1)x_1+(i,2)x_2+\cdots\cdots+(i,i)x_i = -(i,i+1)x_{i+1}-\cdots\cdots-(i,n)x_n\,,
\end{array}$$

there may be deduced:

$$\left|\begin{array}{cccc}
(1,2) & (1,3) & \ldots\ldots & (1,1) \\
(2,2) & (2,2) & \ldots\ldots & (2,1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(i,2) & (i,3) & \ldots\ldots & (i,1)
\end{array}\right| x_1 = -\left|\begin{array}{cccc}
(1,i+1) & (1,3) & \ldots\ldots & (1,1) \\
(2,i+1) & (2,3) & \ldots\ldots & (2,1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(i,i+1) & (i,3) & \ldots\ldots & (i,1)
\end{array}\right| x_{i+1}-\ldots\ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left|\begin{array}{cccc}
(1,i) & (1,1) & \ldots\ldots & (1,i-1) \\
(2,i) & (2,1) & \ldots\ldots & (2,i-1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(i,i) & (i,1) & \ldots\ldots & (i,i-1)
\end{array}\right| x_i = -\left|\begin{array}{cccc}
(1,i+1) & (1,1) & \ldots\ldots & (1,i-1) \\
(2,i+1) & (2,1) & \ldots\ldots & (2,i-1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(i,i+1) & (i,1) & \ldots\ldots & (i,i-1)
\end{array}\right| x_{i+1}-\ldots\ldots$$

or

$$\left\{\begin{array}{l}1,2,\ldots\ldots i \\ 1\;\;2\;\;\ldots\ldots i\end{array}\right\} x_1 = \pm\left|\begin{array}{cccc}
(1,2) & (1,3) & \ldots\ldots & (1,i+1) \\
(2,2) & (2,3) & \ldots\ldots & (2,i+1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(i,2) & (i,3) & \ldots\ldots & (i,i+1)
\end{array}\right| x_{i+1}\ldots\ldots,$$

$$\left\{\begin{array}{l}1,2,\ldots\ldots i \\ 1\;\;2\;\;\ldots\ldots i\end{array}\right\} x_2 = \left|\begin{array}{cccc}
(1,3) & (1,4) & \ldots\ldots & (1,1) \\
(2,3) & (2,4) & \ldots\ldots & (2,1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(i,3) & (i,4) & \ldots\ldots & (i,i)
\end{array}\right| x_{i+1}\ldots\ldots,$$

$$\left\{\begin{array}{l}1,2,\ldots\ldots i \\ 1\;\;2\;\;\ldots\ldots i\end{array}\right\} x_i = \pm\left|\begin{array}{cccc}
(1,i+1) & (1,1) & \ldots\ldots & (1,i-1) \\
(2,i+1) & (2,1) & \ldots\ldots & (2,i-1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(i,i+1) & (i,1) & \ldots\ldots & (i,i-1)
\end{array}\right| x_{i+1}$$

so that

$$\begin{aligned}
u_{i+1} &= (i+1,1)x_1+(i+1,2)x_2+\cdots\cdots+(i+1,i+1)x_{i+1}+\cdots\cdots \\
&= \left\{\begin{array}{l}1\;2\;\ldots\ldots\;i \\ 1\;2\;\ldots\ldots\;i\end{array}\right\}^{-1}\left\{\begin{array}{l}1\;2\;\ldots\ldots\;(i+1) \\ 1\;2\;\ldots\ldots\;(i+1)\end{array}\right\} x_{i+1}+\cdots\cdots
\end{aligned}$$

and consequently, substituting in the former expression for u_{i+1} and equating the coefficients of x_{i+1}:

$$\left|\begin{array}{cccc}
[i+1,i+1] & [i+1,i+2] & \ldots\ldots & [i+1,n] \\
[i+2,i+1] & [i+2,i+2] & \ldots\ldots & [i+2,n] \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
[n,i+1] & [n,i+2] & \ldots\ldots & [n,n]
\end{array}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} [i+2,i+2] & [i+2,i+3] & \ldots\ldots & [i+2,n] \\ [i+3,i+2] & [i+3,i+3] & \ldots\ldots & [i+3,n] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [n,i+2] & [n,i+3] & \ldots\ldots & [n,n] \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 1,2,\ldots\ldots n \\ 1\,2\ldots\ldots n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,2,\ldots\ldots i \\ 1\,2\ldots\ldots i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,2,\ldots\ldots(i+1) \\ 1\,2\ldots\ldots(i+1) \end{Bmatrix}^{-1},$$

and similarly performing this method of reduction (j) times, it would at length be found that

$$\begin{vmatrix} [i+1,i+1] & [i+1,i+2] & \ldots\ldots & [i+1,n] \\ [i+2,i+1] & [i+2,i+2] & \ldots\ldots & [i+2,n] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [n,i+1] & [n,i+2] & \ldots\ldots & [n,n] \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} [i+j+1,i+j+1] & [i+j+1,i+j+2] & \ldots\ldots & [i+j+1,n] \\ [i+j+2,i+j+1] & [i+j+2,i+j+2] & \ldots\ldots & [i+j+2,n] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [n,i+j+1] & [n,i+j+2] & \ldots\ldots & [n,n] \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 12\ldots\ldots n \\ 12\ldots\ldots n \end{Bmatrix}^{j} \begin{Bmatrix} 12\ldots\ldots i \\ 12\ldots\ldots i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 12\ldots\ldots(i+j) \\ 12\ldots\ldots(i+j) \end{Bmatrix}^{-1}$$

This formula includes, as a particular case, M. *Jacobi's* theorem, viz. if

$$i+j+1=n,$$

then

$$\begin{vmatrix} [i+1,i+1] & [i+1,i+2] & \ldots & [i+1,n] \\ [i+2,i+1] & [i+2,i+2] & \ldots & [i+2,n] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [n,i+1] & [n,i+2] & \ldots & [n,n] \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 12\ldots n \\ 12\ldots n \end{Bmatrix}^{n-i-1} \cdot \begin{Bmatrix} 12\ldots i \\ 12\ldots i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 12\ldots(n-1) \\ 12\ldots(n-1) \end{Bmatrix}^{-1} [n,n]$$

$$= \begin{Bmatrix} 12\ldots n \\ 12\ldots n \end{Bmatrix}^{n-i-1} \cdot \begin{Bmatrix} 12\ldots i \\ 12\ldots i \end{Bmatrix}$$

There is a large class of determinants whose constituents satisfy the conditions

$$\begin{matrix} * & (1,2)=(2,1), & \ldots\ldots & (1,n)=(n,1) \\ (2,1)=(1,2), & * & \ldots\ldots & (2,n)=(n,2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1)=(1,n), & (n,2)=(2,n), & \ldots\ldots & * \end{matrix}$$

and it is observable that, by taking the system of conditions between (1,1), (1,2)..., and [1,1], [1,2],..... given in the early part of this section, and omitting those lying upon the diagonal, there may be deduced:

$$\begin{matrix} [1,1] : [1,2] : \ldots\ldots [1,n] = [1,1] : [2,1] : \ldots\ldots [n,1] \\ : [2,1] : [2,2] : \ldots\ldots [2,n] \quad : [1,2] : [2,2] : \ldots\ldots [n,2] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ : [n,1] : [n,2] : \ldots\ldots [n,n] \quad : [1,n] : [2,n] : \ldots\ldots [n,n] \end{matrix}$$

or

$$\begin{array}{cccc} * & [1,2]=[2,1], & \ldots\ldots & [1,n]=[n,1] \\ [2,1]=[1,2], & * & \ldots\ldots & [2,n]=[n,2] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [n,1]=[1,n], & [n,2]=[2,n], & \ldots\ldots & * \end{array}$$

It is perhaps worth while to write down the developments of the determinants belonging to this class for the cases $n=3$ and $n=4$. These are as follows: for $n=3$,

$$(1,1)(2,2)(3,3)-(1,1)(2,3)^2-(2,2)(3,1)^2-(3,3)(1,2)^2+2(2,3)(3,1)(1,2),$$

and for $n=4$,

$$\begin{array}{c} (1,1)\,(2,2)\,(3,3)\,(4,4) \\ -(2,2)\,(3,3)\,(1,4)^2-(3,3)\,(1,1)\,(2,4)^2-(1,1)\,(2,2)\,(3,4)^2 \\ -(1,1)\,(4,4)\,(2,3)^2-(2,2)\,(4,4)\,(3,1)^2-(3,3)\,(4,4)\,(1,2)^2 \\ +\;(2,3)^2\,(1,4)^2\;+\;(3,1)^2\,(2,4)\;+\;(1,2)^2\,(3,4)^2 \\ -2\{(1,2)\,(1,3)\,(4,2)\,(4,3)+(2,3)\,(2,1)\,(4,3)\,(4,1)+(3,1)\,(3,2)\,(4,1)\,(4,2)\} \\ +2(1,1)\,(2,3)\,(2,4)\,(3,4) \\ +2(2,2)\,(3,1)\,(3,4)\,(1,4) \\ +2(3,3)\,(1,2)\,(1,4)\,(2,4) \\ +2(4,4)\,(2,3)\,(3,1)\,(1,2). \end{array}$$

The equation to a cone, or other surface of the second order, may now be expressed in the same form as that to the reciprocal cone; for, adopting a usual notation, let

$$\mathfrak{A}=[1,1]\quad,\quad\mathfrak{B}=[2,2]\quad,\quad\mathfrak{C}=[3,3]$$
$$\mathfrak{F}=[2,3]=[3,2]\quad,\quad\mathfrak{G}=[3,1]=[1,3]\quad,\quad\mathfrak{H}=[1,2]=[2,1],$$

the equation to the reciprocal cone will be

$$\mathfrak{A}\xi^2+\mathfrak{B}\eta^2+\mathfrak{C}\zeta^2+2(\mathfrak{F}\eta\zeta+\mathfrak{G}\zeta\xi+\mathfrak{H}\xi\eta=0,$$

so that unless

$$\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}=0,$$

a process, similar to that employed in §. III, will give for the equation to the cone reciprocal to that above given, i. e. to the original cone:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{H} & \mathfrak{G} & x \\ \mathfrak{H} & \mathfrak{B} & \mathfrak{F} & y \\ \mathfrak{G} & \mathfrak{F} & \mathfrak{C} & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

As an example, let it be proposed to investigate the conditions that the roots of the equation

$$\begin{vmatrix} (1,1)-\theta & (1,2) & \cdots\cdots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2)-\theta & \cdots\cdots & (2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1) & (n,2) & \cdots\cdots & (n,n)-\theta \end{vmatrix} = 0,$$

(in which it is supposed that $(1,1) = (2,1) \cdots\cdots$) shall be all positive. By what has been shown before, this equation may be resolved into systems of the following form:

$$\begin{aligned} (1,1)x_1 + (1,2)x_2 + \cdots\cdots + (1,n)x_n &= \theta_1 x_1 , \\ (2,1)x_1 + (2,2)x_2 + \cdots\cdots + (2,n)x_n &= \theta_1 x_2 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n,1)x_1 + (n,2)x_2 + \cdots\cdots + (n,n)x_n &= \theta_1 x_n , \end{aligned}$$

where θ_1 is a root of the given equation; the other systems being formed by writing, $y_1, y_2, \cdots\cdots y_n, \theta_2 \cdots\cdots$ successively for $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n, \theta_1 \cdots\cdots$ And if the systems of variables $x, y, \cdots\cdots$ be subject to the conditions

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2 &= 1 , \\ y_1^2 + y_2^2 + \cdots\cdots + y_n^2 &= 1 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

the following equations may be formed:

$$\begin{aligned} (1,1)x_1^2 + \cdots\cdots + 2(1,2)x_1 x_2 + \cdots\cdots &= \theta_1 , \\ (1,1)y_1^2 + \cdots\cdots + 2(1,2)y_1 y_2 + \cdots\cdots &= \theta_2 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$\theta_1, \theta_2, \cdots$ being the roots of the given equation. The following inverse systems may be easily formed;

$$\begin{aligned} [1,1]x_1 + [1,2]x_2 + \cdots\cdots + [1,n]x_n &= \Theta_1 x_1 \\ [2,1]x_1 + [2,2]x_2 + \cdots\cdots + [2,n]x_n &= \Theta_1 x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [n,1]x_1 + [n,2]x_2 + \cdots\cdots + [n,n]x_n &= \Theta_1 x_n \\ [1,1]x_1^2 + \cdots\cdots + 2[1,2]x_1 x_2 + \cdots\cdots &= \Theta_1 \\ [1,1]y_1^2 + \cdots\cdots + 2[1,2]y_1 y_2 + \cdots\cdots &= \Theta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \end{aligned}$$

where

$$\Theta_i = \frac{|1,2,\ldots.n|}{\theta^i};$$

and similarly, by using the expressions $[1,1]_i$, $[1,2]_i$, ..., $|1,2,\ldots.i|$, there might be formed the inverse systems when $(n-i)$ of the variables are equated to zero, and i out of the n variables are selected for the transformation.

Now since one condition of the problem is obviously

$$|1,2,\ldots.n| > 0,$$

it will be sufficient for the present purpose to determine the relations among the coefficients, in order that the above systems of quadratic functions, or those formed when i variables only are used, may remain positive for all values of the variables. And since the n variables x_1, x_2, ... x_n, are subject to only two conditions, $(n-2)$ of them will remain independent, and if all the groups of $(n-2)$ be successively equated to zero, there will result a series of conditions, of which the following is one:

$$(1,1)x_1^2 + (2,2)x_2^2 + 2(1,2)x_1x_2 > 0;$$

these give rise to a series of conditions among the coefficients, of which the following is one,

$$|1,2| > 0.$$

The inverse system in the case of two variables presents no new feature; but if the inverse system be formed with three variables, and one of them be then equated to zero, there will be formed with x_1, x_2, x_3, the following system of conditions:

$$[2,2]_3x_2^2 + [3,3]_3x_3^2 + 2[2,3]_3x_2x_3 > 0,$$
$$[3,3]_3x_3^2 + [1,1]_3x_1^2 + 2[3,1]_3x_3x_1 > 0,$$
$$[1,1]_3x_1^2 + [2,2]_3x_2^2 + 2[1,2]_3x_1x_2 > 0,$$

whence also the following:

$$(1,1)|1,2,3| > 0 \quad , \quad (2,2)|1,2,3| > 0 \quad , \quad (3,3)|1,2,3| > 0,$$

with similar conditions for all the other ternary combinations of the variables.

Again, with x_1, x_2, x_3, x_4, there would be formed six conditions, of which the following is one:

$$[1,1]_4x_1^2 + [2,2]_4x_2^2 + 2[1,2]_4x_1x_2 > 0;$$

there would be thence deduced:

$$|2,3|\,|1,2,3,4|\,| > 0\ ,\quad |3,1|\,|1,2,3,4| > 0\ ,\quad |1,2|\,|1,2,3,4| > 0\ ,$$
$$|1,4|\,|1,2,3,4|\,| > 0\ ,\quad |2,4|\,|1,2,3,4| > 0\ ,\quad |3,4|\,|1,2,3,4| > 0\ .$$

But, on account of the conditions found in the case of two variables, these are equivalent to only one, viz.

$$|1,2,3,4| > 0\ ,$$

with similar conditions for all the other quaternary combinations of the variables.

Similarly, the next series of conditions would contain the following:

$$|1,2,3|\,|1,2,3,4,5| > 0\ ,$$

which, by what has gone before, is equivalent to

$$(1,1)\,|1,2,3,4,5| > 0\ ;$$

and similarly for all the other conditions belonging to this group. And hence generally, i being any positive whole number, there will be a series of conditions, of which the following form a pair,

$$|1,2,\cdots\cdots 2i| > 0,$$
$$(1,1)\,|1,2,\cdots\cdots 2i\pm 1| > 0\ ;$$

the number of conditions in these cases will be respectively

$$\Sigma_1 \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-2i+1)}{1,2\cdots\cdots(2i)} = 2^n - 1\ ,$$

and

$$\Sigma_1 (2i\pm 1)\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-(2i\pm 1)+1)}{1,2\cdots\cdots(2i\pm 1)} = 2^n - 1\ ,$$

and the whole system of conditions may consequently be comprised under the two general formulae,

$$\begin{vmatrix} (k_1,k_1) & (k_1,k_2) & \cdots\cdots & (k_1,k_{2i}) \\ (k_2,k_1) & (k_2,k_2) & \cdots\cdots & (k_2,k_{2i}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (k_{2i},k_1) & (k_{2i},k_2) & \cdots\cdots & (k_{2i},k_{2i}) \end{vmatrix} > 0,\quad (k_j,k_j)\begin{vmatrix} (k_1,k_1) & (k_1,k_2) & \cdots\cdots & (k_1,k_{2i\pm 1}) \\ (k_2,k_1) & (k_2,k_2) & \cdots\cdots & (k_2,k_{2i\pm 1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (k_{2i\pm 1},k_1) & (k_{2i\pm 1},k_2) & \cdots\cdots & (k_{2i\pm 1},k_{2i\pm 1}) \end{vmatrix} > 0,$$

j being any number comprised between the limits 1 and $(2i\pm 1)$ inclusively.

§. XI.

Miscellaneous instances of Determinants.

Beside the instances given in the preceeding pages, there are many others in which determinants occur, and to which their properties are consequently ap- cable. A few of these are here subjoined by way of illustration.

The symmetry of an expression, which is at first sight not apparent, may often be put *en evidence* by means of a determinant; thus, e. g.

$$1+ab-ad-b_1c_1-d_1c+bb_1a_1c-bb_1ac_1+dab_1c_1-da_1b_1c$$
$$=\begin{vmatrix} 1 & d & b & 0 \\ a & 1 & 0 & c \\ a_1 & 0 & 1 & c_1 \\ 0 & d_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Let u and v be any functions of any variable x; and let

$$\frac{d^iu}{dk^i}=u^{(i)}\ ,\quad \frac{d^iv}{dk^i}=v^{(i)},$$
$$\frac{d^i}{dk^i}\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)^{(i)}$$

Then the latter expression may be thrown into the form of a determinant, thus:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\begin{vmatrix} v & v' \\ u & u' \end{vmatrix} v^{-2}$$

$$-\left(\frac{u}{v}\right)''=\begin{vmatrix} 0 & v & 2v' \\ v & v' & v'' \\ u & u' & u'' \end{vmatrix} v^{-3}$$

$$(-)^2\left(\frac{u}{v}\right)'''=\begin{vmatrix} 0 & 0 & v & 3v' \\ 0 & v & 2v' & 3v'' \\ v & v' & v'' & v''' \\ u & u' & u'' & u''' \end{vmatrix} v^{-4}$$

$$(-)^3\left(\frac{u}{v}\right)'''' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & v & 4v' \\ 0 & 0 & v & 3v' & 6v'' \\ 0 & v & 2v' & 3v'' & 4v''' \\ v & v' & v'' & v''' & v''' \\ u & u' & u'' & u''' & u''' \end{vmatrix}$$

....

$$(-)^{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{(n)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & v & (n,1)\,v' \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\,(n-1,1) & v' & (n,2)\,v' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v & v' & \cdots\cdots & v^{(n-2)} & v^{(n)} \\ u & u' & \cdots\cdots & u^{(n-1)} & u^{(n)} \end{vmatrix} v^{-(n+1)},$$

where

$$(i,j) = \frac{i(i-1)\ldots\ldots(i-j+1)}{1.2\ldots\ldots j}$$

The improper continued fraction

$$\frac{1}{A-}\frac{1}{B-}\frac{1}{C-}\cdots \qquad = \frac{d}{dA}\log_e\nabla\,,$$

where

$$\nabla = \begin{vmatrix} A & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & M & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & N \end{vmatrix}$$

in which any number of rows may be taken at pleasure, and the formula will give the corresponding convergent fraction.

The same holds good for the continued fraction

$$\frac{1}{A+}\frac{1}{B+}\cdots$$

if we write

$$\begin{aligned} \nabla = \;& A \quad\; 1 \quad 0 \ldots\ldots \\ & -1 \quad B \quad 1 \ldots\ldots \\ & \;\;0 \;\; -1 \quad C \cdot\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Let $1, i_1, i_2, \ldots\ldots i_n$ be the $(n+1)$ roots of the equation

$$x^{n+1} - 1 = 0\,,$$

then, whatever be the values of

$$A\,,\; A_1\,,\; \ldots\ldots\; A_n:$$

$$\begin{vmatrix} A & A_1 & \ldots\ldots & A_n \\ A_1 & A_2 & \ldots\ldots & A \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n & A & \ldots\ldots & A_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (A + A_1 + \ldots\ldots + A_n) \\ &\times (A + i_1 A_1 + \ldots\ldots + i_1^n A_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\times (A + i_n A_1 + \ldots\ldots + i_n^n A_n)\,. \end{aligned}$$

Any function of two variables, e. g.

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots\ldots \pm a_n y^n = U\,,$$

may be thus expressed:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots\ldots & a_n \\ y & x & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & y & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & x \end{vmatrix}$$

and consequently, if

$$U = 0\,,$$

the following equations may be satisfied:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + \xi_{11} y + 0 + \ldots\ldots + 0 \\ 0 &= a_1 + \xi_{11} x + \xi_{22} y + \ldots\ldots + 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= a_n + 0 + 0 + \ldots\ldots + \xi_{nn} x\,; \end{aligned}$$

or, as they may be written,

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + \xi_{11} y + 0 \\ 0 &= a_1 + \xi_{22} y + \xi_{nn} x \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= a_n + 0 + \xi_{nn} x\,, \end{aligned}$$

whence, eliminating x, y, we have the system of determinants

$$\begin{Vmatrix} a_0\ a_1 \cdots\cdots a_n \\ \xi_1\ \xi_2 \cdots\cdots 0 \\ 0\ \xi_1 \cdots\cdots \xi_n \end{Vmatrix} = 0\ ,$$

and consequently, in any investigations, a system of quadratic functions of n variables as defined by the last expression, may be substituted for a function of the nth degree of 2 variables.

This worth remarking that, not only the equations

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$
$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

can be represented as determinants thus:

$$\begin{vmatrix} 1\ 0\ 0\ \alpha \\ 0\ 1\ 0\ \beta \\ 0\ 0\ 1\ \gamma \\ \alpha\ \beta\ \gamma\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1\ 0\ 0\ \alpha \\ 0\ 1\ 0\ \beta \\ 0\ 0\ 1\ \gamma \\ a\ b\ c\ 0 \end{vmatrix},$$

but the entire system to which they belong, can be represented as the various minors of a single determinant.

Thus in the case of two variables

$$\begin{vmatrix} 1\ 0\ a\ \alpha \\ 0\ 1\ b\ \beta \\ a\ b\ 1\ 0 \\ \alpha\ \beta\ 0\ 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - a^2 - b^2 - \alpha^2 - \beta^2 + (a\beta - \alpha b)^2,$$

writing

$$\nabla = a\beta - \alpha b,$$

the system of minors becomes

$$\begin{array}{cccc} b^2 + \beta^2 - 1 & ab + \alpha\beta & a - \nabla\beta & \alpha - \nabla b, \\ ab + \alpha\beta & a^2 + \alpha^2 - 1 & b - \nabla\alpha & \beta - \nabla a, \\ a - \nabla\beta & b - \nabla\alpha & \alpha^2 + \beta^2 - 1 & a\alpha + b\beta, \\ \alpha - \nabla b & \beta - \nabla a & a\alpha + b\beta & a^2 + b^2 - 1. \end{array}$$

The original determinant being symmetrical, the inverse system is so also; and in order that all the minors may vanish, it will be sufficient that three, not more than two of which lie on the same row, shall vanish. Thus we come back to the well known fact that, if

$$a^2+\alpha^2 = 1 \quad , \quad b^2+\beta^2 = 1$$
$$ab+\alpha\beta = 0,$$

then also

$$a^2+b^2 = 1 \quad , \quad \alpha^2+\beta^2 = 1$$
$$a\alpha+b\beta = 0,$$

and

$$a = \nabla\beta \quad , \quad \alpha = \nabla b$$
$$b = \nabla\alpha \quad , \quad \beta = \nabla a$$
$$\nabla = \pm 1.$$

Again, in the case of three variables:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & a & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & b & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & c & c_1 & c_2 \\ a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

the system of first minors of this determinant is as follows; the coefficients of

$$(1,1) = 1-b^2-b_1^2-b_2^2-c^2-c_1^2-c_2^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2+(b_2c-bc_2)^2+(bc_1-b_1c)^2$$
$$(1,2) = (ab+a_1b_1+a_2b_2)\,(c^2+c_1^2+c_2^2-1)-(bc+b_1c_1+b_2c_2)\,(ac+a_1c_1+a_2c_2)$$
$$(1,3) = (ac+a_1c_1+a_2c_2)\,(b^2+b_1^2+b_2^2-1)-(bc+b_1c_1+b_2c_2)\,(ab+a_1b_1+a_2b_2)$$
$$(1,4) = \nabla(b_1c_2-b_2c_1)+a(1-b^2-b_1^2-b_2^2-c^2-c_1^2-c_2^2)+b(ab+a_1b_1+a_2b_2)+c(ac+a_1c_1+a_2c_2)$$
$$(1,5) = \nabla(b_2c-bc_2)+a_1(1-b^2-b_1^2-b_2^2-c^2-c_1^2-c_2^2)+b_1(ab+a_1b_1+a_2b_2)+c_1(ac+a_1c_1+a_2c_2)$$
$$(1,6) = \nabla(bc_1-b_1c)+a_2(1-b^2-b_1^2-b_2^2-c^2-c_1^2-c_2^2)+b_2(ab+a_1b_1+a_2b_2)+c_2(ac+a_1c_1+a_2c_2),$$

$$(2,1) = (ba+b_1a_1+b_2a_2)\,(c^2+c_1^2+c_2^2-1)-(ca+c_1a_1+c_2a_2)\,(bc+b_1c_1+b_2c_2)$$
$$(2,2) = (1-c^2-c_1^2-c_2^2-a^2-a_1^2-a_2^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(c_2a-ca_2)^2+(ca_1-c_1a)^2$$
$$(2,3) = (bc+b_1c_1+b_2c_2)\,(a^2+a_1^2+a_2^2-1)-(ac+a_1c_1+a_2c_2)\,(ba+b_1a_1+b_2a_2)$$
$$(2,4) = \nabla(c_1a_2-c_2a_1)+b(1-c^2-c_1^2-c_2^2-a^2-a_1^2-a_2^2)+c(bc+b_1c_1+b_2c_2)+a(ba+b_1a_1+b_2a_2)$$
$$(2,5) = \nabla(c_2a-ca_2)+a_1(ba+b_1a_1+b_2a_2)+b_1(1-c^2-c_1^2-c_2^2-a^2-a_1^2-a_2^2)-c_1(bc+b_1c_1+b_2c_2)$$
$$(2,6) = \nabla(ca_1-c_1a)+a_2(ba+b_1a_1+b_2a_2)+b_2(1-c^2-c_1^2-c_2^2-a^2-a_1^2-a_2^2)+c_2(bc+b_1c_1+b_2c_2),$$

$$(3,1) = (ca+c_1a_1+c_2a_2)\,(b^2+b_1^2+b_2^2-1)-(ba+b_1a_1+b_2a_2)\,(cb+c_1b_1+c_2b_2)$$
$$(3,2) = (cb+c_1b_1+c_2b_2)\,(a^2+a_1^2+a_2^2-1)-(ab+a_1b_1+a_2b_2)\,(ca+c_1a_1+c_2a_2)$$
$$(3,3) = 1-a^2-a_1^2-a_2^2-b^2-b_1^2-b_2^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2+a_2b-ab_2)^2+(ab_1-a_1b)^2$$

$$(3,4) = \nabla(a_1b_2-a_2b_1)+a(ca+c_1a_1+c_2a_2)+c(1-a^2-a_1^2-a_2^2-b^2-b_1^2-b_2^2)+b(cb+c_1b_1+c_2b_2)$$
$$(3,5) = \nabla(a_2b-ab_2)+a_1(ca+c_1a_1+c_2a_2)+c_1(1-a^2-a_1^2-a_2^2-b^2-b_1^2-b_2^2)+b_1(cb+c_1b_1+c_2b_2)$$
$$(3,6) = \nabla(ab_1-a_1b)+a_2(ca+c_1a_1+c_2a_2)+c_2(1-a^2-a_1^2-a_2^2-b^2-b_1^2-b_2^2)+b_2(cb+c_1b_1+c_2b_2),$$

$$(4,1) = (b_1c_2-b_2c_1)\nabla+a(1-a_1^2-b_1^2-c_1^2-a_2^2-b_2^2-c_2^2)+a_1(aa_1+bb_1+cc_1)+a_2(aa_2+bb_2+cc_2)$$
$$(4,2) = (c_1a_2-c_2a_1)\nabla+b(1-a_1^2-b_1^2-c_1^2-a_2^2-b_2^2-c_2^2)+b_1(aa_1+bb_1+cc_1)+b_2(aa_2+bb_2+cc_2)$$
$$(4,3) = (a_1b_2-a_2b_1)\nabla+c(1-a_1^2-b_1^2-c_1^2-a_2^2-b_2^2-c_2^2)+c_1(aa_1+bb_1+cc_1)+c_2(aa_2+bb_2+cc_2)$$
$$(4,4) = 1-a_1^2-b_1^2-c_1^2-a_2^2-b_2^2-c_2^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$
$$(4,5) = (aa_1+bb_1+cc_1)(a_2^2+b_2^2+c_2^2-1)-(a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1)(a_2a+b_2b+c_2c)$$
$$(4,6) = (a_2a+b_2b+c_2c)(a_1^2+b_1^2+c_1^2-1)-(a_1a+b_1b+c_1c)(a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1),$$

$$(5,1) = (b_2c-bc_2)\nabla+a_1(1-a_2^2-b_2^2-c_2^2-a^2-b^2-c^2)+a_2(a_2a_1+b_1b_2+c_1c_2)+a(a_1a+b_1b+c_1c)$$
$$(5,2) = (c_2a-ca_2)\nabla+b(a_1a+b_1b+c_1c)+b_1(1-a_2^2-b_2^2-c_2^2-a^2-b^2-c^2)+b_2(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)$$
$$(5,3) = (a_2b-ab_2)\nabla+c(a_1a+b_1b+c_1c)+c_1(1-a_2^2-b_2^2-c_2^2-a^2-b^2-c^2)+c_2(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)$$
$$(5,4) = (a_1a+b_1b+c_1c)(a_2^2+b_2^2+c_2^2-1)-(aa_2+bb_2+cc_2)(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)$$
$$(5,5) = 1-a_2^2-b_2^2-c_2^2-a^2-b^2-c^2+(b_2c-bc_2)^2+(c_2a-ca_2)^2+(a_2b-ab_2)^2$$
$$(5,6) = (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)(a^2+b^2+c^2-1)-(a_2a+b_2b+c_2c)(aa_1+bb_1+cc_1),$$

$$(6,1) = (bc_1-b_1c)\nabla+a(a_2a+b_2b+c_2c)+a_1(a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1)+a_2(1-a^2-b^2-c^2-a_1^2-b_1^2-c_1^2)$$
$$(6,2) = (ca_1-c_1a)\nabla+b(a_2a+b_2b+c_2c)+b_1(a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1)+b_2(1-a^2-b^2-c^2-a_1^2-b_1^2-c_1^2)$$
$$(6,3) = (ab_1-a_1b)\nabla+c(a_2a+b_2b+c_2c)+c_1(a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1)+c_2(1-a^2-b^2-c^2-a_1^2-b_1^2-c_1^2)$$
$$(6,4) = (a_2a+b_2b+c_2c)(a_1^2+b_1^2+c_1^2-1)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)(aa_1+bb_1+cc_1)$$
$$(6,5) = (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)(a^2+b^2+c^2-1)-(aa_1+bb_1+cc_1)(a_2a+b_2b+c_2c)$$
$$(6,6) = 1-a^2-b^2-c^2-a_1^2-b_1^2-c_1^2+(bc_1-b_1c)^2+(ca_1-c_1a)^2+(ab_1-a_1b)^2.$$

Of the second minors, the following are the first row:

$$\binom{1\,2}{1\,2} = 1-c^2-c_1^2-c_2^2$$
$$\binom{1\,3}{1\,2} = bc+b_1c_1+b_2c_2$$
$$\binom{1\,4}{1\,2} = b(c^2+c_1^2+c_2^2-1)-c(bc+b_1c_1+b_2c_2)$$
$$\binom{1\,5}{1\,2} = b_1(c^2+c_1^2+c_2^2-1)-c_1(bc+b_1c_1+b_2c_2)$$
$$\binom{1\,6}{1\,2} = b_2(c^2+c_1^2+c_2^2-1)-c_2(bc+b_1c_1+b_2c_2)$$

$$\binom{2\,3}{1\,2} = -(ac+a_1c_1+a_2c_2)$$

$$\binom{2\,4}{1\,2} = a(c^2+c_1^2+c_2^2-1) - c\,(ac+a_1c_1+a_2c_2)$$
$$\binom{2\,5}{1\,2} = a_1(c^2+c_1^2+c_2^2-1) - c_1(ac+a_1c_1+a_2c_2)$$
$$\binom{2\,6}{1\,2} = a_2(c^2+c_1^2+c_2^2-1) - c_2(ac+a_1c_1+a_2c_2)$$

$$\binom{3\,4}{1\,2} = a(bc+b_1c_1+b_2c_2) - b\,(ca+c_1a_1+c_2a_2)$$
$$\binom{3\,5}{1\,2} = a_1(bc+b_1c_1+b_2c_2) - b_1(ca+c_1a_1+c_2a_2)$$
$$\binom{3\,6}{1\,2} = a_2(bc+b_1c_1+b_2c_2) - b_2(ca+c_1a_1+c_2a_2)$$

$$\binom{4\,5}{1\,2} = c_2\nabla - (ab_1-a_1b)$$
$$\binom{4\,6}{1\,2} = c_1\nabla - (a_2b-ab_2)$$
$$\binom{5\,6}{1\,2} = c\ \nabla - (a_1b_2-a_2b_1);$$

and similarly for the other fourteen rows.

From these it appears that all the second minors on this level will vanish in virtue of the three conditions

$$c^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1$$
$$bc + b_1c_1 + b_2c_2 = 0$$
$$ac + a_1c_1 + a_2c_2 = 0,$$

since the last three viz.

$$c:c_1:c_2 = b_1a_2 - b_2a_1 : b_2a - ba_2 : ba_1 - a_1b$$
$$\nabla = 1,$$

are consequences of the above three. This is in agreement with the homoloidal law, viz. that the number of second minors which must vanish, in order that all on the same level may vanish, is $4-2+1=3$. It is easy to see that the whole system necessarily vanishes in order that all may vanish, will be the usual system

$$a^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1 \quad , \quad b^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1 \quad , \quad c_1 + c_1^2 + c_2^2 = 1,$$
$$bc + b_1c_1 + b_2c_2 = 0 \quad , \quad ca + c_1a_1 + c_2a_2 = 0 \quad , \quad ab + a_1b_1 + a_2b_2 = 0,$$

and that they involve also the usual inverse system. It may be remarked that the above conditions render all the 36 first minors also zero.

It has been shewn by Mr. *Cayley* (Camb. and Dub. Math. journ. May 1853) that the result of the elimination of x, y, z from the equations

$$x+y+z=0 \quad , \quad x^2=a \quad y^2=b \quad , \quad z^2=c,$$

may be expressed in other of the two following rational forms:

$$\begin{vmatrix} . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & c & b \\ 1 & c & . & a \\ 1 & b & a & . \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} . & a & b & c \\ a & . & 1 & 1 \\ b & 1 & . & . \\ c & 1 & 1 & . \end{vmatrix} = 0,$$

with corresponding results for a greater number of variables.

„And in general, for any *even* number of quadratic radicals, the two forms are not essentially distinct, but may be derived from each other by interchanging lines and columns, while for an *odd* number of quadratic radicals, the two forms cannot be so derived from each other, but are essentially distinct."

Applying a similar process of elimination to cubic radicals, he arrives at the conclusion, that:

„In general, whatever be the number of cubic radicals, two of the three forms are not essentially distinct, but may be derived from each other by interchanging lines and columns."

The form of a determinant reappears also in the combination of certain differential operations, as J have noticed in the *Camb.* and *Dub.* Math. Journal, Febr. 1853. Thus:

Suppose that the series

$$\begin{array}{l} i_1 , i_2 , \cdots\cdots \\ j_1 , j_2 , \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

represent any permutations of the series

$$1 , 2 , \cdots\cdots$$

and that

$$\nabla_i = x_{i_1}\frac{d}{dx_1} + x_{i_2}\frac{d}{dx_2} + \cdots\cdots$$

$$\nabla_j = x_{j_1}\frac{d}{dx_1} + x_{j_2}\frac{d}{dx_2} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

and that the permutation

$$j_1, j_2, \dots\dots \qquad P(j)$$

of the series

$$i_1, i_2, \dots\dots \qquad P(i),$$

be thus represented:

$$j_{i_1}, j_{i_2}, \dots\dots \qquad = P(j, i),$$

and the corresponding operative symbol by $\nabla_{j,i}$, so that

$$\nabla_{j,i} = x_{j_{i_1}} \frac{d}{dx_1} + x_{j_{i_2}} \frac{d}{dx_2} + \dots\dots,$$

and so on, generally; then writing

$$\nabla_{\dots j+i} = \dots\dots x_{j_1} x_{i_1} \frac{d^n}{dx_1^n} + \dots\dots x_{j_2} x_{i_2} \frac{d^n}{dx_2^n} + \dots\dots + (..x_{j_1} x_{i_2} + .. x_{j_2} x_{i_1} + ..) \frac{d^n}{dx_1 dx_2} + \dots.$$

then

$$\nabla_{j+i} = \nabla_j \nabla_i - \nabla_{j,i},$$

$$\nabla_{k+j+i} = \nabla_k \nabla_j \nabla_i - \nabla_{k,j} \nabla_i - \nabla_j \nabla_{k,i} - \nabla_k \nabla_{j,i} + \nabla_{k,j,i} + \nabla_{j,k,i};$$

and so on. Moreover, if the permutations are of such a character that, either the second, or the first and last conditions of the following system are satisfied:

$$P(j,k) = P(k,j) \quad , \quad P(k,i) = P(i,k) \quad , \quad P(i,j) = (j,i),$$

there will result

$$\nabla_{j,k} = \nabla_{k,j} \quad , \quad \nabla_{k,i} = \nabla_{i,k} \quad , \quad \nabla_{i,j} = \nabla_{j,i},$$

and if, besides, either the first condition or the last two conditions of the following system be satisfied:

$$P\{i, (j, k)\} = P\{(j, k), i\}$$
$$P\{j, (k, i)\} = P\{(k, i), j\}$$
$$P\{k, (i, j)\} = P\{(i, j), k\},$$

we have

$$\nabla_{k+j+i} = \nabla_k \nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_{j,k} - \nabla_j \nabla_{k,i} - \nabla_k \nabla_{i,j} + 2\nabla_{i,j,k};$$

and so on, generally.

A similar formula may be constructed when linear functions of the variables are substituted for $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots\dots x_{j_1}, x_{j_2}, \dots\dots$ in the expression for $\nabla_i, \nabla_j, \dots$; but it would be foreign to the present purpose to follow this subject.

London, August 1853.

9.

Der Uebergang von den unbestimmten zu bestimmten Integralen.

(Von Herrn Prof. *Heine* zu Bonn.)

Bezeichnen α und β endliche reelle Zahlen, ist ferner $f(z)$ eine zwischen $z=\alpha$ und $z=\beta$ continuirliche, einwerthige Function, so versteht man bekanntlich unter $\int_\alpha^\beta f(z)\,dz$ die Grenze einer gewissen Summe. Diese Grenze ist immer endlich und bestimmt, so dass also das bestimmte Integral einen endlichen und bestimmten Werth hat, der, wie man weiss, aus einem unbestimmten Integral abgeleitet werden kann. Ist nämlich $\psi(z)$ irgend ein unbestimmtes Integral $\int f(z)\,dz$, so wird jenes bestimmte Integral gleich $\psi(\beta)-\psi(\alpha)$; *vorausgesetzt, dass auch $\psi(z)$ zwischen $z=\alpha$ und $z=\beta$ continuirlich und einwerthig bleibt.* Die Continuität eines unbestimmten Integrals $\psi(z)$ folgt aber keineswegs aus den Voraussetzungen für $f(z)$; wird auf dieselbe keine Rücksicht genommen, so kann man bei dem Uebergange von den unbestimmten zu bestimmten Integralen leicht auf unrichtige Resultate stossen.

Um Dies zu erläutern betrachte man das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\,\mathrm{arc\,tang}\,z}{dz}\,dz,$$

welches bekanntlich den Werth π hat. Ein Bogen, dessen Tangente eine gegebene Grösse z hat, ist keine *bestimmte* Function. Um sie einwerthig zu machen, nehme man *denjenigen* Bogen welcher zwischen 0 und π liegt, der aber offenbar eine *discontinuirliche* Function von z ist, indem er von π zu 0 springt, während z continuirlich vom Negativen zum Positiven durch Null übergeht. Es ist dieses $\mathrm{arc\,tang}\,z$ ein *unbestimmtes* Integral $\int\frac{dz}{1+z^2}$; daher wäre, wenn man nicht ein *continuirliches* unbestimmtes Integral nehmen müsste, das bestimmte Integral

zwischen den Grenzen $-g$ und $+g$ gleich $\operatorname{arc\,tang} g - \operatorname{arc\,tang} -g$, demnach das zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gleich $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = 0$; anstatt gleich π. Das richtige Resultat erhält man, wenn man den Bogen so nimmt, dass er eine *continuirliche* Function von z ist, also z. B. zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Dies giebt $\operatorname{arc\,tang} \infty - \operatorname{arc\,tang} -\infty$ gleich $\frac{1}{2}\pi - (-\frac{1}{2}\pi) = \pi$.

Bisher stellten wir uns unter α und β *reelle* Grössen vor. Sind α und β *imaginär*, so legt man dem $\int_\alpha^\beta f(z)\,dz$ noch immer eine Bedeutung bei. Man kann nämlich in diesem Falle eine ähnliche Summe bilden, wie in dem vorhergehenden, indem man den Weg vorschreibt, welchen z von α bis β gehen soll. Nimmt man die Grenze dieser Summe, so hat man *für diesen Weg von* z einen bestimmten Werth, den man gleich dem bestimmten Integrale setzt. Natürlich wählt man im Allgemeinen nur solche Wege für z, auf welchen $f(z)$ continuirlich bleibt. Soll das Integral einen vollständig bestimmten Werth haben, so muss der eingeschlagene Weg ohne Einfluss auf jene Grenze sein; es würden sonst die drei Grössen, welche in dem Zeichen des bestimmten Integrals vorkommen, α, β, $f(z)$, eben nicht zur vollständigen Bestimmung ausreichen, sondern man müsste noch eine Andeutung des Weges, den man gehen soll, hinzufügen.

Im 15ten Bande des *Liouville*schen Journals S. 365—480 hat *Puiseux* die Veränderung untersucht, welche jene Grenze erleidet, wenn z auf verschiedenen Wegen von α zu β gelangt. Er hat den Fall vollständig behandelt, wo $f(z)$ von z mittels irgend einer algebraischen Gleichung abhangt; er hat seine Untersuchungen auf mehrere wichtige Integrale, z. B. die elliptischen, die *Abel*schen und die verallgemeinerten *Abel*schen Functionen angewandt.

Zur Veranschaulichung der Methode und der Resultate bedient er sich der häufig mit Vortheil benutzten geometrischen Darstellung imaginärer Grössen, deren Prinzip man seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts kennt. In den Miscellanea Taurin. Tom I. 1759, p. 122 verwirft nämlich *Daviet de Foncenex* jene geometrische Darstellungsweise, die von einem Schriftsteller herrühre, welchem man ein schätzbares Werk über Algebra verdanke.

Um eine imginäre Zahl $a+bi$ geometrisch darzustellen, nimmt man zwei feste, unter rechtem Winkel sich schneidende Axen an; die eine sei horizontal, die andere vertical. Auf jeder Axe unterscheidet man eine positive und eine negative Seite, die durch den Durchschnitt der Axen getrennt werden. Die imaginäre Zahl $a+bi$ wird dann durch einen Punct in der Ebene der Axen repräsentirt, dessen Projectionen auf die horizontale und die verticale Axe, von dieser

Stücke abschneiden, die, vom Durchschnitt der Axe an gerechnet, resp. gleich den Zahlenwerthen von a und b sind. Von den vier Puncten, welche dieser Bedingung entsprechen, nimmt man einen solchen, dessen Projection auf die positive oder die negative Seite der horizontalen Axe fällt, je nachdem a positiv oder negativ, auf die positive oder die negative Seite der verticalen Axe, je nachdem b positiv oder negativ ist.

Die Arbeit von *Puiseux* giebt das Resultat, dass der Weg, welchen z von α bis β geht, im Allgemeinen nicht ohne Einfluss bleibt, sondern das Integral im Allgemeinen mehrfach periodisch ist, d. h. dass jene Summen, je nach dem verschiedenen Wege von z, Grenzen haben, die sich um ganze Vielfache gewisser Grössen, der Perioden, unterscheiden. *Es lässt sich auch erkennen, wie viele solcher Perioden* additiv oder subtractiv *hinzugefügt werden müssen, wenn man von einem Wege von z zu einem andern zwischen denselben Endpuncten übergeht.* Es mag noch gelegentlich bemerkt werden, dass der Satz, welchen *Cauchy* in seinem vor etwa dreissig Jahren erschienenen „Mémoire sur les integrales définies, prises entre des limites imaginaires" zu beweisen sucht, nicht streng richtig ist. *Cauchy* behauptet nämlich, dass der Werth des Integrals von dem Wege unabhängig sei, so oft $f(z)$ für alle Werthe von z continuirlich ist, welche in dem Rechtecke liegen, dessen Diagonale die Verbindungslinie der Puncte α und β ist und dessen Seiten parallel mit den Axen sind.

Man sieht hieraus, dass die drei Stücke α, b, $f(z)$ dem Integrale allerdings schon einen bestimmten Charactér geben, ohne dass der Weg von z angezeigt wäre: die Theorie der elliptischen Integrale, bei denen die Grenzen als Functionen des Integrals angesehen werden, zeigt, wie eine Menge eleganter Eigenschaften ganz unabhängig von diesem Wege ist. Es kommen aber auch Fälle vor, wo es nöthig ist, den bestimmten Werth des Integrals zu kennen, welcher einem gegebenen Wege entspricht, und das leistet *Puiseux*'s Methode nicht, welche nur die für verschiedene Wege gefundenen Integrale vergleicht. Zwei solcher Fälle boten sich mir bei einer Untersuchung über das Potential einer Kreisscheibe dar, über die man das Nähere in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1854 S. 564 seq. findet. Das eine Mal war $f(z)$ eine rationale Function von z, und es sollte der Werth *des* Integrals ermittelt werden; welches man im 9ten Paragraph der gegenwärtigen Abhandlung finden wird. Das andere Mal handelte es sich um einen speciellen Fall der allgemeineren Aufgabe, das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)}},$$

welches zwischen reellen Grenzen von x genommen wird, in die Hauptform der elliptischen Integrale zu verwandeln, wenn die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ imaginär sind. Der Lösung dieser Aufgabe werde ich eine besondere Arbeit widmen, und mich in der gegenwärtigen damit beschäftigen, den Werth des Integrals $\int_a^b f(z)\,dz$ zu ermitteln, wenn der Gang von z zwischen a und b gegeben ist, *und $f(z)$ eine Function bedeutet, welche rational nach z, oder nach z und einer Quadratwurzel aus einem Ausdrucke zweiten Grades ist.* Aus den Elementen der Integralrechnung ist bekannt, dass man dazu nur einige ganz specielle Formen von $f(z)$ zu untersuchen hat, die (§. 3) bis (§. 8) behandelt sind. In (§. 9) sind die früheren Resultate auf das Integral angewendet, um dessen willen diese Untersuchungen unternommen waren. Im (§. 1) schicke ich bekannte Definitionen nnd einfache Betrachtungen voraus, denen im (§. 2) einige Bemerkungen über den Zusammenhang des unbestimmten mit dem bestimmten Integrale folgen.

Um den Gang von z anzudeuten, mache ich diese Grösse von einem reellen x abhängig, das sich zwischen a und b bewegen mag, wenn a und b reell sind. Für $x = a$ und $x = b$ selbst, nimmt z die Werthe α und β an. Der Ausdruck, dass z einen gegebenen Gang zwischen α und β hat, wird dann gleichbedeutend damit sein, dass z eine gegebne Function von x ist. Da ferner die unendlich kleine, diesem Gange entsprechende Veränderung von z offenbar gleich dem Producte von $\frac{dz}{dx}$ in die unendlich kleine Veränderung von x ist (wie sich auch durch die geometrische Betrachtung auf der Stelle zeigt), so wird der diesem Gange angehörige Werth des Integrals $\int_\alpha^\beta f(z)dz$, (die Grenze der Summe) gleich dem ganz bestimmten Werthe des Integrals zwischen reellen Grenzen

$$\int_a^b f(z)\frac{dz}{dx}dx.$$

Es ist daher folgende Aufgabe zu behandeln. Es soll der Werth des Integrals

$$\int_a^b f(z)\frac{dz}{dx}dx$$

ermittelt werden, wenn z eine gegebene continuirliche einwerthige Function von x, und $f(x)$ rational nach x, oder nach x und einer Quadratwurzel aus einem Ausdruck zweiten Grades ist.

§. 1.

1) Eine Function von x kann entweder *stetig* sein, oder für verschiedene Werthe von x ihre Stetigkeit *verlieren*. Im letzten Falle kann sie an solchen Stellen in's Unendliche übergehen, oder aber endliche Sprünge machen. Beispiele solcher Functionen sind x^2, $\frac{1}{x}$ oder $\frac{1}{x^2}$, und $\operatorname{arctang} x$, den arc so genommen, dass er zwischen 0 und π liegt. Die erste Function ist stetig; $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x^2}$ wachsen, wenn x sich der Null nähert, ins Unendliche; $\operatorname{arctang} x$ springt bei $x=0$ von π zu 0 über.

2) *Einwerthig* heisst eine Function von x, wenn sie für jeden Werth von x nur einen Werth hat; man pflegt sie aber auch dann noch einwerthig zu nennen, wenn auch einigen Werthen von x, aber nicht einer continuirlichen Folge solcher x, mehrere Werthe der Function entsprechen. Der oben bezeichnete $\operatorname{arctang} x$ ist also noch *einwerthig*, obgleich er für $x=0$ zwei Werthe, π und 0 hat. Uebrigens könnte man ihn auch vollkommen einwerthig machen, wenn man den Bogen von 0 incl. bis π excl. nimmt. Wir setzen fest, dass, wenn die einwerthige Function $\vartheta(x)$ bei $x=\alpha$ einen endlichen Sprung macht, also zwei Ordinaten für die Abscisse α existiren, der eine Werth derselben, die Grenze von $\vartheta(\alpha+\varepsilon)$, mit $\vartheta(\alpha+0)$ bezeichnet werden soll, wo ε eine verschwindende, *positive* Grösse ist. In den Formeln bezeichnen wir *Grenze* mit *Gr*.

3) Unter $\frac{d\vartheta(x)}{dx}$ oder ϑ' versteht man

$$Gr_{h=0}\,\frac{\vartheta(x+h)-\vartheta(x)}{h},$$

es mag h von der positiven oder negativen Seite der Null sich nähern. Im Allgemeinen ist $\vartheta'(x)$ *einwerthig*, wenn $\vartheta(x)$ *einwerthig* ist. Für besondere Fälle von x kann es aber auch mehrere Werthe haben. Wird z. B. der arc wie oben genommen, so ist $\frac{d\operatorname{arctang} x}{dx}$ im Allgemeinen gleich $\frac{1}{1+x_2}$; für $x=0$ aber, der Erklärung nach, 1 oder $-\infty$, je nachdem h von der positiven oder von der negativen Seite her der Null sich nähert.

4) Ein *unbestimmtes* Integral $\int f(x)dx$ ist jede Function $\psi(x)$, die, nach x differentiirt, $f(x)$ giebt, wenn auch für einzelne Werthe von x, aber nicht für eine continuirliche Folge, diese Gleichheit aufhört. So ist der obige $\operatorname{arctang} x$ noch

immer $\int \frac{dx}{1+x^2}$, obgleich für $x = 0$ der Differentialquotient $\frac{d \operatorname{arctang} x}{dx}$ nicht mehr zu 1, sondern zu 1 oder zu $-\infty$ wird. Hieraus ist klar, dass wenn $f(x)$ *reell* ist, während z eine reelle oder imaginäre Function von x bezeichnet, $\psi(z)$ ein unbestimmtes Integral $\int f(z) z' dx$ sein wird, *wenn man hier, wie in der Folge immer geschehen soll, z' gleich $\frac{dz}{dx}$ setzt.*

5) Sind a und b *reelle* Grössen, ist ferner $f(x)$ *einwerthig* und *continuirlich*, oder macht doch nur endliche Sprünge, so ist

$$\int_a^b f(x) dx = \underset{n=\infty}{Gr} \{ \varepsilon f(a) + \varepsilon f(a+\varepsilon) + \varepsilon f(a+2\varepsilon) + \cdots + \varepsilon f(a+(n-1)\varepsilon) \},$$

wenn man zur Abkürzung $\varepsilon = \frac{b-a}{n}$ setzt. Der Bequemlichkeit wegen stellen wir uns die obere Grenze b stets grösser als a, d. h. $b-a$ als positiv vor. Für ein gegebnes f, a und b existirt immer eine, und *nur eine* Grenze. *Geometrisch* genommen stellt ein solches Integral einen gewissen Flächenraum vor, wenn $f(x)$ reell ist. Wird $f(x)$ imaginär $= U + iV$, so bedeutet nach dieser Erklärung $\int_a^b f(x) dx$

$$\int_a^b U dx + i \int_a^b V dx,$$

also gleichfalls etwas Bestimmtes.

Ist die eine Grenze $b = \infty$, so versteht man unter $\int_a^\infty f(x) dx$ die Grenze von $\int_a^b f(x) dx$, mit wachsendem b. Aehnlich verhält es sich wenn $a = -\infty$ wird.

Geht $f(x)$, zwischen $x = a$ und $x = b$, der Reihe nach für $x = \alpha, \beta, \ldots\ldots k$ ins Unendliche über, so versteht man unter $\int_a^b f(x) dx$ folgende Summe:

$$Gr \int_a^{\alpha-\eta} f(x) dx + Gr \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\eta} f(x) dx + \ldots\ldots + Gr \int_{k+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

die Grenzen für η und ε gleich Null angenommen, während man sich unter ε und η positive Grössen vorstellt. Ist a oder b selbst ein solcher Werth wie $\alpha, \beta, \ldots\ldots$ so hat man auch für a und b resp. $a + \varepsilon$ und $b - \eta$ zu schreiben. So z. B. ist $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = Gr \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = Gr\, 2(1-\varepsilon) = 2$. Es ist noch daran zu erinnern, dass die Summe der Grenzen zweier Grössen A und B allerdings immer gleich der Grenze ihrer Summe ist; es müssen aber dann A und B Grenzen im eigentlichen Sinne

haben, d. h. ihre Grenze darf nicht, wie man sich ausdrückt, $\pm\infty$ sein. Man kann daher in der vorstehenden Definitionsgleichung nicht die Integrale zuerst addiren, und dann die Grenzen nach ε und η nehmen.

§. 2.

Wir werden nun untersuchen wie $\int_a^b \psi'(x)dx$ mit $\psi(b)-\psi(a)$ zusammenhangt. Zunächst ist klar, dass, wenn man ein unbestimmtes Integral $\int f(x)dx$ durch $\psi(x)$ bezeichnet, $\int_a^b f(x)dx$ immer $\psi(b)-(a)$ sein wird, wenn $f(x)$ *und* $\varphi(x)$ *einwerthig* und *continuirlich* zwischen a und b bleiben. Der bekannte Beweis erfordert in der That keine andere Voraussetzung.

Wird die Stetigkeit von $\psi(x)$ zunächst bei $x=a$ unterbrochen, so zerlege man das Integral von a bis b in eines von a bis α und in eines von α bis b. Es ist klar, dass das erste die Grenze des Integrals von a bis $\alpha-\varepsilon$, das zweite die Grenze des Integrals zwischen $\alpha+\varepsilon$ und b sein wird. Es ergiebt sich daher:

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{Gr}\left[\int_a^{\alpha-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^b f(x)dx\right].$$

Das erste Integral rechts wird aber zu $\psi(\alpha-\varepsilon)-\psi(a)$, das zweite zu $\psi(b)-\psi(\alpha-\varepsilon)$, also ist

$$\int_a^b f(x)dx = \psi(b)-\psi(a)+Gr_{\varepsilon=0}[\psi(\alpha-\varepsilon)-\psi(\alpha+\varepsilon)].$$

Anmerk. „Wäre auch $f(x)$ für $x=\alpha$ *discontinuirlich*, während das Integral $\int_a^b f(x)dx$ noch eine Bedeutung hat (§. 1, No. 5), so würde man in den beiden vorigen Gleichungen statt der Summe oder Differenz, die Summe oder Differenz der Grenze setzen müssen."

Durch wiederholte Anwendung der obigen Formel findet man endlich, indem man $\psi'(x)$ statt $f(x)$ setzt, Folgendes: Wird $\psi(x)$ für $x=\alpha, \beta$ und $\varkappa$ *discontinuirlich*, und hat $\int_a^b \psi'(x)dx$ einen Werth, mag $\psi'(x)$ continuirlich bleiben, oder mag erst die Definitionsgleichung am Schlusse des (§. 1) dem Integral seinen Werth verschaffen, so ist:

$$\int_a^b \psi'(x)dx = \psi(b)-\psi(a)$$
$$+Gr\,\psi(\alpha-\varepsilon)-Gr\,\psi(\alpha+\varepsilon)+Gr\,\psi(\beta-\varepsilon)\cdots\cdots-Gr\,\psi(k+\varepsilon);$$

die Grenzen für $\varepsilon = 0$ genommen, während man sich ε positiv vorstellt. Bleibt $\psi'(x)$ *continuirlich*, so kann man statt der Summe der Grenzen die Grenze der Summe setzen. Macht $\psi(x)$ nur endliche Sprünge (und das ist der Fall, welcher bei den spätern Untersuchungen vorkommen wird,) so hat man:

$$\int_a^b \psi'(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a)$$
$$+ \psi(\alpha - 0) - \psi(\alpha + 0) + \psi(\beta - 0) - \dots - \psi(k + 0).$$

Um diese Formel auf ein Beispiel anzuwenden, betrachte man wieder

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \operatorname{arctang} x}{dx}\,dx.$$

Nimmt man den arc zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ an, so wird $\psi(x)$, nämlich $\operatorname{arctang} x$, zu einer *continuirlichen* Function von x; also das Integral, wie auch schon in der Einleitung gedacht, gleich $\frac{1}{2}\pi - (-\frac{1}{2}\pi) = \pi$. Nimmt man aber den arc zwischen 0 und π an, so dass er für $x = 0$ *discontinuirlich* ist, so ist die vorstehende Formel zu benutzen, indem man $\alpha = 0$ setzt. Es findet sich daher als Werth des Integrals:

$$\operatorname{arctang} \infty - \operatorname{arctang} -\infty + \operatorname{arctang} -0 - \operatorname{arctang} +0$$
$$= +\tfrac{1}{2}\pi \quad - \quad \tfrac{1}{2}\pi \quad + \quad \pi \quad - \quad 0 \quad = \pi.$$

Es sind folglich nun zwei Mittel da, ein Integral $\int_a^b \psi'(x)dx$ zu berechnen, wenn $\psi(x)$ auf die Weise *discontinuirlich* wird, dass es endliche Sprünge macht. Das eine besteht in der Anwendung unserer Formel, das zweite darin, dass man eine Function $\vartheta(x)$ aufsucht, welche continuirlich ist und denselben Differentialquotienten nach x giebt, wie $\psi(x)$. *Geometrisch* ist die letzte Methode leicht auf folgende Art auszuführen. Behandelt man nur den Fall, wenn $\psi(x)$ reell ist, so stelle man sich die Curve gezeichnet vor, welche diese Function ausdrückt. Diese Curve wird bei x, α, β, ... Sprünge machen, also plötzlich abbrechen. Indem man nun den zusammenhangenden Theil von $x = a$ bis $x = \alpha$ festhält, rücke man die übrigen Stücke so zusammen, dass alle Theile eine zusammenhangende Curve bilden. Es muss dabei aber jeder Punct der Curve $\psi(x)$ auf seiner Ordinate fortrücken. Die zusammenhangende Curve ist dann offenbar eine solche Function $\vartheta(x)$, und der Werth des Integrals ist $= \vartheta(b) - \vartheta(a)$. Wäre z. B. $\psi(x) = \operatorname{arctang} x$, und man nimmt den Bogen zwischen 0 und π, so

wird die Curve für $x = -\infty$ eine Ordinate $\frac{1}{2}\pi$ geben, und continuirlich fortlaufen, bis zur Ordinate π für $x = 0$; das zweite Curvenstück hat für $x = 0$ und $x = \infty$ die Ordinaten 0 und $\frac{1}{2}\pi$. Rückt man auf die vorgeschriebene Art beide Theile zusammen, so bleibt für $x = -\infty$ die Ordinate $\frac{1}{2}\pi$, während sie für $x = \infty$ gleich $\pi + \frac{1}{2}\pi$ wird. Die Differenz der End- und Anfangs-Ordinate ist daher $(\pi + \frac{1}{2}\pi) - \frac{1}{2}\pi$ oder π.

§. 3.

Nach Angabe der Einleitung wenden wir die Formel auf einzelne Fälle an. Es *bezeichne z eine beliebig gegebene, continuirliche einwerthige Function von x*, sie mag reel oder imaginär sein. *Der Werth von z für einen Werth c von x, drücke z_c aus.*

Zunächst untersuche man

$$\int_a^b z^n z' dx,$$

wenn n eine ganze positive Zahl, oder Null ist. Da $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ist, so wird nach (§. 1, No. 4)

$$\int z^n z' dx = \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Setzt man das bestimmte Integral gleich $\int_a^b \psi'(x) dx$, so lässt sich unter $\psi(x)$ hier $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ verstehen. Es ist also $\psi(x)$ eine *continuirliche* Function von x. Wir haben demnach:

$$\int_a^b z^n z' dx = \frac{z_b^{n+1} - z_a^{n+1}}{n+1},$$

so dass dies Integral nur von dem Anfangs- und End-Werthe von z, nicht aber von dem Gange von z zwischen a und b abhangt; hier, wie bei allen ähnlichen Resultaten, nur vorausgesetzt die oben ausdrücklich erwähnte Bedingung der Continuität von z.

Dieses einfache Resultat ist von Bedeutung; wenn auch nicht für die folgenden Untersuchungen, so doch für alle Fälle, wo ein Integral $\int_a^b f(z) z' dx$ betrachtet wird, in welchem sich $f(z)$ in eine *convergente*, nach Potenzen von z aufsteigende Reihe entwickeln lässt. Ist der Werth dieses Integrals für irgend eine Function z gefunden, so wird derselbe Werth auch für jede Function z gelten, die mit der ersten gleiche Werthe für $x = a$ und $x = b$ hat.

Auf ähnliche Weise erhält man einen ähnlichen Satz für

$$\int_a^b \frac{z'}{z^n} dx,$$

wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet, die grösser als 1 ist, und z zwischen $x = a$ und $x = b$ nicht verschwindet. Der Werth des Integrals ist dann nämlich:

$$\frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{z_b^{n-1}} - \frac{1}{z_a^{n-1}}\right).$$

§. 4.

Wir gehen zu $\int_a^b \frac{z'}{z} dx$ über, indem wir vorauszusetzen, dass z zwischen $x=a$ und $x=b$ nicht verschwindet. Da $\int \frac{dx}{x} = \log x$ ist, so wird nach (§. 1, No. 4)

$$\int \frac{z'}{z} dx = \log z,$$

so dass für $\psi(x)$ ein beliebiger, aber für jedes x bestimmter Werth von $\log z$ zu setzen ist. Man stelle sich z in der Form $p + qi$ gegeben vor, wo also p und q gleichfalls continuirliche einwerthige Functionen von x sind, die für keinen Werth von x zugleich verschwinden, und setze

$$p = r \cos\varphi \quad , \quad q = r \sin\varphi,$$

indem man hier, wie später bei solchen Transformationen, das reelle r *positiv, und* φ *zwischen* $-\pi$ *und* $+\pi$ *annimmt.* Die Werthe von r und φ für $x = c$, werden durch r_c und φ_c bezeichnet.

Ein $\log z$ ist nun gleich $\log r + \varphi i$, so dass man

$$\psi(x) = \log r + \varphi i$$

setzen kann. Da r positiv (gemacht) und nie 0 (Voraussetzung) ist, so wird $\log r$ eine continuirliche Function von x sein; $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sind gleichfalls continuirliche Functionen von x, aber nicht ist es nothwendig φ selbst, welches offenbar von $\pm\pi$ zu $\mp\pi$ springt, wenn $\cos\varphi$ oder p negativ ist und zugleich, bei unendlich kleiner Veränderung von x, der $\sin\varphi$ oder q, continuirlich durch Null vom Positiven zum Negativen übergeht, oder umgekehrt.

Man beobachte daher p und q, während x von a bis b wächst. Bei $x = \alpha$ mag zuerst der Fall eintreten, dass p negativ ist, während q verschwindet und ehe x zu α kam, ein anderes Zeichen hatte, als nachdem es durch α hindurch weiter zu b hinging. Derselbe Fall mag bei β, γ, ... k eintreten. Sind nun φ_α, φ_β, φ_k die Werthe von φ, *bei* welchen, d. h. unmittelbar *nach* welchen der Sprung eintritt, während x von a zu b fortschreitet, *so dass also der Zahlwerth*

eines jeden Bogens $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \ldots \varphi_k$ *gleich* π *ist*, so giebt die Formel (§. 2) das Resultat

$$\int_a^b \frac{z'}{z} dx = \log r_b - \log r_a + i(\varphi_b - \varphi_a) + 2i(\varphi_\alpha + \varphi_\beta + \ldots + \varphi_k).$$

Sollte z_n reell sein, so wird es nicht zweifelhaft sein, ob φ_α gleich $+\pi$ oder $-\pi$ zu setzen ist. Erhält nämlich z, wenn es von z_a ausgeht, da wo es zuerst imaginär wird, einen positiven imaginären Theil, so war offenbar φ_a gleich $+\pi$, im anderen Falle $-\pi$. Ganz ähnlich verhält es sich mit φ_b.

Bleibt der reelle Theil von z oder p immer positiv, oder wechselt q nie sein Zeichen, so kann offenbar kein Sprung Statt finden, so dass in diesem Falle das Integral zu

$$\log r_b - \log r_a + i(\varphi_b - \varphi_a)$$

wird, also wieder nur von dem Anfangs- und End-Werthe von z abhangt. Sollte p immer negativ sein, so hätte sich ein ähnliches Resultat durch Betrachtung des negativen Integrals ergeben.

Auf welchem Wege man auch von z_a zu z_b kommen mag: es erhält, wie die Formel zeigt, das Integral Werthe, die sich nur durch ganze Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden.

§. 5.

Das Integral $\int_a^b \frac{z'dx}{(z+k)^n}$ lässt sich, wenn k eine beliebige, reelle oder imaginäre Constante, n eine ganze positive Zahl >1 ist, und $z+k$ zwischen $x=a$ und $x=b$ nicht verschwindet, leicht auf ein schon in (§. 3) untersuchtes Integral zurückführen, wenn man $z+k$ durch y bezeichnet. Dasselbe ist dann

$$= \int_a^b \frac{y'}{y^n} dx.$$

§. 6.

Es lässt sich auf ähnliche Weise das Integral $\int_a^b \frac{z'dx}{z+k}$ von dem im (§. 4) untersuchten $\int_a^b \frac{y'dy}{y}$ abhängig machen, wenn man $y = z+k$ setzt. Die dortigen Formeln lassen sich *unmittelbar* anwenden, wenn man nicht z, sondern $z+k$ gleich

$$p + qi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

setzt. Es sind daher sämmtliche Formeln angegeben worden, auf welche sich unsere Integralform reduciren lässt, wenn $f(x)$ eine *rationale* Function von x ist. In vielen Fällen wird es übrigens besser sein, erst die Zerlegung zu machen, dann die Integration nach den Formeln (§. 3 — §. 6) auszuführen, und das Integral unmittelbar nach der angegebenen Methode aus $\int f(x)\,dx$ herzuleiten.

Um diese Methode weiter zu erläutern, füge ich die Behandlung des Integrals

$$\int_a^b \frac{z' dx}{z^2 + D}$$

hinzu, welches man nach (§. 4 und §. 6) aus den beiden

$$\int_a^b \frac{z' dx}{z + i\sqrt{D}}, \quad \int_a^b \frac{z' dx}{z - i\sqrt{D}}$$

zusammensetzen könnte. D bedeutet hier irgend eine reelle oder imaginäre Constante, und $z^2 + D$ darf zwischen $x = a$ und $x = b$ nicht verschwinden.

§. 7.

Da $\int \frac{dx}{x^2+D} = \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{arctang} \frac{x}{\sqrt{D}}$ ist, so wird nach (§. 1, No. 4):

$$\int \frac{z' dx}{z^2+D} = \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{\sqrt{D}}.$$

Der arc hat bekanntlich eine Bedeutung, wenn auch $\frac{z}{\sqrt{D}}$ imaginär ist, indem man unter $\operatorname{arc\,tang} y$ jede Grösse u zu verstehen hat, die so beschaffen ist, dass ihre Tangente gleich y ist, d. h. so, dass

$$\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{i(e^{iu} + e^{-iu})} = y$$

wird. Macht man

$$\frac{z}{\sqrt{D}} = p + qi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

und nimmt r und φ wie in (§. 4) an, so lässt sich $\psi(x)$ gleich

$$-\frac{i}{4\sqrt{D}} \log \frac{1 - 2r\sin\varphi + r^2}{1 + 2r\sin\varphi + r^2} + \frac{1}{2\sqrt{D}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2r\cos\varphi}{1 - r^2}$$

setzen; indem man unter $\sqrt{D}$ eine beliebige, aber beide Male dieselbe Quadratwurzel, unter log den reellen natürlichen Logarithmus versteht, *und* arctang, *wie es von nun an immer geschehen soll, zwischen* $-\frac{1}{2}\pi$ *und* $+\frac{1}{2}\pi$ *liegend annimmt.*

Es besteht also $\psi(x)$ aus zwei Theilen, deren erster, welcher den Logarithmus enthält, immer continuirlich bleibt. Denn erstens wird $1 \pm 2r\sin\varphi + r^2 = (1 \pm r\sin\varphi)^2 + r^2\cos^2\varphi$ nie negativ, zweitens auch nie Null, indem sonst $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $r = 1$, also $\frac{z}{\sqrt{D}} = i$ d. h. $z^2 + D$ gleich Null sein würde; der Voraussetzung zuwider. Der arctang wird *discontinuirlich*, wenn $\frac{2r\cos\varphi}{1-r^2}$ von $\pm\infty$ zu $\mp\infty$ übergeht; er springt dann von $\pm\frac{1}{2}\pi$ zu $\mp\frac{1}{2}\pi$ über. Dazu muss fürs erste r gleich 1 sein; $\cos\varphi$ kann, wie eben bemerkt, nicht zugleich verschwinden. Der arctang wird aber in solchem Falle nur dann, und immer einen Sprung machen, wenn bei wachsenden x auch r von einem Werthe, der kleiner als 1 ist, zu einem Werthe der 1 übertrifft, übergeht; oder umgekehrt. Man bezeichne nun die Werthe von x, bei welchen ein solcher Uebergang eintritt, durch $\alpha, \beta, \ldots k$; die Zeichen von $\frac{\cos\varphi}{1-r^2}$ unmittelbar vorher sollen durch $e_\alpha, e_\beta, \ldots$ bestimmt sein, so dass diese Grössen ± 1 bezeichnen, je nachdem das Vorzeichen positiv oder negativ war. Alsdann hat man offenbar:

$$2\sqrt{D}\int_a^b \frac{z'dx}{z^2+D} = \tfrac{1}{2}i\left[\log\frac{1+2r_b\sin\varphi_b+r_b^2}{1-2r_b\sin\varphi_b+r_b^2} - \log\frac{1+2r_a\sin\varphi_a+r_a^2}{1-2r_a\sin\varphi_a+r_a^2}\right]$$
$$+\left[\operatorname{arctang}\frac{2r_b\cos\varphi_b}{1-r_b^2} - \operatorname{arctang}\frac{2r_a\cos\varphi_a}{1-r_a^2}\right]$$
$$+\pi[e_\alpha + e_\beta + \cdots + e_k].$$

Behält $\cos\varphi$, oder was Dasselbe ist, der *reelle* Theil von $\frac{z}{\sqrt{D}}$ immer dasselbe Zeichen, so ist klar, dass wenn r, oder der Modulus von $\frac{z}{\sqrt{D}}$, bei $x=a$ und $x=b$ zugleich kleiner oder zugleich grösser als 1 ist, der letzte, π enthaltende Theil, sich auf 0 reducirt. Ist $r_a < 1$ und $r_b > 1$, so wird er $= +\pi$; ist $r_a > 1$ und $r_b < 1$, so wird er $= -\pi$. Hat $\cos\varphi$ immer das negative Zeichen, so tritt in diesen Fällen das umgekehrte Verhalten ein; d. h. dieser Theil ist resp. $0, -\pi, +\pi$.

§. 8.

Um die Aufgabe vollständig zu lösen, ist, nach Angabe der Einleitung, noch der Fall zu untersuchen, in welchem $f(z)$ eine continuirliche rationale Function von z und einer Quadratwurzel $\sqrt{(m+2nz+pz^2)}$ ist, wenn m, n, p reelle oder imaginäre Constanten sind. Das Zeichen der Wurzel muss auf irgend eine willkürliche Art fest bestimmt sein; z. B. so, dass der reelle Theil derselben positiv, oder für gewisse x positiv, für andere negativ ist. *Natürlich muss aber nun eine solche Bestimmung getroffen sein, dass die Wurzel sich mit der Grösse unter dem Wurzelzeichen continuirlich ändert.* Dann ist offenbar:

$$\frac{d\sqrt{(m+2nz+pz^2)}}{dx} = \frac{n+pz}{\sqrt{(m+2nz+pz^2)}}.z',$$

wenn das Zeichen der Wurzel links und rechts nach denselben Principien festgestellt wurde. In der That: geht man auf die Erklärung des Differentialquotienten (§. 1, No. 3) zurück, und giebt x den Zuwachs h, wodurch der von z gleich k werden mag, so kann man

$$\sqrt{(m+2n(z+k)+p(z+k)^2)} = \sqrt{(m+2nz+pz^2)} + k\varrho + k^2\sigma + \dots\dots$$

setzen. Erhebt man Dies zum Quadrat, so ergiebt sich

$$2(n+pz)+pk^2 = 2k\varrho.\sqrt{(m^2+2nz+pz^2)} + k^2\tau + \dots\dots,$$

also für ϱ der Grenzwerth

$$\varrho = \frac{n+pz}{\sqrt{(m^2+2nz+pz^2)}},$$

welcher noch mit dem Grenzwerthe von $\frac{k}{h}$ oder z' zu multipliciren ist, um den gesuchten Differentialquotienten zu geben.

Setzt man nun

$$y = n+pz+\sqrt{p}\sqrt{(m+2nz+pz^2)},$$

wo $\sqrt{p}$ willkürlich, aber überall gleich angenommen wird, so ist

$$z = \frac{(y-n)^2-mp}{2py} \text{ und}$$

$$\frac{z}{\sqrt{(m+2nz+pz^2)}} = \frac{1}{\sqrt{p}}.\frac{y'}{y};$$

so dass jetzt die Aufgabe die ist: $\int_a^b \varphi(y)\, y' dx$ zu integriren, wenn $\varphi(y)$ eine rationale Function von y bezeichnet: eine Aufgabe, welche in den früheren Paragraphen ihre Erledigung fand.

§. 9.

Schliesslich untersuchen wir als Beispiel das Integral, auf dessen genauen Werth es in einer Untersuchung ankommt, die ich später veröffentlichen werde, nemlich das Integral

$$J = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \Big[\frac{dx}{\sqrt{[(x+mi)^2-n^2]}\sqrt{[(x+pi)^2-q^2]}}$$

$$\times \frac{(x+im)\sqrt{[(x+pi)^2-q^2]} + (x+ip)\sqrt{[(x+mi)^2-n^2]}}{(x+im)(x+ip) - nq\cos\psi + \sqrt{[(x+mi)^2-n^2]}\sqrt{[(x+pi)^2-q^2]}}\Big]$$

Es bezeichnen m, n, p, q, ψ gegebene reelle Grössen; der Fall dass zugleich $m = 0$ und $p = 0$ ist, bleibt ausgeschlossen; h und q werden positiv und die Quadratwurzeln so angenommen, dass ihr reeller Theil positiv ist. Ist der reelle Theil gleich 0 (z. B. für $x = 0$), so hat man das Princip der Continuität, welches im (§. 8) ausgesprochen wurde, festzuhalten.

Setzt man

$$z = \sqrt{((x+mi)^2 - n^2)} + \sqrt{((x+pi)^2 - q^2)} \text{ und}$$
$$\vartheta = m^2 + n^2 + p^2 + q^2 - 2mp - 2nq\cos\psi,$$

so vereinfacht sich das Integral zu

$$J = \int_0^1 \frac{z' dx}{z^2 + D}.$$

Es ist also D eine *reelle*, und da noch $(m \pm p)^2 + (n-q)^2$ positiv ist, eine *positive* Grösse, deren positive Quadratwurzel durch $\sqrt{D}$ bezeichnet wird. Nach der Anleitung in (§. 7) untersuchen wir nun den Werth dieses Integrals, indem wir die dort gebrauchte Bezeichnung für dieselben Dinge hier beibehalten. Es ist klar, dass hier der einfache Fall vorliegt, in welchem der reelle Theil von $\frac{z}{\sqrt{D}}$ nie negativ wird.

Es wird zunächst gezeigt werden müssen, dass $z^2 + D$ nie verschwindet. Ist x nicht gleich Null, so ist Dies klar, indem z in allen übrigen Fällen einen von

0 verschiedenen reellen Theil enthält, also nicht gleich $\pm i\sqrt{D}$ sein kann. Der Fall $x = 0$, für welchen z rein imaginär wird, erfordert aber eine besondere Behandlung.

Ist dieser Beweis geführt, so wende man die betreffende Formel des (§. 7) an. Es wird sich zeigen, dass sich leicht entscheiden lässt, ob für $x = 0$ der Mod $\frac{z}{\sqrt{D}}$ oder r_o, grösser oder kleiner als 1 ist. Für die verschiedenen Fälle, welche hier zur Sprache kommen, erhält man drei verschiedene Endformeln. Es werden zulezt diese drei Endformeln in eine einzige vereinigt.

Um diese Puncte zu erledigen, führe man vier reelle Grössen P, Σ, H, Θ ein, indem man

$$m = \sqrt{(P^2 - x^2)}.\cos H \quad , \quad p = \sqrt{(\Sigma^2 - x^2)}\cos\Theta\,,$$
$$n = P\sin H \quad , \quad q = \Sigma\sin\Theta$$

setzt. Die Quadratwurzeln werden positiv und H und Θ zwischen 0 und π angenommen. *Geometrisch* betrachtet heisst Dies, dass durch einen Punct, dessen rechtwinklige Coordinaten m und n, oder p und q sind, *Ellipsen* von der Excentricität x gelegt werden. Je nachdem m positiv oder negativ ist, wird daher $\cos H$ positiv oder negativ sein. Man setze $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem m positiv oder negativ ist.

Die Werthe von P, Σ, H, Θ, welche $x = 0$ und $x = 1$ entsprechen, bezeichne man resp. mit ϱ_0, σ_0, η_0, θ_0 und ϱ, σ, η, θ, so dass

$$m = \sqrt{(\varrho^2 - 1)}\cos\eta \quad , \quad p = \sqrt{(\sigma^2 - x^2)}\cos\theta\,,$$
$$n = \varrho\sin\eta \quad , \quad q = \sigma\sin\theta\,,$$

und auch

$$m = \varrho_0\cos\eta_0 \quad , \quad p = \sigma_0\cos\theta_0\,,$$
$$n = \varrho_0\sin\eta_0 \quad , \quad q = \sigma_0\sin\theta_0\,,$$

ist. Man hat nun $(x + mi)^2 - n^2 = [x\cos H + i\sqrt{(P^2 - x^2)}]^2$, so dass

$$z = (\varepsilon\cos H + \xi\cos\Theta)x + i[\varepsilon\sqrt{(P^2 - x^2)} + \xi\sqrt{(\Sigma^2 - x^2)}]$$

ist, indem hier die reellen Theile der Quadratwurzeln positiv sein sollen. Es zeigt sich hieraus, welchen Werth z_0, wenn man seine Continuität berücksichtigt, für $x = 0$ annimmt; es ergiebt sich offenbar

$$z_0 = i(\varepsilon\varrho_0 + \xi\sigma_0).$$

Nun ist klar, dass auch $z_0^2 + D$ nicht verschwinden kann; sonst müsste

$$(\varepsilon\varrho_0+\xi\sigma_0)^2 = D$$

sein; d. h. wenn man in D für $m, n, \ldots$ die Grössen $\varrho_0, \ldots$ einführt, müsste

$$-\varepsilon\xi = \cos\eta_0\cos\theta_0+\sin\eta_0\sin\theta_0\cos\psi$$

sein. Dies ist aber unmöglich. Haben nemlich $\cos\eta_0$ und $\sin\eta_0$ gleiche Zeichen, so ist $-\varepsilon\xi = -1$; da aber der Zahlwerth von $\sin\eta_0\sin\theta_0\cos\psi$ höchstens $=1$ sein kann, so müsste $\eta_0=\theta_0=\frac{1}{2}\pi$, $\cos\psi=-1$ sein, folglich m und p zugleich den Werth 0 haben: der Annahme zuwider. Dieselbe Unmöglichkeit würde sich ergeben, wenn $\varepsilon\xi=+1$ angenommen würde.

An dieser Stelle zeigt sich auch, unter welchen Bedingungen Mod $\frac{z_0}{\sqrt{D}}$ grösser oder kleiner als 1 ist. Es wird dieser Modulus nämlich gleich dem positiven Werthe von $\frac{\varepsilon\varrho_0+\zeta\sigma_0}{\sqrt{D}}$, also >1 oder <1, je nachdem $(\varepsilon\varrho_0+\xi\sigma_0)^2-D$, d. h.

$$\varepsilon\xi+\cos\eta_0\cos\theta_0+\sin\eta_0\sin\theta_0\cos\psi$$

positiv oder negativ ist. Der Ausdruck ist offenbar mit $\varepsilon\xi$ zugleich positiv und negativ, so dass

$$r_0 = \text{Mod}\,\frac{z_0}{\sqrt{D}} > 1 \quad , \quad \text{wenn } \varepsilon\xi=+1,$$

$$r_0 = \text{Mod}\,\frac{z_0}{\sqrt{D}} < 1 \quad , \quad \text{wenn } \varepsilon\xi=-1 \text{ ist.}$$

Es sind nun in den Formeln des (§. 7) für a uud b ihre Werthe 0 und 1 zu setzen; ferner

$$\frac{z_a}{\sqrt{D}} = r_a(\cos\varphi_a+i\sin\varphi_a) = i.\frac{\varepsilon\varrho^0+\zeta\sigma_0}{\sqrt{D}} \qquad (\text{also } \varphi_a=\tfrac{1}{2}\pi)$$

$$\frac{z_b}{\sqrt{D}} = r_b(\cos\varphi_b+i\sin\varphi_b) = i.\frac{\varepsilon\cos\eta+\zeta\cos\theta}{\sqrt{D}}+i.\frac{\varepsilon\sqrt{(\varrho^2-1)}+\varepsilon\sqrt{(\sigma^2-1)}}{\sqrt{D}}$$

Dann wird $2J\sqrt{D}$ gleich der Summe eines imaginären Theils iQ und eines reellen Theils R, also

$$2J\sqrt{D} = iQ+R,$$

wo

$$Q = \log\frac{[\sqrt{D}+\varepsilon\sqrt{(\varrho^2-1)}+\zeta\sqrt{(\sigma^2-1)}]^2+(\varepsilon\cos\eta+\zeta\cos\theta)^2}{[\sqrt{D}+\varepsilon\sqrt{(\varrho^2-1)}+\zeta\sqrt{(\sigma^2-1)}]^2+(\varepsilon\cos\eta+\zeta\cos\theta)^2}-\log\left(\frac{\sqrt{D}+\varepsilon\varrho_0+\zeta\sigma_0}{\sqrt{D}-\varepsilon\varrho_0-\zeta\sigma_0}\right)^2$$

ist. Macht man ferner

$$R_1 = arc\ \text{tg}\,\frac{2(\varepsilon\cos\eta+\zeta\cos\theta)\sqrt{D}}{D-[\varepsilon\sqrt{(\varrho^2-1)}+\zeta\sqrt{(\sigma^2-1)}]^2-(\varepsilon\cos\eta+\zeta\cos\theta)^2]} \quad (-\tfrac{1}{2}\pi<R_1<\tfrac{1}{2}\pi),$$

so ist $R = R_1$, oder $R = R_1 + \pi$, oder $R = R_1 - \pi$; wie aus (§. 7) zu sehen. Man hat nämlich $R = R_1$ wenn $r_a < 1$ nnd $r_b < 1$, oder wenn $r_a > 1$ und $r_b > 1$ ist. Es ist $R = R_1 + \pi$, wenn $r_a < 1$ und $r_b > 1$; endlich $R = R_1 - \pi$ wenn $r_a > 1$ und $r_b < 1$ ist. Die Bedingung $r_a \gtrless 1$ stimmt (S. oben) mit $\varepsilon\zeta = > 1$ überein; r_b ist grösser als 1, wenn der Nenner N des Ausdrucks für R_1 unter dem *arc* tg. negativ, $r_b < 1$, wenn N positif ist. Es lassen sich daher die drei Formeln für R in die eine

$$R = -\varepsilon\zeta\tfrac{1}{2}\pi + arc\ \mathrm{tg}\ \frac{[\varepsilon\sqrt{(\varrho^2-1)} + \zeta\sqrt{(\sigma^2-1)}]^2 + (\varepsilon\cos\eta + \zeta\cos\theta) - D}{2(\varepsilon\cos\eta + \zeta\cos\theta)\sqrt{D}}$$

vereinigen, den *arc* tg wieder zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ angenommen. Denn erstens haben $R_1, R, \pm\pi$ und der End-Ausdruck von R offenbar dieselbe Tangente; zweitens liegt das durch den End-Ausdruck bestimmte R in dem richtigen Quadranten; und Anderes ist nicht erforderlich. Es liegt nämlich R_1 wenn $r_b > 1$ ist, zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und 0; wenn $r_b < 1$ ist, zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$; es soll also r, wie folgt, liegen:

Wenn $r_a < 1$ ist und $r_b < 1$, zwischen 0 und $+\frac{1}{2}\pi$,
Wenn $r_a > 1$ ist und $r_b > 1$, zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und 0,
Wenn $r_a > 1$ ist und $r_b < 1$, zwisehen $-\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$,
Wenn $r_a < 1$ ist und $r_b > 1$, zwischen $+\frac{1}{2}\pi$ und $+\pi$;

wie es nach der Endformel wirklich geschieht.

Schlussbemerkungen.

Die vorstehende Abhandlung zeigt, dass $\int_a^b f(z)z'dx$, wenn $f(z)$ eine rationale, continuirliche Function von z bezeichnet, verschiedene Werthe annehmen kann, falls z auf verschiedenen Wegen von seinem festen Anfangswerthe z_a zu dem gleichfalls festgehaltenen Endwerthe z_b gelangt. Fasset man das Integral, um es in dieser Beziehung noch genauer zu untersuchen, noch einmal in's Auge, so ist es zweckmässig, dasselbe in diejenigen einfacheren Integrale zu zerlegen, welche den Gegenstand von (§. 3 bis §. 6) ausmachen.

Wir stellen uns deshalb $f(z)$ in seine drei Theile zerlegt vor. Der *erste* Theil

$$T = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

ist eine ganze Function von z; der *zweite* mag die Form

$$U = \frac{a_1}{(z-k_1)^2} + \frac{a_2}{(z-k_2)^2} + \frac{a_3}{(z-k_3)^2} + \cdots$$
$$+ \frac{b_1}{(z-k_1)^3} + \frac{b_2}{(z-k_2)^3} + \frac{b_3}{(z-k_3)^3} + \cdots$$
$$+ \cdots$$

haben. Endlich der *dritte* sei

$$V = \frac{a_1}{z-k_1} + \frac{a_2}{z-k_2} + \frac{a_3}{z-k_3} + \cdots.$$

Kommt nur T und U, aber nicht $Vf(z)$ vor, so wird nach (§. 3 und §. 5) der Weg, den z von z_a bis z_b geht, ohne Einfluss auf das Resultat bleiben, vorausgesetzt, dass man ein Verschwinden der Nenner vermeidet: das Endresultat hangt dann also nur von z_a und z_b ab. Anders verhält es sich, wenn auch V wirklich vorhanden ist.

Man sieht aus (§. 4 und §. 6), dass ein Integral

$$\int_a^b \frac{z'\,dx}{z-k},$$

je nach dem verschiedenen Laufe der Function z, verschiedene Werthe annimmt, die sich aber sämmtlich nur durch Addition einer grösseren oder geringeren Anzahl Vielfacher von $2\pi i$ unterscheiden. Es ist leicht zu sehen, dass der Lauf von z sich so ändern lässt, dass jedes beliebige Vielfache von $2\pi i$ als additives Glied sich zeigt. Da aus V eine Summe solcher einzelnen Integrale entsteht, deren jedes mit einer Constanten a multiplicirt ist, so folgt, dass, je nach der verschiedenen Beschaffenheit der reellen und imaginären Theile der a, auch eine Aenderung des Weges von z einen ganz verschiedenartigen Einfluss auf das Gesammtresultat hat. Schliesst man den oben behandelten Fall, dass alle a in V, also V selbst gleich Null ist, aus, so können zunächst die reellen Theile aller a zu einander in rationalem Verhältnisse stehen, und zugleich die imaginären Theile aller a ein rationales Verhältniss zu einander haben. Dann wird das Integral $\int_a^b f(z)\,z'dx$ zwar für verschiedene Wege, die z von z_a bis z_b durchläuft, verschiedene Werthe haben, aber nur solche, welche sich um ganze Vielfache einer,

oder höchstens zweier festen, d. h. von dem Wege von z unabhängigen, aber von den a abhängigen Grössen unterscheiden, von denen eine reel, die andere imaginär ist. Das Integral ist dann also entweder *einfach-*, oder *doppelt-periodisch.* In allen übrigen Fällen ist das Integral *vielfach-periodisch.* Stehen selbst nur zwei der reellen Theile der a in *irrationalem* Verhältnisse, so kann, bei verschiedenem Wege von z, der *imaginäre* Theil des Integrals alle möglichen Werthe bekommen; stehen nur zwei von den imaginären Theilen der a in irrationalem *Verhältnisse,* so kann der *reelle* Theil des Integrals alle möglichen Werthe annehmen. Das ganze Integral endlich erhält, bei Aenderung des Weges von z, alle möglichen Werthe, wenn auch nur zwei reelle Theile der a zu einander, und zugleich wenigstens zwei imaginäre Theile der a zu einander in irrationalem Verhältnisse stehen. Die Betrachtungen, welche auf diese, im Wesentlichen auch bei *Puiseux* vorkommenden Resultate führen, findet man auf den ersten Seiten einer Abhandlung von *Jacobi,* im 13ten Bande des gegenwärtigen Journals: „De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis."

Diese Sätze wird man auch auf den Fall ausdehnen können, in welchem $f(z)$ eine rationale Function von z und der Quadratwurzel $\sqrt{(m+2nz+pz^2)}$ ist, indem dieser Fall im (§. 8) auf den früheren zurückgeführt wurde.

Bonn, im Januar 1855.

Druckfehler in Band 48, 49 und 50.

Vol. 48.

page 377 ligne 9 Appollonius liser Apollonius.
- - 17 son - sont.
- - 22 solusion - solution.
- 378 - 22 $\frac{a^2 - b^2}{b^2}$ - $\frac{(a^2 - b^2)}{b^2}$.
- 379 - 13 fournit - fournis.
- - 21 tangente f' - tangente en f'.
- 380 - 9 p, a, r - p, q, r.
- 398 Zeile 21 ein Glied lies ein anderes Glied.
- 409 - 7 mehr hat - mehr oder weniger hat.

Band 49.

Seite 287 Zeile 7 von unten statt Behandlung lies Behauptung.
- 304 - 7 von oben - 12 . 23 - 13 . 23.
- 309 - 11 von unten - die - der.
- 318 - 2 von oben - 28 34 35 - 28 12 35.
- 320 - 10 - - der - den.
- 329 - 1 - - das Product - das negative Product.

Band 50.

Seite 85 Zeile 4 von oben fehlt das Wort „nie."

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
07	21	49	63	77	91	19	33	47	61	89	03	17	31	59	73	87	01	29	43	57	71	99	13	27	41	69	83	97	11	39	53	67	81	09	23	37	51	79	93
11	33	77	99	21	43	87	09	31	53	97	19	41	63	07	29	51	73	17	39	61	83	27	49	71	93	37	59	81	03	47	69	91	13	57	79	01	23	67	89
03	09	21	27	33	39	51	57	63	69	81	87	93	99	11	17	23	29	41	47	53	59	71	77	83	89	01	07	13	19	31	37	43	49	61	67	73	79	91	97
09	27	63	81	99	17	53	71	89	07	43	61	79	97	33	51	69	87	23	41	59	77	13	31	49	67	03	21	39	57	93	11	29	47	83	01	19	37	73	91
11	33	77	99	21	43	87	09	31	53	97	19	41	63	07	29	51	73	17	39	61	83	27	49	71	93	37	59	81	03	47	69	91	13	57	79	01	23	67	89
17	51	19	53	87	21	89	23	57	91	59	93	27	61	29	63	97	31	99	33	67	01	69	03	37	71	39	73	07	41	09	43	77	11	79	13	47	81	49	83
21	63	47	89	31	73	57	99	41	83	67	09	51	93	77	19	61	03	87	29	71	13	97	39	81	23	07	49	91	33	17	59	01	43	27	69	11	53	37	79
23	69	61	07	53	99	91	37	83	29	21	67	13	59	51	97	43	89	81	27	73	19	11	57	03	49	41	87	33	79	71	17	63	09	01	47	93	39	31	77
27	81	89	43	97	51	59	13	67	21	29	83	37	91	99	53	07	61	69	23	77	31	39	93	47	01	09	63	17	71	79	33	87	41	49	03	57	11	19	73
29	87	03	61	19	77	93	51	09	67	83	41	99	57	73	31	89	47	63	21	79	37	53	11	69	27	43	01	59	17	33	91	49	07	23	81	39	97	13	71
33	99	31	97	63	29	61	27	93	59	91	57	23	89	21	87	53	19	51	17	83	49	81	47	13	79	11	77	43	09	41	07	73	39	71	37	03	69	01	67
39	17	73	51	29	07	63	41	19	97	53	31	09	87	43	21	99	77	33	11	89	67	23	01	79	57	13	91	69	47	03	81	59	37	93	71	49	27	83	61
41	23	87	69	51	33	97	79	61	43	07	89	71	53	17	99	81	63	27	09	91	73	37	19	01	83	47	29	11	93	57	39	21	03	67	49	31	13	77	59
47	41	29	23	17	11	99	93	87	81	69	63	57	51	39	33	27	21	09	03	97	91	79	73	67	61	49	43	37	31	19	13	07	01	89	83	77	71	59	53
51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
53	59	71	77	83	89	01	07	13	19	31	37	43	49	61	67	73	79	91	97	03	09	21	27	33	39	51	57	63	69	81	87	93	99	11	17	23	29	41	47
57	71	99	13	27	41	69	83	97	11	39	53	67	81	09	23	37	51	79	93	07	21	49	63	77	91	19	33	47	61	89	03	17	31	59	73	87	01	29	43
59	77	13	31	49	67	03	21	39	57	93	11	29	47	83	01	19	37	73	91	09	27	63	81	99	17	53	71	89	07	43	61	79	97	33	51	69	87	23	41
63	89	41	67	93	19	71	97	23	49	01	27	53	79	31	57	83	09	61	87	13	39	91	17	43	69	21	47	73	99	51	77	03	29	81	07	33	59	11	37
69	07	83	21	59	97	73	11	49	87	63	01	39	77	53	91	29	67	43	81	19	57	33	71	09	47	23	61	99	37	13	51	89	27	03	41	79	17	93	31
71	13	97	39	81	23	07	49	91	33	17	59	01	43	27	69	11	53	37	79	21	63	47	89	31	73	57	99	41	83	67	09	51	93	77	19	61	03	87	29
77	31	39	93	47	01	09	63	17	71	79	33	87	41	49	03	57	11	19	73	27	81	89	43	97	51	59	13	67	21	29	83	37	91	99	53	07	61	69	23
81	43	67	29	91	53	77	39	01	63	87	49	11	73	97	59	21	83	07	69	31	93	17	79	41	03	27	89	51	13	37	99	61	23	47	09	71	33	57	19
83	49	81	47	13	79	11	77	43	09	41	07	73	39	71	37	03	69	01	67	33	99	31	97	63	29	61	27	93	59	91	57	23	89	21	87	53	19	51	17
87	61	09	83	57	31	79	53	27	01	49	23	97	71	19	93	67	41	89	63	37	11	59	33	07	81	29	03	77	51	99	73	47	21	69	43	17	91	39	13
89	67	23	01	79	57	13	91	69	47	03	81	59	37	93	71	49	27	83	61	39	17	73	51	29	07	63	41	19	97	53	31	09	87	43	21	99	77	33	11
93	79	51	37	23	09	81	67	53	39	11	97	83	69	41	27	13	99	71	57	43	29	01	87	73	59	31	17	03	89	61	47	33	19	91	77	63	49	21	07
99	97	93	91	89	87	83	81	79	77	73	71	69	67	63	61	59	57	53	51	49	47	43	41	39	37	33	31	29	27	23	21	19	17	13	11	09	07	03	01

144000 - x　　　　$p-7$　　　　Taf. III.

ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η
	336/336				336/337				337/337				338/338				338/339				339/339				340/340				340/341				341/342				342/342		
2				5				8				11				14				17				20				23				26				29			
03		14	21	03		5	21	03		26	21	03		17	21	03		8	21	03		29	21	03		20	21	03		11	21	03		2	21	03		23	21
09			63	09			63	09			63	09			63	09			63	09			63	09			63	09			63	09			63	09			63
11			77	11			77	11			77	11			77	11			77	11			77	11			77	11			77	11			77	11			77
17		15	19	17		6	19	17		27	19	17		18	19	17		9	19	17	1	0	19	17		21	19	17		12	19	17		3	19	17		24	19
21			47	21			47	21			47	21			47	21			47	21			47	21			47	21			47	21			47	21			47
23			61	23			61	23			61	23			61	23			61	23			61	23			61	23			61	23			61	23			61
27			89	27			89	27			89	27			89	27			89	27			89	27			89	27			89	27			89	27			89
29		16	03	29		7	03	29		28	03	29		19	03	29		10	03	29		1	03	29		22	03	29		13	03	29		4	03	29		25	03
33			31	33			31	33			31	33			31	33			31	33			31	33			31	33			31	33			31	33			31
39			73	39			73	39			73	39			73	39			73	39			73	39			73	39			73	39			73	39			73
41			87	41			87	41			87	41			87	41			87	41			87	41			87	41			87	41			87	41			87
47		17	29	47		8	29	47		29	29	47		20	29	47		11	29	47		2	29	47		23	29	47		14	29	47		5	29	47		26	29
51			57	51			57	51			57	51			57	51			57	51			57	51			57	51			57	51			57	51			57
53			71	53			71	53			71	53			71	53			71	53			71	53			71	53			71	53			71	53			71
57			99	57			99	57			99	57			99	57			99	57			99	57			99	57			99	57			99	57			99
59		18	13	59		9	13	59	1	0	13	59		21	13	59		12	13	59		3	13	59		24	13	59		15	13	59		6	13	59		27	13
63			41	63			41	63			41	63			41	63			41	63			41	63			41	63			41	63			41	63			41
69			83	69			83	69			83	69			83	69			83	69			83	69			83	69			83	69			83	69			83
71			97	71			97	71			97	71			97	71			97	71			97	71			97	71			97	71			97	71			97
77		19	39	77		10	39	77		1	39	77		22	39	77		13	39	77		4	39	77		25	39	77		16	39	77		10	39	77		28	39
81			67	81			67	81			67	81			67	81			67	81			67	81			67	81			67	81			67	81			67
83			81	83			81	83			81	83			81	83			81	83			81	83			81	83			81	83			81	83			81
87		20	09	87		11	09	87		2	09	87		23	09	87		14	09	87		5	09	87		26	09	87		17	09	87		11	09	87		29	09
89			23	89			23	89			23	89			23	89			23	89			23	89			23	89			23	89			23	89			23
93			51	93			51	93			51	93			51	93			51	93			51	93			51	93			51	93			51	93			51
99			93	99			93	99			93	99			93	99			93	99			93	99			93	99			93	99			93	99			93
ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η

12000 = λ $p = 83$ Taf. IV.

ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν
	332				340				348				356				365		
0				3				6				9				12			
01	0	0	83	01		9	83	01		18	83	01		27	83	01		6	83
07		5	81	07		14	81	07		23	81	07	1	3	81	07		11	81
03		10	49	03		21	49	03		8	49	03		13	49	03		24	49
09		23	47	09	1	2	47	09		11	47	09		20	47	09		29	47
11		25	13	11		4	13	11		13	13	11		22	13	11	1	1	13
17	1	0	11	17		9	11	17		18	11	17		27	11	17		6	11
21		3	43	21		12	43	21		21	43	21	1	0	43	21		9	43
23		5	09	23		14	09	23		23	09	23		2	09	23		11	09
27		8	41	27		17	41	27		26	41	27		5	41	27		14	41
29		10	07	29		19	07	29		28	07	29		7	07	29		16	07
33		13	39	33		22	39	33	1	1	39	33		10	39	33		19	39
39		18	37	39		27	37	39		6	37	39		15	37	39		24	37
41		20	03	41		29	03	41		8	03	41		17	03	41		26	03
47		25	01	47	1	4	01	47		13	01	47		22	01	47	1	1	01
51		28	33	51		7	33	51		16	33	51		25	33	51		4	33
53		29	99	53		8	99	53		17	99	53		26	99	53		5	99
57	1	3	31	57		12	31	57		21	31	57	1	0	31	57		9	31
59		4	97	59		13	97	59		22	97	59		1	97	59		10	97
63		8	29	63		17	29	63		26	29	63		5	29	63		14	29
69		13	27	69		22	27	69	1	1	27	69		10	27	69		19	27
71		14	93	71		23	93	71		2	93	71		11	93	71		20	93
77		19	91	77		28	91	77		7	91	77		16	91	77		25	91
81		23	23	81	1	2	23	81		11	23	81		20	23	81		29	23
83		24	89	83		3	89	83		12	89	83		21	89	83	1	0	89
87		28	21	87		7	21	87		16	21	87		25	21	87		4	21
89		29	87	89		8	87	89		17	87	89		26	87	89		5	87
93		3	19	93		12	19	93		21	19	93	1	0	19	93		9	19
99		8	17	99		17	17	99		26	17	99		5	17	99		14	17
ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν

ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν
	373				381				390				398				406		
15				18				21				24				27			
01		15	83	01		24	83	01		3	83	01		12	83	01		21	83
07		20	81	07		29	81	07		8	81	07		17	81	07		26	81
03		3	49	03		12	49	03		21	49	03	1	0	49	03		9	49
09		8	47	09		17	47	09		26	47	09		5	47	09		14	47
11		10	13	11		19	13	11		28	13	11		7	13	11		16	13
17		15	11	17		24	11	17	1	3	11	17		12	11	17		21	11
21		18	43	21		27	43	21		6	43	21		15	43	21		24	43
23		20	09	23		29	09	23		8	09	23		17	09	23		26	09
27		23	41	27	1	2	41	27		11	41	27		20	41	27		29	41
29		25	07	29		4	07	29		13	07	29		22	07	29	1	1	07
33		28	39	33		7	39	33		16	39	33		25	39	33		4	39
39	1	3	37	39		12	37	39		21	37	39	1	0	37	39		9	37
41		5	03	41		14	03	41		23	03	41		2	03	41		11	03
47		10	01	47		19	01	47		28	01	47		7	01	47		16	01
51		13	33	51		22	33	51	1	1	33	51		10	33	51		19	33
53		14	99	53		23	99	53		2	99	53		11	99	53		20	99
57		18	31	57		27	31	57		6	31	57		15	31	57		24	31
59		19	97	59		28	97	59		7	97	59		16	97	59		25	97
63		23	29	63	1	2	29	63		11	29	63		20	29	63		29	29
69		28	27	69		7	27	69		16	27	69		25	27	69	1	4	27
71		29	93	71		8	93	71		17	93	71		26	93	71		5	93
77	1	4	91	77		13	91	77		22	91	77	1	1	91	77		10	91
81		8	23	81		17	23	81		26	23	81		5	23	81		14	23
83		9	89	83		18	89	83		27	89	83		6	89	83		15	89
87		13	21	87		22	21	87	1	1	21	87		10	21	87		19	21
89		14	87	89		23	87	89		2	87	89		11	87	89		20	87
93		18	19	93		27	19	93		6	19	93		15	19	93		24	19
99		23	17	99	1	2	17	99		11	17	99		20	17	99		29	17
ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν	ε	μ	ο	ν

000 = λ p = 1693 Taf. V.

ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η
	0				168				338				507				676				843				1015				1184				1353				1523		
0				3				6				9				12				15				18				21				24				27			
01	0	16	93	01	1	25	93	01	1	4	93	01	1	13	93	01	1	22	93	01	2	1	93	01	1	10	93	01	1	19	93	01	1	28	93	01	1	7	93
07	3	28	51	07	4	7	51	07	3	16	51	07	3	25	51	07	4	4	51	07	3	13	51	07	3	22	51	07	4	1	51	07	4	10	51	07	3	19	51
11	3	6	23	11	2	15	23	11	2	24	23	11	3	3	23	11	2	12	23	11	2	21	23	11	3	0	23	11	2	9	23	11	2	18	23	11	2	27	23

ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η
2				5				8				11				14				17				20				23				26				29			
03	2	16	79	03	2	25	79	03	3	4	79	03	2	13	79	03	2	22	79	03	3	1	79	03	2	10	79	03	2	19	79	03	2	28	79	03	2	7	79
09	3	28	37	09	4	7	37	09	3	16	37	09	3	25	37	09	4	4	37	09	3	13	37	09	3	22	37	09	4	1	37	09	4	10	37	09	3	19	37
11	2	2	23	11	1	11	23	11	1	20	23	11	1	29	23	11	1	8	23	11	1	17	23	11	1	26	23	11	1	5	23	11	1	14	23	11	1	23	23
17	3	13	81	17	3	22	81	17	4	1	81	17	4	10	81	17	3	19	81	17	3	28	81	17	4	7	81	17	3	16	81	17	3	25	81	17	4	4	81
21	2	21	53	21	3	0	53	21	2	9	53	21	2	18	53	21	2	27	53	21	3	6	53	21	2	15	53	21	2	24	53	21	3	3	53	21	2	12	53
23	1	25	39	23	1	4	39	23	1	13	39	23	1	22	39	23	2	1	39	23	1	10	39	23	1	19	39	23	1	28	39	23	1	7	39	23	1	16	39
27	3	3	11	27	2	12	11	27	2	21	11	27	3	0	11	27	2	9	11	27	2	18	11	27	2	27	11	27	3	6	11	27	2	15	11	27	2	24	11
29	1	6	97	29	1	15	97	29	1	24	97	29	1	3	97	29	1	12	97	29	1	21	97	29	2	0	97	29	1	9	97	29	1	18	97	29	1	27	97
33	2	14	69	33	2	23	69	33	3	2	69	33	2	11	69	33	2	20	69	33	2	29	69	33	2	8	69	33	2	17	69	33	2	26	69	33	3	5	69
39	3	26	27	39	4	5	27	39	3	14	27	39	3	23	27	39	4	2	27	39	4	11	27	39	3	20	27	39	3	29	27	39	4	8	27	39	3	17	27
41	2	0	13	41	1	9	13	41	1	18	13	41	1	27	13	41	1	6	13	41	1	15	13	41	1	24	13	41	2	3	13	41	1	12	13	41	1	21	13
47	3	11	71	47	3	20	71	47	3	29	71	47	4	8	71	47	3	17	71	47	3	26	71	47	4	5	71	47	3	14	71	47	3	23	71	47	4	2	71
51	2	19	43	51	2	28	43	51	3	7	43	51	2	16	43	51	2	25	43	51	3	4	43	51	2	13	43	51	2	22	43	51	3	1	43	51	2	10	43
53	1	23	29	53	2	2	29	53	1	11	29	53	1	20	29	53	1	29	29	53	1	8	29	53	1	17	29	53	1	26	29	53	1	5	29	53	1	14	29
57	3	1	01	57	2	10	01	57	2	19	01	57	2	28	01	57	3	7	01	57	2	16	01	57	2	25	01	57	3	4	01	57	2	13	01	57	2	22	01
59	1	4	87	59	1	13	87	59	1	22	87	59	2	1	87	59	1	10	87	59	1	19	87	59	1	28	87	59	1	7	87	59	1	16	87	59	1	25	87
63	2	12	59	63	2	21	59	63	3	0	59	63	2	9	59	63	2	18	59	63	2	27	59	63	3	6	59	63	2	15	59	63	2	24	59	63	3	3	59
69	3	24	17	69	4	3	17	69	3	12	17	69	3	21	17	69	4	0	17	69	4	9	17	69	3	18	17	69	3	27	17	69	4	6	17	69	3	15	17
71	1	28	03	71	1	7	03	71	1	16	03	71	1	25	03	71	1	4	03	71	1	13	03	71	1	22	03	71	2	1	03	71	1	10	03	71	1	19	03
77	4	9	61	77	3	18	61	77	3	27	61	77	4	6	61	77	3	15	61	77	3	24	61	77	4	3	61	77	3	12	61	77	3	21	61	77	4	0	61
81	2	17	33	81	2	26	33	81	3	5	33	81	2	14	33	81	2	23	33	81	3	2	33	81	2	11	33	81	2	20	33	81	2	29	33	81	2	8	33
83	1	21	19	83	2	0	19	83	1	9	19	83	1	18	19	83	1	27	19	83	1	6	19	83	1	15	19	83	1	24	19	83	2	3	19	83	1	12	19
87	2	28	91	87	2	7	91	87	2	16	91	87	2	25	91	87	3	4	91	87	2	13	91	87	2	22	91	87	3	1	91	87	2	10	91	87	2	19	91
89	2	2	77	89	1	11	77	89	1	20	77	89	1	29	77	89	1	8	77	89	1	17	77	89	1	26	77	89	1	5	77	89	1	14	77	89	1	23	77
93	2	10	49	93	2	19	49	93	2	28	49	93	3	7	49	93	2	16	49	93	2	25	49	93	3	4	49	93	2	13	49	93	2	22	49	93	3	1	49
99	3	22	07	99	4	1	07	99	4	10	07	99	3	19	07	99	3	28	07	99	4	7	07	99	3	16	07	99	3	25	07	99	4	4	07	99	3	13	07
ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η	ε	μ	c	η

4.

10.

STORAGE AREA

